

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 3.

УДК 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-263-288

Вариационное исчисление в целом: рождение, становление, приложения¹

А. В. Боева, Р. Р. Мухин

Боева Анна Вячеславовна — (г. Старый Оскол).*e-mail: mukhin@mail.ru***Мухин Равиль Рафкатович** — доктор физико-математических наук, Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» (г. Старый Оскол).*e-mail: mukhin@mail.ru***Аннотация**

Работа посвящена эволюции понятий и методов вариационного исчисления в целом — раздела математики, возраст которого составляет немного более столетия. Предметом этой области является изучение качественных характеристик вариационных задач. В развитии вариационного исчисления в целом можно выделить несколько периодов с присущими каждому из них чертами. Первый период определим с конца XIX в. до конца 1940-х гг., когда происходит рождение и становление теории, которая сложилась из двух главных частей — теории Морса и теории категорий Люстерника-Шнирельмана. Здесь еще заметно выступают черты традиционной математики. В следующий период — с конца 1940-х до конца 1970-х гг. вариационное исчисление в целом сформировалась как отдельная область математики, и она обрела свою современную форму, основанную на понятиях и методах алгебраической топологии. Открылись широкие возможности для решения новых задач математики и был получен целый ряд впечатляющих результатов. Современный период можно определить с конца 1970-х гг. до настоящего времени. Главной его чертой является невиданное ранее сближение математики и области ее приложений, особенно с физикой. Не всегда стало возможным указать различимую границу между обеими областями науки, появился даже термин «физическая математика». Вариационное исчисление в целом входит в качественную теорию, представляющей значительную часть современной математики и находит широкие применения в приложениях. Но ее место еще более значительно, оно составляет одну из основ, формирующей наше мировоззрение.

Ключевые слова: критическая точка, экстремаль, геодезическая линия, топология, категория.

Библиография: 71 название.

Для цитирования:

А. В. Боева, Р. Р. Мухин. Вариационное исчисление в целом: рождение, становление, приложения // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 3, с. 263–288.

¹Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект 20-011-00402 А).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 3.

UDC 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-263-288

Calculus of variations in the large: birth, formation, applications

A. V. Boeva, R. R. Mukhin

Boeva Anna Vyacheslavovna — (Sary Oskol).*e-mail: mukhiny@mail.ru***Mukhin Raviľ Rafkatovich** — doctor of physical and mathematical sciences, Ugarov Sary Oskol Technological Institute (branch) National University of Science and Technology “MISiS” (Sary Oskol).*e-mail: mukhiny@mail.ru***Abstract**

The work is devoted to the evolution of the concepts and methods of the calculus of variations in the large, a branch of mathematics that is a little over a century old. The subject of this area is the study of qualitative characteristics of variational problems. In the development of the calculus of variations in the large several periods can be distinguished with features inherent in each of them. The first period is defined from the end of the 19th century, until the end of the 1940s, when the theory was born and formed, which was formed from two main parts - the Morse theory and the theory of Lyusternik-Shnirelman categories. Here, the features of traditional mathematics are still noticeable. In the next period - from the end of the 1940s to the end of the 1970s, the calculus of variation in the large was formed as a separate area of mathematics, and it acquired its modern form, based on the concepts and methods of algebraic topology. Ample opportunities opened up for solving new problems in mathematics, and a number of impressive results were obtained. The modern period can be defined from the late 1970s, until now. Its main feature is the unprecedented convergence of mathematics and the field of its applications, especially with physics. It has not always been possible to indicate a distinguishable boundary between the two fields of science; even the term "physical mathematics" has appeared. The calculus of variations in the large is included in the qualitative theory, which represents a significant part of modern mathematics and finds wide applications. But its place is even more significant, it is one of the foundations that forms our worldview.

Keywords: critical point, extremal, geodesic line, topology, category.

Bibliography: 71 titles.

For citation:

A. V. Boeva, R. R. Mukhin, 2023, “Calculus of variations in the large: birth, formation, applications”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 263–288.

Введение

В экстремальных задачах, обобщением которых является вариационное исчисление, как, может быть, ни в одном другом разделе классического анализа, в одинаковой степени присутствуют и органически сочетаются качественные и количественные черты. С одной стороны все множество объектов (траектории, поверхности и т.д.), с другой – длины, площади и другие количественные характеристики. С появлением топологии вариационные задачи предстают под новым обликом. Применение топологических методов привело к созданию нового раздела

– вариационного исчисления в целом, предметом которого является изучение качественных характеристик вариационных задач – существование экстремалей, оценка их числа, оценка числа критических точек и т.д. в зависимости от топологических свойств многообразия. Один из первых топологических результатов такого характера принадлежит Дж.К. Максвеллу.

