ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 3.

УДК 51(091), 51(092) DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-304-319

Вацлав Франциск Серпинский (1882 – 1969) и феномен польской школы теории множеств

Г. И. Синкевич

Синкевич Галина Ивановна — Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Аннотация

В прошлом году исполнилось 140 лет со дня рождения польского математика Вацлава Серпинского, основателя Варшавской школы теории множеств. Основные направления его исследований теория чисел, теория множеств, теория меры, топология. Несколько лет, проведенных им в Москве, в обстановке молодой школы теории функций, и сотрудничество с Н.Н. Лузиным, наложили отпечаток на его дальнейшие исследования. По возвращении на родину ему удалось увлечь и сплотить коллег на базе изучения и использования теории множеств, теории меры и топологии. Теория множеств не требовала глубокой специализации, объединяла математиков различных направлений, а ее методы позволяли получать результаты с гораздо меньшими затратами, нежели методы специальных разделов математики. Основанный в 1920 г. журнал "Fundamenta Mathematicae" был целиком посвящен теории множеств, имел раздел "Проблемы"и выходил на основных европейских языках, благодаря чему возник плодотворный международный научный диалог. Многочисленные исследования самого Серпинского послужили основой для исследований его учеников.

Ключевые слова: Вацлав Серпинский, польская школа теории множеств.

Библиография: 43 названия.

Для цитирования:
Г. И. Синкевич. Вацлав Франциск Серпинский (1882 – 1969) и феномен польской школы теории множеств // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 3, с. 304–319.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 3.

UDC 51(091), 51(092) DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-304-319

Wacław Franciszek Sierpiński (1882 – 1969) and the phenomenon of Polish set theory school

G. I. Sinkevich

Sinkevich Galina Ivanovna — Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering (Saint-Petersburg).
e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Abstract

This year marks the 140th anniversary of the birth of the Polish mathematician Wacław Sierpiński, founder of the Warsaw School of Set Theory. The main directions of his research are number theory, set theory, measure theory, topology. Some years spent by him in Moscow, in the atmosphere of a young school of function theory, and collaboration with N.N. Luzin, left an imprint on his further research. Upon returning to his homeland, he managed to captivate and rally colleagues on the basis of the study and use of set theory, measure theory and topology. Set theory did not require prior specialization, it united mathematicians of various directions, and its methods made it possible to obtain results at a much lower cost than the methods of special sections of mathematics. Polish journal "Fundamenta Mathematicae"was founded in 1920, was entirely devoted to set theory, had a "Problems"section, and was published in the main European languages, thanks to which a fruitful international scientific dialogue arose. Numerous studies of Sierpinski himself served as the basis for the studies of his students.

Keywords: Wacław Sierpiński, Polish set theory school.

Bibliography: 43 titles.

For citation:
G. I. Sinkevich, 2023, “Wacław Franciszek Sierpiński (1882 – 1969) and the phenomenon of Polish set theory school” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 304–319.

1. Введение

Вацлав Серпинский (тж. Серпиньский, Wacław Franciszek Sierpiński; в России – Вацлав Константинович), польский математик. Основные направления исследований теория чисел, теория множеств, теория меры, топология. Основатель польской школы теории множеств. Действительный член Польской академии наук и ее вице-президент (1952-1957), председатель научного совета Института математики Польской академии наук, член пятнадцати иностранных академий наук, президент Варшавского научного общества (1931–1952) и Польского математического общества (1928 -1930). Награжден рядом польских и зарубежных наград, почетных докторских степеней, кавалер четырех польских и пяти зарубежных орденов. Лауреат государственной премии Польши первой степени (1951).

2. Научная биография Серпинского

Родился в Варшаве (Царство Польское Российской империи) в семье врача Константина Серпинского 14.03.1882, после окончания гимназии (1900) поступил в Варшавский университет на физико-математический факультет. Ещё в гимназии Серпинский участвовал, как педагог, в работе нелегальной школы, в которой могли учиться дети рабочих.

Варшавский университет был одним из девяти российских университетов. Преподавание в университете велось на русском языке, лекции по математике читал Г. Ф. Вороной (1868-1908), который обратил внимание на талантливого студента и заинтересовал его проблематикой теории чисел и геометрии чисел, которой занимался сам. Именно в эти годы Вороной начал работу над теорией точечных решеток. Под его руководством Серпинский написал свои первые работы. В 1904 г. Серпинский получил золотую медаль за лучшую студенческую работу о проблеме количества точек с целочисленными координатами, находящихся внутри круга данного радиуса. Благодаря Вороному Серпинский на всю жизнь сохранил в исследованиях «петербургский» стиль – четкую, почти инженерную постановку задачи, подробно, «алгоритмически» обоснованное решение, конкретный результат, удобный для дальнейшего применения. С другой стороны, Московская школа также оказала большое влияние на Серпинского, так как он провел в Москве около трех лет в атмосфере интенсивного развития идей Московской школы теории функций действительного переменного, что направило его дальнейшие научные поиски и обусловило проблематику школы, возглавленную позже Серпинским.

В 1904 г. Серпинский закончил физико-математический факультет со степенью кандидата и стал учителем гимназии. В 1905 г. за участие в школьной забастовке за национализацию образования Серпинский был лишен возможности работать в государственной школе. Он выехал в Краков (австро-венгерская часть Польши) и поступил на философский факультет Ягеллонского университета, в 1906 г. экзаменовался по математике и астрономии и представил работу "О суммировании ряда $\sum_{m^2+n^2\leqq x^2} f(m^2+n^2)$", за что получил степень доктора философии. Вернувшись в Варшаву, Серпинский преподавал в гимназиях и на научных курсах. В отличие от государственных учебных заведений с преподаванием на русском языке, которые бойкотировались поляками, научные курсы носили частный характер, преподавание велось по-польски.

В 1907 г. Серпинский самостоятельно сформулировал утверждение, что положение точки на плоскости может быть задано с помощью одного действительного числа. Ни в Варшавском, ни в Ягеллонском университете преподаватели ничего не рассказывали о теории множеств. Серпинский поделился своим результатом с университетским товарищем, астрономом Тадеушем Банахевичем, который в это время слушал лекции в Геттингене. Банахевич телеграфировал ему одно слово: «Кантор», а затем выслал литературу. С этого и началось изучение Серпинским теории множеств. Заметим, что Кантор в 1878 г. установил теорему о равенстве мощностей любого непрерывного $n-$кратно протяженного образа и однократно протяженного непрерывного многообразия. У Серпинского упомянутая теорема, которую он опубликовал в 1908 г., выглядит как геометрический контрпример, кратко и изящно обоснованный с помощью теоретико-числовых построений, что в целом характерно для раннего периода творчества Серпинского.