Джеймс Клерк Максвелл, как, наверно, никто из физиков XIX в. глубоко постиг математику своего времени. Особенно его интересовали геометрические задачи, и он основательно познакомился с трудами К.Ф. Гаусса, Г. Монжа и других математиков [1]. Геометрии были посвящены первые работы Максвелла, начиная с 14 лет, среди них весьма любопытная статья об изгибании поверхностей [2]. Интерес к задачам геометрии у Максвелла сохранился до конца жизни, что, наверно, исходит из его понимания места и значения математики. В статье, посвященной памяти М. Фарадея, Максвелл писал:

«Ни одна точная наука не может развиваться без математики. Но не следует считать, что вычисления и уравнения составляют всю математику. Вычисления являются лишь частью математики. Геометрия положения дает пример раздела математики без *единого вычисления*» [3. Р.360].

Здесь надо напомнить, что под *analysis situs* (анализ положения) до XX в. понимали топологию. Максвелл заглядывал далеко вперед, предвидя, какое место займет качественный анализ. В этой связи заслуживает внимания работа Максвелла *On hills and Dales* (1870) [4]. В начале Максвелл поясняет редакторам *Philosophical Magazine*, что часть полученных им результатов была предугадана А. Кэли в его работе 1859 г. [5]. В статье [4] отчетливо проявляется присущая Максвеллу способность находить математические закономерности в самых разных объектах реального мира. Максвелл установил, что в гористой местности, лишенной плоских участков, между числом вершин, низин, перевалов и других элементов рельефа существуют определенные соотношения, имеющие общий характер. Один из полученных результатов утверждает, что, если обозначить через P число вершин, F – число долин, L – число русел рек и ручьев, то

$$P + F - L = 1$$

Если рассмотреть остров что-то вроде айсберга, т.е. учитывая подводную часть, то в точности получится эйлерова характеристика – важнейший топологический инвариант. До сих пор сказанное относится к предыстории. История вариационного исчисления в целом начинается с А. Пуанкаре.

А. Пуанкаре

Вся математическая деятельность Анри Пуанкаре была главным образом направлена на решение одной задачи – интегрированию дифференциальных уравнений. Решение дифференциальных уравнений представляет важнейшую задачу с самого начала создания анализа бесконечно малых, и до конца жизни Пуанкаре не прекращал поиски подходов к этой главной задаче. И здесь он оставил целую россыпь идей, создал новые области и направления, которые в значительной степени определяют современный облик математики. Одной из таких идей является предложенный Пуанкаре подход к вопросам интегрирования, в основу которого положены периодические решения [6]. Идея заключается в том, что, если такие решения плотно заполняют какую-то область, то с их помощью можно будет изучить свойства других решений, и периодические решения приобретают большое теоретическое значение. При реализации своей идеи Пуанкаре столкнулся с большими трудностями. Чтобы избавиться от несущественных деталей, он рассмотрел самую простую динамическую задачу, сведя изучение периодических движений к задаче о геодезических потоках на выпуклых поверхностях (1905) [7].

Геодезический поток представляет собой обобщение математической модели движения материальной точки на гладкой поверхности и не подверженной действию внешних сил. Замкнутые геодезические играют ту же роль, что и периодические решения в проблеме трех тел. Геодезические линии составляют предмет развитой теории, и они восходят к К.Г. Якоби [8], Г. Дарбу [9], Ж. Адамару [10]. Якоби проинтегрировал в квадратурах уравнение геодезической на трехосном эллипсоиде, и с удовлетворением писал Ф.В. Бесселю, что ему удалось получить замечательно простые формулы [11.S. 385]. Дарбу внес заметный вклад в некоторые разделы геометрии, и, изучая геометрию поверхностей, он искал ответ на вопрос о поверхностях, на которых все геодезические будут замкнутыми. Адамар интересовался геодезическими потоками на поверхностях отрицательной кривизны. Его работа [10] явилась предтечей того раздела теории динамических систем, которая получила название гиперболической теории. Работа Адамара [10] примечательна в том отношении, что в ней впервые была обнаружена важная характеристика сложного поведения динамических систем, известная как чувствительная зависимость от начальных условий. Кроме того, Адамар дал оценку снизу числа замкнутых геодезических на замкнутом многообразии, что явилось исторически первым шагом вариационного исчисления в целом.