В 1908 г. Серпинский перешел во Львовский университет, сменив российское подданство на австро-венгерское. Постепенно меняется тематика его работ: ведущей становится теория множеств. С 1909 г. он читает курс по теории множеств, один из первых самостоятельных курсов теории множеств в университетах Европы. Среди его слушателей – О. Никодим и С. Рузевич. В этот период число польских математиков, занимающихся наукой, было незначительно, их специализация способствовала разобщенности. Серпинский всерьёз задумался о необходимости создания атмосферы научного взаимопонимания между всеми польскими учеными. Занятия теорией множеств привели Серпинского к убеждению, что это и есть общий фундамент современной математики. Курс его лекций по теории множеств был опубликован в 1910-1912 гг. Впоследствии этот текст частично вошел в книгу «Кардинальные и порядковые числа» (1958). Слушатели Серпинского были увлечены теорией множеств. Начинают публиковаться работы его учеников С. Рузевича и В. Лихтенберга. Свои научные результаты Серпинский также докладывает в Варшаве. Вообще, перед тем как опубликовать какой-либо результат, Серпинский не менее двух раз докладывал его перед аудиторией [19], [22], [23]. В силу нехватки учебных пособий Серпинский пишет, помимо упомянутого курса теории множеств, еще два курса: «Теория иррациональных чисел» (1910) и «Теория чисел» (1914). Все три учебника были отмечены Краковской Академией знаний как лучшие, и в 1917 г. он был избран членом-корреспондентом Академии.

В августе 1914 г. Серпинский гостил в Белоруссии у родственников жены. Когда началась Первая мировая война, Серпинский, как подданный Австро-Венгрии, был интернирован и направлен в Вятку. Но уже к началу 1915 г., благодаря хлопотам московских математиков Д.Ф. Егорова и Б.К. Млодзеевского (тж. Млодзиевский), получил разрешение на жительство в Москве, где и прожил до февраля 1918 г.

Переезд в Москву знаменует собой весьма важный период в формировании Серпинского как ученого.

Идеи теории множеств проникли в Россию в конце XIX – начале XX века. В Москве возникает новая математическая школа теории функций действительного переменного [1]. В Московском университете с 1900 г. теоретико-множественные разделы читались Б.К. Млодзеевским в курсе ТФДП.

В 1911 г. появляется работа Д.Ф. Егорова «О последовательностях измеримых функций». Появляются работы Н.Н. Лузина, ученика Егорова. После защиты диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915) Лузин становится ведущим математиком Московской школы, его учениками в разные годы были П.С. Александров, Н.К. Бари, Д.Е. Меньшов, А.Н. Колмогоров, М.Я. Суслин, А.Я. Хинчин и другие.

Огромный потенциал группы московских математиков оказал воздействие на Серпинского и впоследствии на его школу. Действительно, никому более, чем Лузину, обязан Серпинский в своем творчестве. Ни с кем более Лузин не писал так много совместно. Помимо восьми совместных статей, между ними все время (вплоть до смерти Лузина в 1950 г.) велась научная переписка, стимулировавшая научные поиски обоих. К сожалению, архив Серпинского был сожжен немцами в 1943 г. и сохранилось лишь несколько писем Серпинского к Лузину [6]. Отметим, что Серпинский выступил в поддержку Лузина во время начавшейся его травли в 1931–1936 гг., что, к сожалению, дало обратный эффект: Лузин был вынужден «прекратить активное общение с польскими математиками" ([2], с. 38). В 1948 г. математикам А.Н. Колмогорову, П.С. Александрову и К.К. Марджанишвили была запрещена поездка на VI съезд польских математиков. Вот как изложил причину отказа заведующий отделом пропаганды и агитации ЦК в служебной записке Г.М. Маленкову: «Польский профессор Серпинский известен как один из самых реакционных польских математиков и буржуазных националистов. В 1936 г. в связи со статьей в газете "Правда", критиковавшей академика Н.Н. Лузина за преклонение перед иностранщиной и неправильное отношение к молодым научным кадрам, он выступил в печати в защиту Н.Н. Лузина с нападками на советскую печать. Секретарь парторганизации Математического института имени В.А. Стеклова Академии наук СССР Марджанишвили, рекомендованный для поездки в Польшу, справедливо считает посылку советских ученых на VI съезд польских математиков нецелесообразной. Учитывая, что VI съезд польских математиков связан с чествованием реакционного польского профессора Серпинского, Отдел пропаганды и агитации ЦК ВКП(б) просьбу академика Вавилова о посылке на съезд математиков не поддерживает» ([2], с. 46).

Лузин и Серпинский были почти ровесниками (Лузин младше на год). Ко времени приезда Серпинского в Москву Лузин был уже сформировавшимся ученым - он дважды побывал во Франции, где познакомился с деятельностью французской школы теории функций, уже была готова его диссертация, защищенная в 1915 г. Интересы его лежали в области дескриптивной теории множеств, что стимулировало научные поиски самого Серпинского. Многие работы Серпинского написаны благодаря постановке проблемы, сделанной Лузиным, либо навеяны беседами и последующей перепиской, либо являются ответами на его статьи. Серпинский, став другом и соавтором Лузина, внес свое, отличное от Лузина, отношение к данным проблемам в их совместные исследования. Это касается, в частности, аксиомы выбора, роль которой Серпинский объективно оценил для различных положений математики и которой активно пользовался. Из восьми совместных работ в семи явно используется аксиома Цермело. В Москве Серпинский закончил начатый в г. Вятке первый том математического анализа.

По окончании Первой мировой войны Польша объединилась в единое государство. Серпинский вернулся во Львов, и осенью 1918 г. был приглашен в Варшавский университет, где в течение тридцати последующих лет заведовал кафедрой математики.

В 1921 г. Серпинский стал действительным членом Академии знаний.

Расширяются ряды его учеников. Вместе с профессором Мазуркевичем он руководит диссертациями будущих профессоров указанных далее вузов: К. Куратовского (1921 г., Варшавский университет), К. Заранкевича (1923 г., Варшавский политехнический институт), Б. Кнастера (Университет и Политехнический институт во Вроцлаве), Э. Марчевского—Шпильрайна (1932 г., Варшавский университет), А. Тарского (Университет в Беркли, США), А. Зыгмунда (Университет в Чикаго), З. Варашкевича (Университет в Лодзи), Е. Сплава-Неймана (Университет в Беркли), С. Эйленберга (Колумбийский университет в Нью-Йорке), В. Казакевича (Университет Саскачеван в Канаде), Вакулиша (1949 г.), А. Шинцеля (1960 г.), Роткевича (1963 г.). Серпинский принимает большое участие в работах С. Сакса и А. Линденбаума (1928 г.). Состав группы показывает, что во многом польская наука работала «на экспорт».