Перейдем к работе Пуанкаре [7], явившейся тем импульсом, которая привела к созданию этой области. Пуанкаре предложил несколько подходов для решения задачи о замкнутых геодезических. Идея заключалась в том, чтобы, исходя из многообразия M_1 , для которого задача имеет точное решение, изучить геодезические на многообразии M , близкого к M_1 . В качестве исходного многообразия выбиралась двумерная сфера. Эта поверхность имеет постоянную кривизну и геодезическими являются дуги большого круга. Пуанкаре рассмотрел поверхность, близкую к сфере – сфероид. Задача о геодезических имеет непосредственное отношение к принципу наименьшего действия, из которого следуют уравнения классической механики. Пуанкаре выражает кинетическую энергию T , входящую в функцию Лагранжа, через функции E , F , G первой квадратичной формы

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

и полагает, что для поверхности, мало отличающейся от сфероида

$$T = T_0 + \mu T_1,$$

где μ – малый параметр, можно применить теорию возмущений. Пуанкаре разлагает величины по степеням параметра μ с точностью до второго порядка. Замкнутые геодезические связаны с периодическими функциями. Пуанкаре выделяет некоторую функцию R , ее минимальным и максимальным значениям соответствуют изолированные точки, значениям минимакса – двойные точки, и приходит к выводу, что максимальные, минимальные и минимаксимальные значения R соответствуют максимальным, минимальным и минимаксимальным значениям полной длины кривых C . Точками минимакса он называет точки, в которых равны нулю производные первого порядка от функции двух переменных, но не имеет места ни максимум, ни минимум. Далее Пуанкаре ссылается на свой труд по качественной теории дифференциальных уравнений [12], где в третьем мемуаре рассматривается распределение особых точек и получено обобщение эйлеровой характеристики

$$N + F - C = 2 - 2p, \quad (1)$$

Здесь C – число седел, N – число узлов, F – число фокусов, p – род поверхности. Тогда для сфероида общее число изолированных точек (максимумов и минимумов) превосходит на два число минимаксов. Полное число замкнутых геодезических является нечетным и наименьшим будет три. Отсюда знаменитая задача о трех геодезических, восходящая еще к Якоби. На

обыденном языке эту задачу можно сформулировать следующим образом. Если имеется гладкий камень, то растянутое резиновое колечко можно на него надеть по крайней мере тремя различными способами так, чтобы оно не соскальзывало. Якоби установил, что на любом эллипсоиде существуют по крайней мере три несамопересекающихся замкнутых геодезических [8]. Результаты Пуанкаре для сфероидов можно обобщить, поставив задачу о существовании по крайней мере трех таких геодезических на гладком римановом многообразии, гомеоморфном двумерной сфере. Эта задача явилась предметом исследований последующих поколений математиков. Результаты Пуанкаре справедливы для невырожденного случая. Пробел общности из-за вырожденных критических точек был восполнен позже уже другими.

Пуанкаре получил свои результаты с точностью до второго порядка малости по параметру μ . Для преодоления ограниченности своего подхода он поставил задачу строгого доказательства существования замкнутых геодезических, для которого он предложил метод аналитического продолжения. Пуанкаре исходил из идеи, что метрика поверхности g_μ непрерывно зависит от μ и при $\mu = 0$ строго устанавливается существование замкнутой геодезической, как, например, на сфере или эллипсоиде. Он пытался доказать, что, когда при варьировании параметра μ возникает семейство замкнутых геодезических, новые геодезические получаются аналитическим продолжением по μ . Пуанкаре утверждает, что таким путем устанавливается существование по крайней мере одной замкнутой геодезической на выпуклой поверхности без двойных точек, и число таких геодезических всегда нечетно [7].

Подход Пуанкаре, не всегда строгий и четкий, вызвал критику. Так, М. Морс приводит контрпример для случая с эллипсоидом [13,14]. Требуется доказательство самой возможности аналитического продолжения замкнутых геодезических и существование семейства геодезических при изменении метрики. Строгое обоснование подхода Пуанкаре было сделано в последующие десятилетия. Но следует отдать должное основателю новой области. Роль Пуанкаре заключается не только в решении конкретных задач. Большее значение имеет постановка новых вопросов и указание путей для их разрешения, причем выдвигаемые идеи часто оказывались совершенно нетривиальными и далеко отходили от существовавшей математической традиции. По словам Морса:

«Пуанкаре был первопроходцем, который создавал теорию макроанализа, и является тем математиком, который наиболее эффективно применил эту теорию» [13.Р.III].

Дж. Биркгоф

Джордж Биркгоф был главным последователем Пуанкаре и питался его идеями. Он вместе с Пуанкаре является основателем теории динамических систем. Сказанное относится и к вариационному исчислению в целом. Исходным пунктом для Биркгофа явилась идея Пуанкаре об аппроксимации любого движения динамических систем с помощью периодических движений, которые в исследованиях Биркгофа заняли центральное место. Это привело его, с одной стороны, к доказательству геометрической теоремы Пуанкаре [15], с другой – к изучению замкнутых геодезических. Биркгофу удалось восполнить недостатки подхода Пуанкаре в доказательстве существования геодезических. Главные результаты изложены им в большой работе 1917 г. [16], посвященной динамическим системам с двумя степенями свободы. Двумерные системы являются простейшими неинтегрируемыми системами и они выделяются еще в том отношении, что небольшая размерность позволяет эффективно привлекать для их исследования и другие разделы, такие как риманова геометрия в целом.

Основным и очень важным методом изучения геодезических у Биркгофа является предложенный им принцип минимакса [16,17]. Этот принцип утверждает, что, если у m -линейно связанной аналитической функции в n -мерном пространстве при некоторых условиях имеется

l точек минимума, тогда будет иметься по меньшей мере $m + l - 1$ точек минимакса.

Биркгоф свел задачу о геодезических к исследованию критических точек. Еще в *Новых методах небесной механики* при исследовании периодических движений Пуанкаре столкнулся с существенной трудностью, когда параметр μ меняется в промежутке $\mu_0 \leq \mu \leq \mu_1$ и μ уже не является малым. В этом случае характер движения может качественным образом измениться. Например, периодическое движение может перейти в решение с бесконечно большим периодом. Биркгоф рассмотрел замкнутую ломаную линию, составленную из дуг, каждая сторона которой является геодезической, и выбрал ее длину в качестве исследуемой функции $F(x)$. Он установил, что при непрерывной зависимости от параметра μ $F(x)$ будет равномерно ограниченной, т.е. устраняются движения с бесконечно большим периодом, и на многообразии, гомеоморфном сфере, существует хотя бы одна замкнутая геодезическая. Результаты Биркгофа относятся к системам с двумя степенями свободы. В дальнейшем он обобщил эти результаты для произвольных размерностей. Принцип минимакса Биркгофа явился исходным пунктом в построении теории Морса и теории Люстерника-Шнирельмана. Обе эти теории исходят из общего подхода, который заключается в следующем. Для рассматриваемой функции (или функционала) f задается поверхность уровня $f = c$ и при прохождении через критическую точку $c = c_k$ область меньших значений $f \leq c$ претерпевает топологические изменения. Таким образом, определяется связь между критическими точками и топологическими характеристиками области определения, информация об одном дает возможность делать какие-то выводы о свойствах другого. Однако реализация этой программы у М. Морса и, с другой стороны, у Л.А. Люстерника и Л.Г. Шнирельмана была различной.

М. Морс

Марстон Морс, ставший PhD в 1917 г. под руководством Биркгофа, создал носящую его имя теорию, которая явилась основой вариационного исчисления в целом. Теория Морса является грандиозным обобщением классической теории экстремума теории функций многих переменных. В 1920-е гг. набирала силы американская математическая школа, она тогда дала целый ряд ярких имен: О. Веблен, Дж. Биркгоф, С. Лефшец, Дж. Александер, Н. Винер. Здесь же находится и М. Морс. Главные результаты Морса изложены в трех его работах [13,18,19]. Последняя из них, появившаяся в 1934 г., стала первой монографией в рассматриваемой области, хотя она не охватила всего предмета. Морс возвращался к дальнейшему развитию своей теории в течение всей жизни.

В первой из этих работ [18], представленной Американскому математическому обществу в декабре 1923 г., приведены основные представления этой теории. Здесь Морс развил теорию критических точек, но еще не касался вариационного исчисления, он оценивал число аналитически различных критических точек. Кроме принципа минимакса, исходным пунктом для Морса явился результат Биркгофа, связывающий критические точки с топологией многообразия. Этот результат Морс представил в форме

$$M_1 \geq M_0 + R_1 - 2,$$

где M_0 и M_1 – число минимумов и точек минимакса соответственно, R_1 число Бетти (ранг группы гомологий).

Результаты Биркгофа дали лишь толчок исследованиям Морса, и дальше он идет собственным путем. Поначалу в [18] Морс исходит из функции, заданной на многообразии в евклидовом пространстве n измерений, но в дальнейшем, в своей монографии [13] уже рассматривает конечномерное риманово пространство. Итак, пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – гладкая функция, заданная на компактном многообразии M с локальными координатами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ в римановом пространстве. Точка P на M , где первые производные $f'_x|_P = 0$, называются кри-

$$Hf = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right|_p \neq 0,$$
$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = f(p) - z_1^2 - z_2^2 - \dots - z_\lambda^2 + z_{\lambda+1}^2 + \dots + z_n^2$$