В 1927 г. Серпинский был председателем первого съезда польских математиков. В 1929 г. по инициативе Серпинского в Варшаве был созван Первый конгресс математиков славянских стран. Серпинский был участником следующих конгрессов: в 1928 г. Международного конгресса математиков в Болонье как вице-президент, в 1936 г. Международного конгресса математиков в Осло как вице-президент; в 1933 г. – Конгресса румынских математиков (почетный председатель). В 1932 г. на Международном конгрессе математиков в Цюрихе Серпинский сделал доклад об аксиоме выбора и гипотезе континуума, а в 1938 г. там же на конференции Лиги наций продолжил изложение идей по этой проблематике. Серпинский имел звание иностранного члена-корреспондента двенадцати академий, почетного доктора пятнадцати университетов. С 1925 был вице-председателем, а с 1931 – председателем Варшавского научного общества.

Вместе с С. Банахом и В. Стожеком Серпинский пишет учебник арифметики и геометрии для первых классов гимназии, выдержавший несколько изданий до войны (после войны была введена новая программа).

Во время войны Серпинский преподавал в подпольном университете и занимался наукой, написал несколько работ. Результаты некоторых из них были тайно пересланы в Италию, где напечатаны в 1940 г. в изданиях Папской Академии. Каждая из этих заметок оканчивалась фразой: «Доказательство этих теорем смотри в изданиях Fundamenta Mathematicae».

В остальные годы оккупации, до Варшавского восстания, комплекты подпольных лекций по математике хранились в квартире Серпинского в Варшаве. Там же каждые две недели собирались друзья и знакомые Серпинского на так называемые званые субботы, где слушались последние новости, обсуждались научные вопросы. После подавления восстания в 1944 г. супруги Серпинские были вынуждены покинуть место жительства, опасаясь ареста, и унесли с собой только то, что смогли взять в руки. Дом, в котором они жили, был в конце октября 1944 г. сожжен немцами. Были уничтожены рукописи, огромная ценная библиотека, которую Серпинский собирал в течение 40 лет. Погибла также научная переписка с Н.Н. Лузиным, Г. Кантором, У. Дини, Д. Витали, А. Лебегом, А. Шёнфлисом, Г. Ханом, Э. Цермело, Ф. Хаусдорфом и многими другими. Часть своего архива Серпинский еще ранее передал в собственность Математического семинара Варшавского университета, помещение которого полностью сгорело в 1942 г.

В феврале 1945 г. Серпинский уходит пешком в Краков. Там он один семестр преподает в Ягеллонском университете, а осенью 1945 г. возвращается на кафедру в Варшаву.

Серпинский не покинул Польшу во время оккупации, хотя ему предлагали кафедру в Мадриде.

После войны Серпинский разворачивает научную деятельность, не замиравшую в условиях оккупации (кроме двух недель Варшавского восстания), заботится о новых математических изданиях, лекциях в университете и Педагогическом институте, возобновляет издание «Fundamenta Mathematicae». В 1946 г. Серпинский получает приглашение объехать с лекциями ряд университетов Швейцарии, что и было им выполнено. Весной 1947 г. он читает лекции в Сорбонне, Бордо, Риме. По приглашению университета в Праге Серпинский читает лекции в апреле 1948 г. Летом 1948 г. Серпинский прочел курс лекций в Лакхнау (Индия). В 1956–1969 годах он был главным редактором журнала “Acta Arithmetica”, возобновленного после войны.

До самой своей смерти (21 октября 1969 г.) Серпинский был признанным лидером сформированного им коллектива. Немалую роль сыграли при этом его личные качества: чуткое внимание к своим ученикам и коллегам, его обаяние.

Как пишет И.Г. Мельников, «Серпинскому принадлежит 724 публикации, в т.ч. 50 монографий, учебников и популярных книг по теории чисел, теории множеств, классическому анализу и теории функций, и по другим разделам математики. В теории множеств он получил очень много глубоких и важных результатов, особенно в проблематике, пограничной между собственно теорией множеств и математической логикой. Здесь прежде всего следует отметить изучение самим Серпинским, а затем и его многочисленными учениками обширного класса предложений, эквивалентных континуум-гипотезе Кантора и аксиоме выбора Цермело, а также геометрических следствий этой аксиомы, часто имеющих парадоксальный характер. Наряду с Н.Н. Лузиным Серпинский является создателем теории проективных множеств»[4]. Пять его книг по теории чисел и одна по теории множеств переведены на русский язык [9], [10], [11], [12], [13].

3. Серпинский и создание польской математической школы

Идею реорганизации науки в разобщенной стране, объединения польских математиков, возможность создания группы математиков на базе общей тематики, начиная с 1907 г. обсуждалась Серпинским с Зыгмундом Янишевским (1888-1920) и Стефаном Мазуркевичем (1888-1945). Янишевский обучался в Сорбонне в Париже, слушал лекция Пуанкаре, Лебега и Фреше. После защиты в 1911 г. Янишевским докторской диссертации по топологии «О неприводимых континуумах, заключенных между двумя точками», Серпинский пригласил его ассистентом во Львов. Мазуркеевич обучался в Мюнхенском и Гёттингенском университетах. Серпинский заинтересовал его темой из теории множеств «О кривых, заполняющих квадрат», по которой Мазуркевич защитил докторскую диссертацию в 1913 г. И Янишевский, и Мазуркевич были приглашены Серпинским во Львовский университет. Начавшаяся Первая мировая война прервала научные исследования, число публикаций резко сократилось.

В 1918 г. в Варшаве Серпинский застал Янишевского и Мазуркевича, которые уже читали лекции в университете. Обстановка способствовала тому, что их совместные проекты о создании национальной школы стали потенциально возможными. Янишевский имеет перед собой пример французской школы, в атмосфере которой он провел несколько лет. То же можно сказать о Серпинском и Московской школе теории функций действительного переменного. В одном случае – личность и идеи Лебега, Фреше и Пуанкаре, в другом – Егорова и Лузина. Тридцатишестилетний Серпинский вместе с только что ставшими профессорами тридцатилетними Янишевским и Мазуркевичем собирает около себя слушателей, создает научную атмосферу, в которой зарождается Варшавская математическая школа.

Серпинский, Янишевский и Мазуркевич продолжали обсуждать вопрос сплочения польских математиков. В 1919 г. Янишевский выдвинул идею о необходимости создания специального математического журнала, посвященного единой тематике: теории множеств, в которой уже работала заинтересованная молодёжь. «Появилась перспектива занятия польской математикой самостоятельной позиции, приобретения читательской аудитории, оформления сплоченной группы математиков в единую научную школу. Атмосферу математического творчества создают занятия общими темами, исследователю необходимы сотрудники: в изоляции творческий порыв будет угасать из-за отсутствия побудительных мотивов. Обособленный ученый знает намного меньше тех, кто работает совместно. До него доходят только итоги исследований, уже созревшие, оформленные идеи, зачастую по прошествии нескольких лет после их возникновения, когда они уже опубликованы. Он не знает, каким образом и из чего они возникли, не переживая этого процесса вместе с созидателями их»[17].

Fundamenta Mathematicae. Журнал под названием «Fundamenta Mathematicae» был создан в 1920 г. Смелость создания этого журнала вполне оправдала себя. Теория множеств позволяла без многолетней специализации включаться в решение многих задач математики, что увеличивало число ее приверженцев среди молодых ученых. В то же время теория множеств как наука еще не заняла должного места на страницах академических журналов, и значительная часть информации шла через переписку между учеными. Специализированный международный журнал был необходим. В первом томе были опубликованы работы только польских авторов, что диктовалось стремлением показать наличие в Польше сильной группы математиков, способных взять на себя ответственность за организацию и ведение периодического издания столь четко очерченного характера. Но «Fundamenta Mathematicae» предполагался и международным журналом. С 1920 по 1939 гг. вышло 32 номера, где было напечатано 972 работы 216 авторов. Среди иностранных авторов журнала были Н.Н. Лузин, П.С. Александров, Э. Борель, А. Лебег, А. Данжуа, Ф. Хаусдорф и другие. Основное направление журнала – теория множеств и ее приложения к геометрии (топологии), теория функций и анализ. У истоков первого номера стояли З. Янишевский как главный редактор, С. Мазуркевич и В. Серпинский, а после преждевременной смерти Янишевского от инфлюэнцы в 1920 г. руководство журналом перешло к Серпинскому, который до 1963 г. был главным редактором. На страницах «Fundamenta Mathematicae» сравнительно мало места занимают работы, посвященные «внутренним» проблемам теории множеств, в то время как большинство статей – это работы по приложениям теории множеств. Исследования по функциональному анализу в своем развитии зашли так далеко, что еще в 1929 г. эта проблематика была выделена из «Fundamenta Mathematicae» в новый специализированный журнал «Studia Mathematica». Он начал выходить во Львове, также на основных европейских языках, и в скором времени занял положение одного из ведущих в этой области журналов мира.

В «Fundamenta Mathematicae» появилось много значительных работ по другим приложениям теории множеств – к теории групп, основаниям геометрии, тригонометрическим рядам. В частности, как заметил Лебег, «теория множеств выплачивала свой долг теории тригонометрических рядов» ([21], с. 36).

Вклад журнала в развитие представляемых им областей не ограничивается только помещаемыми публикациями. Большую роль сыграл (начиная с первого тома) постоянный раздел «Проблемы», частично перешедших позже в журнал «Colloquium Mathematicum» и «Książka Szkocka» («Шотландская книга»); некоторые проблемы, решения которых до сих пор не найдены, стали классическими.

Деятельность Серпинского по организации математической школы складывается из собственной научной работы, исполнения университетских обязанностей в качестве декана философского факультета Варшавского университета (1921-1922), заведующего кафедрой математики (до 1952), кафедрой функций действительной переменной (1952-1960), научного руководителя, и работы редактора журнала «Fundamenta Mathematicae». Все коллеги и ученики Серпинского отмечают его внимание к своим сотрудникам. Н.Н. Лузин в письме к Данжуа отмечает: «Господин Серпинский – замечательный научный руководитель. Он постоянно находится в тесном контакте со своими учениками, с которыми у него наилучшие отношения и которые исключительно ценят его. Он направляет их научные идеи, дает темы для их работ, смело печатает последние и заботится обо всем, даже о материальном положении своих учеников» ([5], с. 320).

В послевоенные годы общее направление математических исследований в связи с огромными потерями в математическом сообществе Польши изменилось преимущественно в сторону вычислительной математики.

4. Исследования Серпинского по теории чисел

Теорией чисел Серпинский занимался в период 1906-1910 (результаты публиковались позже), и в 1948-1968. Эти работы содержатся в первом томе собрания его сочинений [25].

В первый период Серпинский работал в аналитической теории чисел и теории диофантовых приближений, а во второй период – элементарной теорией чисел. Первые восемь работ были написаны под непосредственным влиянием Г.Ф. Вороного. В 1906 г. Серпинский выводит формулу, позволяющую приближенно вычислять количество точек с целочисленными координатами $A(n)$ в круге $x^2 + y^2 < n$. Эта формула является усилением результата Гаусса и имеет вид $A(n) = \pi n + o(\sqrt[3]{n})$. Ее вновь доказал Э. Ландау в 1913 г. Эта же идея развита Серпинским в 1909 г. для числа точек с целочисленными координатами в шаре.

Уже первая работа Серпинского обратила на себя внимание. Эта и последующие его работы по теории чисел отреферированы и классифицированы Диксоном и Ландау [20].

На многие высказанные в первой работе идеи впоследствии есть ссылки у Г. Харди, Э. Ландау, В. Ярника, которые на Шестом съезде польских математиков подчеркнули обширную проблематику, затронутую в первых работах Серпинского.

Другая группа работ относится к элементарной теории чисел, рассматриваются вопросы делимости и сравнения, диофантовых уравнений, арифметических функций, простых чисел, аддитивной теории чисел и теории решеток.

Среди работ Серпинского его ученик А. Шинцель выделяет группу работ, касающихся пограничных проблем теории чисел и теории множеств [24], в частности, об абсолютно нормальных числах, что высоко оценил Э. Борель. В 1909 г. Борель установил на основе теории меры существование нормальных и абсолютно нормальных чисел. В 1917 г. Серпинский указал эффективный процесс построения абсолютно нормальных чисел [34]. А. Шинцель отметил также его работу «О следствии из малой теоремы Ферма» [38] (1920).

В 1960 г. [42] Серпинский выделил группу нечетных натуральных чисел k, впоследствии получивших его имя, таких, что $k2^n+1$ является составным числом для любого натурального n. Отсюда, если k – число Серпинского, то составными будут все числа вида $A_k = k2^n + 1, n \in N$. В 1960 году Серпинский показал, что существует бесконечно много таких чисел. Проблема Серпинского состоит в нахождении наименьшего числа.

Интерес Серпинского к теории чисел базировался не только на структуре теории, но и на проблемах и предположениях. Во многих его работах можно найти список нерешенных проблем и метаматематические комментарии. По теории чисел им написано 13 книг, в том числе 9 научно-популярных.