Одной из черт математики XX в. является беспрецедентный синтез идей, методов, аппаратного оснащения различных разделов, при этом границы между самими разделами становятся расплывчатыми. В рассматриваемые годы это особенно отчетливо проявляется в теории динамических систем и в теории Морса. Для последней такой синтез осуществляется с привлечением классического анализа (поскольку критические точки рассматриваются локально), геометрии и топологии. Большая часть объемистой статьи [18] посвящена получению следствий из главного результата теории Морса, который заключается в следующем [18.Р.392-393;13.Р.143]:

$$\begin{aligned} M_0 &\geq R_0 \\ M_0 - M_1 &\leq R_0 - R_1 \\ M_0 - M_1 + M_2 &\leq R_0 - R_1 + R_2 \\ &\dots\dots\dots \\ {}^n M_n &= R_0 - R_1 + \dots + (-1)^n R_n \end{aligned} \tag{2}$$

У Морса постоянно в поле зрения находились вариационные задачи, представлявшие главный объект для приложения развитой им теории. Морс ставит задачу глобального исследования геодезических на многообразии. Функциональным пространством Ω здесь будет пространство кривых C . Функция Морса f представляется функционалом J , чаще всего в форме

$\int_C F(x, (\dot{x}))dt$. Для замкнутых геодезических на многообразии M обычно используют функционалы длины

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j} dt$$

или действия

$$S(\gamma) = \int_{\gamma} L(x, \dot{x}, t) dt,$$

где $L(x, \dot{x}, t)$ – функция Лагранжа.

Критические точки J соответствуют экстремалам, и Морс установил конечность множества типовых точек для экстремалей, соединяющих две точки на многообразии M , или замкнутых экстремалей. Главный результат Морса заключается в теореме:

Теорема. Если $N_0, N_1, \dots$ – критические множества экстремалей и $P_0, P_1, \dots$ – числа Бетти, то выполняются неравенства [13.Р.225]

$$\begin{aligned} N_0 &\geq P_0 \\ N_0 - N_1 &\leq P_0 - P_1 \\ N_0 - N_1 + N_2 &\geq P_0 - P_1 + P_2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{3}$$

что полностью аналогично соотношениям (2). Соотношения (4) при определенных условиях дают возможность оценки снизу числа экстремалей.

Теория Морса сразу получила признание математического сообщества. Показательным является приглашение Морса выступить с пленарным докладом на IX Международном конгрессе математиков в 1932 г. в Цюрихе [22].

Л.А. Люстерник и Л.Г. Шнирельман

Лазарь Аронович Люстерник и Лев Генрихович Шнирельман являются яркими представителями московской математической школы. С самого начала своей деятельности Люстерник проявлял острый интерес к применению методов топологии к классическим областям математики, к таким как геометрия и вариационное исчисление. Этот путь и привел его к вариационному исчислению в целом.

Начало было положено в 1927 г. вместе со Шнирельманом, который тогда был еще аспирантом. К этому времени уже была опубликована одна из главных работ Морса [18], вошедшая в основания вариационного исчисления в целом. В отличие от Морса, подход Люстерника и Шнирельмана носит главным образом геометрический характер. Та часть вариационного исчисления в целом, которая получила название теория Люстерника-Шнирельмана, была развита в серии статей [23-25 и др.], итог подведен в двух больших работах [26,27], вышедших в 1930 и в 1947 гг. отдельными изданиями. Первые результаты были изложены Люстерником в его докладе на VIII Международном конгрессе математиков в Болонье в 1928 г. [23]. Хотя доклад идет под одной фамилией, Люстерник в самом начале указывает, что вся работа была выполнена совместно со Шнирельманом. Перейдем к результатам.

Сначала вводится понятие топологического класса $[A]$ замкнутых множеств в компактном пространстве M . Если совокупность замкнутых множеств содержит множество A , то она содержит и все те множества, которые получаются из A при помощи деформаций. Если на M задана функция f , то на каждом множестве A некоторого топологического класса она

достигает своего максимального значения $\max f$. Нижняя грань этих максимумов на всем топологическом классе множеств A является поверхностью уровня C функции f . Была доказана теорема, что на каждой поверхности уровня $f = C$ содержится по крайней мере одна особая точка, т.е. такая точка, где $df = 0$ (принцип особой точки). Ближайшей задачей стало отыскание таких точек, и их число определялось с помощью нового топологического инварианта – категории.

Категория является центральным понятием теории Люстерника—Шнирельмана. Они дают следующее определение:

«Замкнутое множество A , расположенное в компактном пространстве, будем называть первой категорией относительно этого пространства, если оно может быть сведено к точке при помощи деформации R .

Замкнутое множество будем называть категорией k относительно R , если оно может быть разбито на k замкнутых частей (могущих пересекаться), каждая из которых является первой категории относительно R . Будем писать: $\text{cat} R A = k$ » [26.С.19].