5. Исследования Серпинского по теории множеств, теории меры, топологии и другим приложениям

Эти работы почти полностью содержатся во втором (1908-1929) и третьем (1930-1966) томах его сочинений [25].

Многие важные результаты Серпинский получил, исследуя сходимость рядов и дифференцируемость функций. Он выдвинул некоторые утверждения об условной сходимости, расширил приложения целочисленных рядов [28]. Оригинально построил непрерывную функцию, которая ни в одной точке не имеет ни конечной, ни бесконечной производной [33]. Серпинский сконструировал также много других особых функций.

Теорией множеств, как уже говорилось, Серпинский начал заниматься с 1908 г., все более увлекаясь, и посвятил ей учебник [26]. (первая публикация во Львове в 1910 г.). Он первым стал читать курс теории множеств, увлек этой проблематикой учеников. Несколько его работ по общей теории множеств и теории функций действительного переменного опубликованы в журнале «Wektor» за 1912–1913 годы.

Серпинский был первым пропагандистом теории Лебега за пределами Франции, ему принадлежит первая публикация по этой теме [32].

С 1917 по 1922 гг. Серпинский глубоко интересовался проблемами топологии, что было связано с его совместной работой с Янишевским и Мазуркевичем по созданию и научной ориентации школы. С позиции топологии он рассматривал и теоретико-множественные проблемы. В частности, он получил, что ограниченное и замкнутое множество точек в пространстве m измерений, которое не может быть разложено на два замкнутых множества без общих точек, также не может быть разложено на счетное число замкнутых множеств попарно без общих точек [37].

Он занимался следующими топологическими характеристиками множеств: гомеоморфные образы отрезка (так называемые простые дуги), а затем его непрерывные образы (то есть пеановские континуумы), и нашел так называемое условие S. Другое такое условие, найденное Ханом и Мазуркевичем, – это локальная связность. Условие S было позднее исследовано Р.Л. Муром и другими, оно упоминается в трудах К. Менгера, Ф. Хаусдорфа.

В 1921 г. Серпинский дал характеристики различных замкнутых множеств (вместе с Куратовским), сформулировал несколько теорем об особых топологических мощностях. Ему принадлежит несколько примеров [28], [29] геометрических образов, в том числе так называемые кривые Серпинского: универсальная кривая Серпинского ([25], т. 2, с. 107-119), которая содержит в себе образ всякой кривой; треугольная кривая Серпинского ([25], т. 2, с. 99- 106), каждая точка которой есть точка разветвления трех либо четырех кривых (1916).. Приложения первой принадлежат Б. Кнастеру и С. Мазуркевичу, а благодаря второй П.С. Урысон пришёл к открытию интересной теоремы о точках ветвления кривых. Дальнейшее развитие этих идей принадлежит Мандельброту.

Некоторые топологические исследования Серпинского 1921 г. закладываются в фундамент образующейся тогда теории размерности. Еще до определения топологических понятий размерности Серпинский придавал понятию размерности первостепенное значение, выделял понятие «размерность нуль», а также уточнял размерности существующих множеств, а именно тех из них, которые, следуя терминологии теории размерности, называются слабоодномерными ([25], т. 2, с. 375-387), что отмечал Лебег [21]. Исследования Серпинского в этом направлении продолжил Э. Марчевский.

Большое внимание Серпинский уделял проблеме классификации множеств и функций Бэра, Бореля, Суслина и Лузина, занимался аналитическими и проективными множествами. Он предлагал различные варианты классификации, установил связи между ними ([25], т. 3, с. 113–119).

Многое для развития современного доказательства было сделано Серпинским и Лузиным. Ими рассмотрена роль неэффективного доказательства, доказательств методом диагонали Кантора, а также доказательств с привлечением трансфинитных последовательностей, аналитических множеств и понятия решета.

В начале своей деятельности Серпинский пользовался преимущественно конструктивными методами доказательства. Это было обусловлено традиционным образованием, влиянием Г.Ф. Вороного. Но после того, как в его творчество вошли задачи современной математики (начиная с 1908 г.), Серпинский убедился, что конструктивные методы порождают весьма громоздкие построения. Это демонстрируется в его работах 1911–1917 гг. В 1917 г. Серпинский сделал доклад [8] на заседании Московского математического общества об аксиоме выбора и ее связи с основными утверждениями математики, опубликовано на русском языке. Позднее, начиная с 1918 г., Серпинский осознает и обосновывает большую роль произвольного выбора как метода доказательства, и начинает широко им пользоваться. Серпинский проделал большую работу по выявлению связи теорем с тем или иным способом доказательства, а отсюда и роли этих теорем в общей теории. Способы доказательства с помощью аксиомы Цермело он оценивал как наиболее плодотворные, особенно в доказательствах существования. В сочетании со строгостью и обоснованностью предпосылок произвольный выбор становится основой всей методологии Серпинского. Им получены новые способы доказательства. Возможно, в этом и лежит секрет его плодотворной интуиции, позволившей получить много важных результатов. Этот метод был воспринят учениками Серпинского и способствовал успешному развитию теории его коллегами и учениками. Всего аксиоме выбора Серпинский посвятил 14 работ.

Совместно с Мазуркевичем Серпинский дал еще одно определение аналитических множеств как множеств тех значений, которые непрерывная функция принимает несчетно много раз ([25], т. 2, 559–566).

В 1925 году одновременно с Лузиным, но независимо от него, Серпинский открыл проективные множества, рассмотрев минимальный класс множеств, содержащий все замкнутые множества, замкнутый относительно дополнения и непрерывного образа. Этот класс совпадает с классом всех проективных множеств ([25], т. 2, с. 571–576). Лузин писал: «Я обязан Лебегу первой идеей проективного множества. Но первые публикации по этому предмету принадлежат Серпинскому» ([3], т. 2, с. 460–461). Серпинский также развивал и обобщал введенное Лузиным понятие решета, причем соединение топологических и теоретико-множественных методов обусловило появление ряда новых результатов как в работах самого Серпинского, так и в работах перенявших его метод учеников.

Работы Серпинского 1927 г. посвящены множествам значений односторонне непрерывной функции [39]. Этой проблемой занимались А.С. Безикович„ а также и С. Мазуркевич, который изучал проблемы Серпинского, относящиеся к взаимно-однозначным образам и непрерывным аналитическим дополнениям. Позднее эти результаты использовал С. Керст в теории аналитических множеств.

Многие работы Серпинского посвящены теории меры и интеграла, начиная с самых ранних работ 1911 года. Его «неизмеримое плоское множество» ([25], т. 2, с. 628–639) явилось важным контрпримером в дискуссии о повторном интегрировании, что отражено, например, в учебнике С. Сакса ([7], с. 126). Большой цикл работ Серпинского посвящен мере и измеримости в смысле Лебега, частоте линий на плоскости ([25], т. 2, с. 628-639), аппроксимативным первообразным [36], абстрактной проблеме меры ([25], т. 2, с. 761–764). Эта ёмкая проблема привлекла таких польских математиков, как Банах, Куратовский, Марчевский.