Тогда, согласно этому определению, внутренность круга будет первой категории относительно любого содержащего его пространства, в частности относительно себя самой, сфера произвольного числа измерений – второй категории относительно себя самой, $\text{cat}(S_n) = 2$, категория замкнутого многообразия с p ручками $\text{cat}(\Sigma p) = 3, p \geq 1$. Любая гладкая функция имеет по меньшей мере число критических точек, равное категории. Категория позволяет посмотреть на проблему критических точек под другим ракурсом, чем теория Морса, и позволяет найти предел числа критических точек для любой гладкой функции и в вырожденном случае. Если в дискретном случае вырождение может сниматься при наложении возмущения, то в ситуации, когда критические точки образуют непрерывное множество, это уже становится несправедливым.

Категория оказалась трудно вычислимым инвариантом. Потребовалось подробное изучение ее свойств, обобщений, введения новых инвариантов (комбинаторная категория, псевдокатегория и др.). Был получен следующий важный результат, имеющий множество приложений, в частности, для оценки числа решений вариационных задач. Рассматривалось многообразие R , содержащее хотя бы одно множество категории k . В R определяются топологические классы $[A_1], [A_2], \dots, [A_k]$, где $[A_i]$ – класс всех множеств категории $\geq i$ ($1 \leq i \leq k$), и имелась упорядоченная система особых точек функции f $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_k$, принадлежащих соответствующим топологическим классам. Было доказано, что при некоторых условиях, когда имеет место равенство значений особых точек $c_i = c_j$ ($j > i$), существует континуум категорий больше или равно числу $j - i + 1$ особых точек, в которых $f = c_i = c_j = c$. На замкнутом многообразии M^n существует число критических точек с различными критическими значениями не меньше, чем величина категории $\text{cat}_{M^n} M^n$. Так, функция f на торе имеет по крайней мере три геометрически различные особые точки.

Развитые топологические методы можно было использовать для нахождения решений экстремальной задачи и оценки числа геометрически различных критических точек. Естественно было обобщить эти результаты на функциональный случай. Были рассмотрены задачи об экстремумах интегралов от положительных функций, определенных для семейства кривых, в частности, для задачи о геодезических линиях; сделано обобщение – определено понятие категории для семейства линий, и затем это понятие было использовано для построения теории замкнутых геодезических; доказано несколько предложений, касающихся замкнутых геодезических – о семействах геодезических, покрывающих поверхность, об угловых точках и др. При слиянии критических значений образуются бесконечные семейства экстремалей. Причем применяемые методы можно было использовать и для других вариационных задач, касающихся несамопересекающихся экстремалей. Однако главным результатом явилось доказательство гипотезы Пуанкаре о трех геодезических: на всякой замкнутой дифференцируемой поверхности рода 0 существует по крайней мере три замкнутых несамопересекающихся геодезических

[25,26].

Этот результат произвел сильное впечатление на научное сообщество. Надо сказать, что теория Люстерника-Шнирельмана быстро получила международное признание. Этому способствовало то, что первое сообщение о новых методах было сделано на таком представительном собрании, как Международный конгресс математиков, а также публикации в зарубежных изданиях. Вообще период до 1930-х гг. был очень благоприятным для нашей математики. Постоянной практикой были зарубежные поездки, длительные командировки, другие контакты. На конгрессе в Болонье в 1928 г. советская делегация включала 27 человек, в том числе молодых математиков. Так, за два года до этого Люстерник лишь защитил кандидатскую диссертацию. Положение стало меняться с началом 1930-х гг. На следующий IX конгресс в Цюрихе делегация состояла уже из 4 человек, включая одного аппаратчика. Последней крупной встречей для наших математиков была представительная топологическая конференция в Москве в 1935 г. А уже на X конгресс в Осло в следующем году, несмотря на персональные приглашения, не поехал никто. Контакты все сокращались и вскоре практически прекратились.

Работы Люстерника и Шнирельмана по созданию своей теории являются не приглаженными, имеются пробелы в доказательствах. Такое вообще свойственно работам первопроходцев. Это относится и к Пуанкаре, и к Биркгофу, и к Морсу. Так, у Морса [13] оценка алгебраического числа замкнутых геодезических на римановом многообразии, гомеоморфном n -мерной сфере, не имела строгого обоснования. Этот пробел был восполнен А.С. Шварцем в 1960 г. [28]. Тем не менее, сам результат Морса остается верным. Недочеты теории Люстерника-Шнирельмана были устранены лишь в конце 1980-х 1990 гг. С созданием теории Морса и теории Люстерника-Шнирельмана завершился первый этап вариационного исчисления в целом.

Р. Том, Р. Ботт, С. Смейл и другие

На следующем этапе развития, который определим с конца 1940-х до конца 1970-х гг., его главным содержанием является глубокое проникновение понятий и методов алгебраической топологии. Это было не просто переформулировкой на новом языке известных результатов, а новая форма придала теории существенно новое содержание, что открыло новое поле возможностей для развития самого вариационного исчисления в целом, так и использование его для решения новых задач из разных областей математики. Персонажи, названные в заголовке, были яркими представителями нового поколения топологов.

Ф. Клейн в своей книге [29] выделяет две линии в развитии математики, A и B , которые то сменяют одна другую, то выступают одновременно и независимо, то тесно переплетаются. Линия A тяготеет к разделению отдельных областей, к их самостоятельному развитию. Идеалом здесь является выкристаллизованное, логически замкнутое в себе построение каждой отдельной области. Для линии B характерно стремление к единству, нахождение органических связей между разными областями, понимания с единых позиций. Сказанное относится и к нашему предмету. До 1950-х гг. развитие вариационного исчисления в целом следовало в основном линии A , и главный вклад сюда внесли сами основатели этой области. Положение стало меняться к 1950м годам и продолжить нашу историю надо с Р. Тома. Рене Том – видный представитель французской топологической школы, тогда только начинал свою деятельность. При построении своей теории Морс использовал теорию гомологий, но все же его подход был больше аналитическим, чем топологическим. Том сделал первый шаг в переформулировке теории Морса на современный топологический язык и связал теорию Морса с теорией динамических систем в небольшой заметке (1949) [30], которая не привлекла тогда большого внимания. Идеи Тома были оценены позже, когда в нашей истории выступила фигура С. Смейла. Том исходит из дважды дифференцируемой функции на комплексном

многообразии M и вводит на нем риманову метрику. Далее он рассматривает градиентные потоки $X(x) = \text{grad} f$. Векторное поле X определяет группу гомеоморфизмов G . Критические точки M_i , для которых $X = 0$, являются инвариантными при преобразовании G . Том показал, что многообразие M можно представить в виде клеточного комплекса, к которому можно применить сложившиеся методы алгебраической топологии. Каждой невырожденной критической точке индекса λ соответствует клетка, размерность которой равна индексу данной критической точки, а число клеток равно числу критических точек. Работа Тома явилась частью программы для дальнейшего развития теории Морса.

Дальнейшее связано с именем американского математика венгерского происхождения Рауля Ботта. Его первая работа была навеяна инженерной электротехнической задачей, и настолько впечатлила Г. Вейля, что он пригласил Ботта в Институт высших исследований в Принстоне [31]. В Принстоне тогда работали А. Эйнштейн, Г. Вейль, Дж. фон Нейман, С. Лефшец, Дж. Александер, Н. Стинрод, М. Морс. Ботт углублял свои познания в топологии и изучал теорию Морса по его монографии [13]. Сам Морс стремился расширить свою теорию во всех возможных направлениях. Изначально Морс использовал топологические методы, развитые к 1920-м годам, и исходил из лекций О. Веблена, опубликованных в 1922 г. К 1950-м годам топология была уже совсем другой. Ботт сразу осознал, что переформулировка теории Морса на новом уровне сделает ее более простой для понимания и откроет дальнейшие перспективы. В итоге усилиями Тома, Ботта, Смейла, Милнора появилась новая формулировка теории Морса, сохраняющая свое значение до настоящего времени. Основное ее содержание можно выразить с помощью двух теорем [32,33]:

Теорема А. Пусть f – гладкая функция на компактном многообразии M , обозначим через $M(c)$ подмногообразие M , на котором для всех точек $p \in M$ $f(p) \leq c$. Тогда, если $[a, b]$ не содержит критических точек, $M(b)$ и $M(a)$ диффеоморфны.

Теорема В. Если в области $[a, b]$ имеется только одна критическая точка с индексом λ , то $M(b)$ диффеоморфно многообразию, которое получается из $M(a)$ с помощью приклеивания клетки размерности λ .

Другими словами, M имеет гомотопический тип клеточного комплекса, в которой каждой критической точке с индексом λ соответствует одна клетка размерности λ . Теоремы А и В открывают самый простой путь к неравенствам Морса, для чего используются теперь стандартные методы алгебраической топологии.

Новая форма вариационного исчисления в целом дало новое понимание и открыло новые возможности. Сказанное можно сравнить, к примеру, с тем, как переход от обычного формализма классической механики к формализму аналитической механики привел к новому видению и к открытию новых горизонтов. Переформулированная теория Морса оказалась мощным инструментом для решения самых разных задач. Начало было положено двумя работами Ботта [34,35]. В первой из них рассматривалось, как теорию Морса можно использовать для изучения геометрии компактных групп Ли. Еще более значительной является вторая работа [35], в которой Ботт доказал свою знаменитую теорему периодичности.