Наиболее значительным из всех исследований Серпинского, после работ по упорядочению основ теории множеств, является цикл работ двадцатых и тридцатых годов о мере и категории. Серпинский заметил, что между измеримыми функциями и функциями, обладающими свойством Бэра, существует аналогия, многие теоремы для них звучат одинаково, но доказательства для них различны и существенно сложнее для последних. Цикл исследований о сохранении свойства Бэра при отображениях и существовании взаимно однозначного соответствия между множествами меры нуль и множествами первой категории увенчала статья 1934 г. «Двойственность между первой категорией и мерой нуль» ([25], т. 3, с. 207–210). В статье доказана теорема: если верна гипотеза континуума, то существует взаимно однозначное соответствие $f(x)$ множества X всех действительных чисел на себя такое, что если E есть подмножество X первой категории, $f(E)$ есть множество меры нуль; и если E есть подмножество X меры нуль, то $f^{-1}(E)$ будет множеством первой категории.

Большие приложения имеет теорема Серпинского о счетности множества экстремумов функции.

Широко известны «парадоксы» Серпинского. В 1913 г. в нескольких работах ([29], [30], [31]) он создал примеры кривых, таких как кривая, заполняющая квадрат (вариант кривой Пеано), неквадрируемая кривая; пример поверхности, на которой каждая дуга имеет неограниченную длину. В 1914 г. вместе с Мазуркевичем он дал пример плоского множества, которое раскладывается на два подмножества без общих точек и конгруэнтно каждому из них ([25], т. 2, с. 87). В 1915 г. он построил кривую, которая в каждой точке имеет континуальный индекс ветвления ([25], т. 2, с. 107–119). Теперь она называется «ковром Серпинского» или «универсальной кривой Серпинского».

Использование контрпримера в целом характерно для богатой противоречиями истории теории множеств начала XX века, и Серпинский широко пользовался этим приемом для установления границ применимости рассматриваемой идеи. Большую роль здесь играет аксиома Цермело.

Велико число работ Серпинского по общей теории множеств. Им проведена важнейшая классификация основных теорем по их зависимости от аксиомы выбора и гипотезы континуума. Он посвятил аналитической операции A, а также другим операциям серию исследований, которые продолжили другие авторы.

Серпинский внес вклад и в исследование кардинальных и порядковых чисел [41]. Известна его работа о «недосягаемых алефах», которую он написал совместно с А. Тарским.

Что касается проблемы континуума, то кроме постановки проблем и создания ряда парадоксальных примеров, а также многочисленных статей, Серпинскому принадлежит монография «Гипотеза континуума» [40]. В ней он собрал утверждения, эквивалентные гипотезе континуума, и всесторонне оценил ее роль в архитектуре современной математики.

В 1951 г. Серпинский вновь обращается к гипотезе континуума, но теперь в ее геометрической или топологической интерпретации ([25], т. 3, с. 654–664) и также доказывает несколько эквивалентных утверждений, среди них значительное место занимает теорема “Гипотеза континуума эквивалентна существованию разложения трехмерного евклидова пространства на три множества $E_i, i = 1, 2, 3$, таких, что каждое множество E_i конечно на любой оси, параллельной $OX_i, i = 1, 2, 3$, где $OX_i, i = 1, 2, 3$ - три координатные оси”.

Здесь продолжены исследования о неизмеримых функциях, начатые еще в 1917 г. [35]; они являются также отправным пунктом для работ других ученых – К. Куратовского, Р. Сикорского (1951 г.), П. Эрдёша (1953 г.) и других.

Серпинский неоднократно высказывал мнение [22], что можно без помощи аксиомы выбора построить множество, неизмеримое по Лебегу. Например, в работе 1938 г. «Функции аддитивные, не вполне аддитивные и неизмеримые функции» ([25], т. 3, с. 380–382) он высказал предположение, что в основе такого построения лежит утверждение о существовании во множестве натуральных чисел нетривиальной нуль-единичной (двоичной) конечно-аддитивной меры. Сейчас доказана невозможность такого построения [43].

6. Заключение

Исследования Серпинского формировали пути развития всей школы. Он провел большую работу по упорядочению фундаментальных положений теории множеств в связи с аксиомой выбора и гипотезой континуума. Им обобщены многие важные теоремы, для многих из них Серпинский привел новые доказательства, чем уточнил их положение в общей теории. В некоторых случаях он установил невозможность дальнейшего обобщения. Многие другие особые множества и функции, построенные Серпинским с помощью аксиомы выбора и гипотезы континуума, оказались полезными в исследованиях меры и измеримости, категории и мощности, и послужили истоками новых исследований Варшавской школы. Результаты Серпинского стали отправным или вспомогательным пунктом работ других варшавских математиков. Важна также его педагогическая и популяризаторская деятельность, пропаганда теории множеств и теории чисел. Подробнее о творчестве Серпинского и польской математической школе см. [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидов С. С. Из ранней истории московской школы теории функций // Историко-математические исследования. 1986. 30. С. 124-130.

2. Демидов С С., Есаков В. Д. Введение // Дело академика Николая Николаевича Лузина / Отв. ред. С.С. Демидов и Б.В. Лёвшин. Санкт-Петербург: Русский христианский гуманитарный институт. 1999. С. 9-50.

3. Лузин Н. Н. Собрание сочинений в трех томах. М.: АН СССР 1958. Т. 2.

4. Мельников И. Г. Вацлав Серпинский // Историко-математические исследования. М. 1979. 24. С. 361-365.

5. Письма Н.Н. Лузина к А. Данжуа / Публикация, введение и прим. П. Дюгака. // Историко-математические исследования. М. 1978. 23. С. 314-348.

6. Письма В. Серпинского к Н.Н. Лузину / Публикация В.А. Волкова и Ф.А. Медведева // Историко–математические исследования. М. 1979. 24. С. 366-373.

7. Сакс С. Теория интеграла. М.:ИЛ. 1949.

8. Серпинский В. Аксиома Zermelo и ее роль в развитии теории множеств и в анализе (Читано на заседании Моск. мат. о-ва 21 февраля 1917 г.) // Математический сборник. 1924. 31. С. 94-128.

9. Серпинский В. Пифагоровы треугольники / Пер. под ред и с примечаниями С.И. Зетеля. М.:Учпедгиз. 1959.

10. Серпинский В. О решении уравнений в целых числах /Пер. И.Г.Мельникова. М.: Физматгиз. 1961.

11. Серпинский В. Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики / Пер., предисловие и примеч. В.А. Голубева. М: Учпедгиз. 1961.

12. Серпинский В. Что мы знаем и чего мы не знаем о простых числах / Пер. И.Г. Мельникова. М.- Л.: Физматгиз.1963.

13. Серпинский В. О теории множеств / Пер. З.З. Рочинского. М.: Просвещение. 1966.

14. Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел / Пер. с польского и предисловие И.Г. Мельникова. М.: Просвещение. 1968.

15. Синкевич Г. И. Георг Кантор & Польская школа теории множеств. СПб: Изд-во СПбГАСУ, 2012.

16. Biuletyn Archiwum Polskiej Akademii nauk Nr 43. Warszawa 2002. Materialy Wacława Sierpińskiego (1882-1969). С. 6-65.

17. Janiszewski Z. O potrzebach matematyki w Polsce // Nauka Polska. 1919. Ò.1. S. 15-18.

18. Kuratowski K. 50 tomów "Fundamenta Mathematicae" // Wiadomości Matematyczne. 1962. 6. С. 12.

19. Kuratowski K. Wacław Sierpiński. 1882-1969 // Nauka Polska. 1969. T. 17. No. 6. S. 163-172.

20. Landau E. Vorlesungen über Zahlentheorie: in 3 Bd // Bd. 2: Aus der analytischen und geometrischen Zahlentheorie. Leipzig: S. Hurzel, 1927, 1977. P. 183-188.

21. Lebesgue H. À propos d'une nouvelle revue mathématique: "Fundamenta mathematicae" // Bulletin des Sciences Mathématiques. 1922. Ser. 2. V. 46. Part. 1. P. 35-48.

22. Marczewski E. O pracach Wacława Sierpińskiego // Wiadomości Matematyczne. 1972. T. 14. S. 65-72.

23. Schinzel A. Życiorys Wacława Sierpińskiego // Wiadomości Matematyczne. 1971. T. 12. S. 303-308.

24. Schinzel A. Wacław Sierpiński's papers on the theory of numbers //Acta Arithmetica.1972. V.21. Issue.1. P. 7-13.

25. Sierpiński W. Oeuvres choisies. T. 1-3. Warszawa: PWN. T. 1. 1974. T. 2. 1975. T. 3. 1976.

26. Sierpiński W. Teoria mnogości. Lwów: Kółko matem.-fiz. Uczniów Uniw. Jana Kazimierza. 1910.

27. Sierpiński W. Sur une série de polynomes qui, ordonnée convenablement, peut représenter une fonction continue quelconque // Biuletyn Polskiej Akademii Umiejętnosci. Kraków, 1912. P. 33-43.

28. Sierpiński W. Sur une série de polynomes qui, ordonnée convenablement, peut représenter une fonction continue quelconque // Biuletyn Polskiej Akademii Umiejętnosci. Kraków, 1912. P. 33-43.

29. Sierpiński W. O powierzchni, na której każdy łuk jest nieskończenie długi // Sprawozdania z posiedzen Towarzystva Naukowego Warszawskiego. 1913. Widz. 3. T. 6. – S. 353–356.

30. Sierpiński W. O krzywych wypełniających kwadrat // Prace Matematyczno-Fizyczne. 1912. T. 25. S. 193-219.

31. Sierpiński W. Sur une courbe non quarrable // Biuletyn Polskiej Akademii Umiejętnosci, Kraków. 1913. P. 254-265.

32. Sierpiński W. Teoria miary Lebesgue'a. Lwów: Kółko matem.-fiz. uczniow Uniw. Jana Kazimierza. 1914.

33. Sierpiński W. Sur deux problèmes de la théorie des fonctions non dérivables // Biuletyn Polskiej Akademii Umiejętności. Kraków, 1914. P. 162-182.

34. Sierpiński W. Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre // Bulletin de la Societe Mathematique de France. 1917. T. 45. P. 125-132.

35. Sierpiński W. Sur quelques problèmes qui impliquent des fonctions non mesurables // Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'Academie des sciences. 1917. T. 164. P. 882-884.

36. Sierpiński W. Sur une extension de la notion de densité des ensembles // Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'Academie des sciences. 1917. T. 164. P. 995-994.

37. Sierpiński W. Pewne twierdzenie o kontynuach // Wiadomości Matematyczne. 1919. T. 23. S. 181-186.

38. Sierpiński W. Sur une conséquence du petit théorème de Fermat // Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Cracovie. A. 1920. P. 103-104.

39. Sierpiński W. Sur un ensemble fermé conduisant à un ensemble non mesurable B // Fundamenta Mathematicae. 1925. T. 7. P. 198-202.

40. Sierpiński W. Hypothése du continu. Warszawa, Lwów: z subwencji Funduszu Kultury Narodowey, 1934. (Monografie matematyczne, T. 4).

41. Sierpiński W. Cardinal and ordinal numbers. Warszawa: PWN. 1958.

42. Sierpiński W. Sur un problème concernant les nombres $k2^n + 1$ // Elem. Math. (15) 1960. P. 73-74. Corrigendum. Ibidem (17) 1962.P. 85.

43. Solovay R. M. A model of set theory in which every set is Lebesgue measurable // Annals of Mathematics Studies. Princeton University, New Jersey.

REFERENCES

1. Demidov, S. S. Iz rannej istorii moskovskoj shkoly teorii funkcij (From the Early History of the Moscow School of Function Theory)// Istoriko-matematicheskie issledovaniya. 1986. 30. S. 124-130.

2. Demidov, S. S., Esakov V. D. Vvedenie (Introduction)// Delo akademika Nikolaya Nikolaevicha Luzina (Case of Academician Nikolai Nikolaevich Luzin) / Otv. red. S.S. Demidov, B.V. Lyovshin. Sankt-Peterburg: Russkij hristianskij gumanitarnyj institut, 1999. S. 9-50. C. 38.

3. Luzin, N. N. Sobranie sochinenij v trekh tomah (Collected works in three volumes). M.,1958. T. 2.

4. Mel'nikov, I.G. Waclaw Sierpinski // Istoriko-matematicheskie issledovaniya. M. 1979. 24. S. 361-365.

5. Pis'ma N.N. Luzina k A. Danjoy (N.N. Luzin's letters to A. Danjoy)/ Publikaciya, vvedenie i prim. P. Dugac // Istoriko-matematicheskie issledovaniya. M., 1978. 23. S. 314-348.

6. Pis'ma V. Serpinskogo k N.N. Luzinu (W. Sierpiński's letters to N.N. Luzin) / Publikaciya V.A. Volkova i F.A. Medvedeva // Istoriko–matematicheskie issledovaniya. M., 1979. 24. S. 366-373.

7. Saks, S. Teoriya integrala (Theory of the integral). M.:IL. 1949.

8. Sierpiński, W. Aksioma Zermelo i ee rol' v razvitii teorii mnozhestv i v analize. The Zermelo axiom and its role in the development of set theory and in analysis (Chitano na zasedanii Mosk. mat. o-va 21 fevralya 1917 g.) // Matematicheskij sbornik. 1924. 31. S. 94-128.

9. Sierpiński, W. Pythagorean Triangles / Per. pod red i s primechaniyami S.I. Zetelya. M.: Uchpedgiz. 1959.

10. Sierpiński, W. O reshenii uravnenij v celyh chislah (On solving equations in integers)/ Per. I.G.Mel'nikova. M.: Fizmatgiz. 1961.

11. Sierpiński, W. Sto prostyh, no odnovremenno i trudnyh voprosov arifmetiki (One Hundred Elementary but Difficult Problems in Arithmetic)/Per., predislovie i primech. V.A. Golubeva. M: Uchpedgiz, 1961.

12. Sierpiński, W. Chto my znaem i chego my ne znaem o prostyh chislah (What We Know and What We Do Not. Know of Prime Numbers)/Per. I.G. Mel'nikova. M., L.: Fizmatgiz, 1963.

13. Sierpiński, W. O teorii mnozhestv (On the set theory)/ Per. Z.Z. Rochinskogo. M.: Prosveshchenie. 1966.

14. Sierpiński, W. 250 zadach po elementarnoj teorii chisel (250 Problems in Elementary Number Theory) /Per. s pol'skogo i predislovie I.G. Mel'nikova. M.: Prosveshchenie. 1968.

15. Sinkevich, G. I. Georg Cantor & Pol'skaya shkola teorii mnozhestv (Georg Cantor & Polish set theory school). SPb: Izd-vo SPbGASU, 2012.

16. Biuletyn Archiwum Polskiej Akademii nauk Nr 43. Warszawa 2002. Materiały Wacława Sierpińskiego (1882-1969). C. 6-65.

17. Janiszewski, Z. O potrzebach matematyki w Polsce / Z. Janiszewski // Nauka Polska. 1919. Ò. 1. S. 15-18.

18. Kuratowski, K. 50 tomów "Fundamenta Mathematicae" // Wiadomości Matematyczne. 1962. N 6. C. 12.

19. Kuratowski, K. Wacław Sierpiński. 1882-1969 // Nauka Polska. 1969. T. 17. No. 6. S. 163-172.

20. Landau, E. Vorlesungen über Zahlentheorie: in 3 Bd // Bd. 2: Aus der analytischen und geometrischen Zahlentheorie. Leipzig: S. Hurzel, 1927, 1977. P. 183-188.

21. Lebesgue, H. À propos d'une nouvelle revue mathématique: "Fundamenta mathematicae" // Bulletin des Sciences Mathématiques. 1922. Ser. 2. V. 46. Part. 1. P. 35-48.

22. Marczewski, E. O pracach Wacława Sierpińskiego // Wiadomości Matematyczne. 1972. T. 14. S. 65-72.

23. Schinzel, A. Życiorys Wacława Sierpińskiego // Wiadomości Matematyczne. 1971. T. 12. S. 303-308.

24. Schinzel, A. Wacław Sierpinski's papers on the theory of numbers //Acta Arithmetica (1972). Volume: 21, Issue: 1, page 7-13.

25. Sierpiński, W. Oeuvres choisies. T. 1-3. Warszawa: PWN, 1974-1975. T. 1. 1974. T. 2. 1975. T. 3. 1976.

26. Sierpiński, W. Teoria mnogości. Lwów: Kółko matem.-fiz. Uczniów Uniw. Jana Kazimierza. 1910.

27. Sierpiński, W. Sur une série de polynomes qui, ordonnée convenablement, peut représenter une fonction continue quelconque // Biuletyn Polskiej Akademii Umiejętnosci. Kraków, 1912. P. 33-43.

28. Sierpiński, W. Sur une série de polynomes qui, ordonnée convenablement, peut représenter une fonction continue quelconque // Biuletyn Polskiej Akademii Umiejętnosci. Kraków, 1912. P. 33-43.

29. Sierpiński, W. O powierzchni, na której każdy łuk jest nieskończenie długi // Sprawozdania z posiedzen Towarzystva Naukowego Warszawskiego. 1913. Widz. 3. T. 6. S. 353-356.

30. Sierpiński, W. O krzywych wypełniających kwadrat // Prace Matematyczno-Fizyczne. 1912. T. 25. S. 193-219.

31. Sierpiński W. Sur une courbe non quarrable // Biuletyn Polskiej Akademii Umiejętnosci, Kraków. 1913. P. 254-265.

32. Sierpiński, W. Teoria miary Lebesgue'a. Lwów: Kółko matem.-fiz. uczniow Uniw. Jana Kazimierza. 1914.

33. Sierpiński, W. Sur deux problèmes de la théorie des fonctions non dérivables // Biuletyn Polskiej Akademii Umiejętności. Kraków, 1914. P. 162-182.

34. Sierpiński, W. Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre // Bulletin de la Societe Mathematique de France. 1917. T. 45. P. 125-132.

35. Sierpiński, W. Sur quelques problèmes qui impliquent des fonctions non mesurables // Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'Academie des sciences. 1917. T. 164. P. 882-884.

36. Sierpiński, W. Sur une extension de la notion de densité des ensembles // Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'Academie des sciences. 1917. T. 164. P. 995-994.

37. Sierpiński, W. Pewne twierdzenie o kontynuach // Wiadomości Matematyczne. 1919. T. 23. S. 181-186.

38. Sierpiński, W. Sur une conséquence du petit théorème de Fermat // Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Cracovie. A. 1920. P. 103-104.

39. Sierpiński, W. Sur un ensemble fermé conduisant à un ensemble non mesurable B // Fundamenta Mathematicae. 1925. T. 7. P. 198-202.

40. Sierpiński, W. Hypothése du continu. Warszawa, Lwów: z subwencji Funduszu Kultury Narodowey, 1934. (Monografie matematyczne, T. 4).

41. Sierpiński, W. Cardinal and ordinal numbers. Warszawa: Państwowe wydawnictwo Naukowe, 1958.

42. Sierpinski, W. Sur un problème concernant les nombres $k2^n + 1$ // Elem. Math. (15) 1960. P. 73-74. Corrigendum. Ibidem. (17) 1962. P. 85.

43. Solovay, R. M. A model of set theory in which every set is Lebesgue measurable // Annals of Mathematics Studies. Princeton University, New Jersey.

Получено: 24.02.2023
Принято в печать: 12.09.2023