Мотивация здесь была следующей [36]. Вычисление гомотопических групп, в частности, таких, как группы Ли, является одной из самых важных и трудных задач топологии. Поначалу для случая малых размерностей это удавалось сделать с помощью относительно простых геометрических методов. В 1955 г. для некоторых гомотопических групп было показано, что имеет место цикличность. Например, группа $\pi_{10}(SU(n))$ циклична с периодом 3. Однако через два года вычисления Ф. Хирцебруха и А. Бореля показали, что порядок этих групп равен двум. Возникшее противоречие и подтолкнуло Ботта к его собственным изысканиям, что привело его к теореме периодичности [35].

Ботт нашел устойчивые гомотопические группы классических групп Ли, используя теорию Морса. Он исходил из того, что функционал действия имеет бесконечное число критических

точек, которые соответствуют геодезическим, соединяющих две точки. Далее он рассмотрел минимальные геодезические на унитарных группах и показал, что устойчивые гомотопические группы периодичны с периодом 2, $\pi_{k-1}(U) = \pi_{k+1}(U)$. Используя тот же самый метод для ортогональных и симплектических групп, Ботт установил, что в этом случае устойчивые гомотопические группы также периодичны, но их период равен 8. Так, для ортогональной группы $\pi_k O(n) = \pi_{k+8} O(n)$. Очень интересный факт: мир высших размерностей в некоторых отношениях, оказывается, похож на то, что имеет место в низших, проливая таким образом некоторый свет на устройство систем в высших измерениях.

Эти результаты оказались совершенно неожиданными и, по словам М. Атья, произвели ошеломляющее впечатление [36]. Теорема периодичности привела к далеко идущим последствиям в самых разных направлениях. Вот одно из них: эта теорема легла в основу К-теории, из которой в свою очередь родилась теория индекса Атья-Зингера – одно из крупнейших достижений математики XX в.

Новый уровень развития теории Морса связан с исследованиями самого именитого ученика Ботта – Стивена Смейла, сделавшего следующий важный шаг в реализации программы, намеченной Томом. Начало было положено, когда М. Пейксото ввел Смейла в круг идей теории динамических систем и здесь важное место занимает структурная устойчивость. Понятие структурной устойчивости появилось в 1937 г. в работе А.А. Андропова и Л.С. Понтрягина [37]. У структурно устойчивых динамических систем топологическая структура фазовых траекторий не меняется при малых изменениях дифференциальных уравнений. У Смейла получили дальнейшее развитие идеи Тома [30], с которым он тесно общался. Смейл ясно осознал, что именно на языке топологии задачи теории динамических систем предстают в наиболее простом виде. По его собственным словам, в самой концепции структурной устойчивости сидит «дух» топологии, и это было решающим, что привлекло его внимание к динамическим системам [38.Р.22]. В 1960 г. появилась наиболее интересная для наших целей работа Смейла о неравенствах Морса [39]. Между теорией Морса и структурной устойчивостью имеется глубокое внутреннее единство. В критических точках (точки бифуркации) динамическая система становится структурно неустойчивой и претерпевает качественную перестройку. В 1933 г. Андронов выдвинул программу исследований динамических систем: как при изменении параметров меняется топологическая структура разбиения фазовой плоскости на интегральные кривые и каковы бифуркационные значения параметров [40]? В работе [39] Смейл рассмотрел класс динамических систем (системы Морса-Смейла), которые фактически являлись распространением программы Андропова на многомерный случай, и это имело далеко идущие последствия. Определение этих систем по существу совпадает с условиями Андропова-Понтрягина для структурно устойчивых систем, за исключением условия об отсутствии сепаратрис, идущих из седла в седло. Его заменило условие трансверсального пересечения сепаратрис, очень общее и удобное представление на языке современной топологии. Смейл доказал обобщенные неравенства Морса, что позволяет установить связь между динамическими характеристиками систем Морса-Смейла и топологическими свойствами многообразия. В частности, Смейл устранил недостатки в доказательстве Тома классических неравенств Морса. Полученные результаты привели к впечатляющему следствию, они позволили Смейлу доказать гипотезу Пуанкаре для $n > 4$: всякое замкнутое n -мерное многообразие с гомотопическим типом n -мерной сферы S^n , гомеоморфно n -мерной сфере [41,42].

Но работа Смейла [41] содержала значительно больше. Она претендовала на охват всего мира динамических систем. Смейл полагал, что всякое замкнутое многообразие систем Морса-Смейла образует открытое и плотное подмножество на компактном дифференцируемом многообразии. Системы Морса-Смейла являются структурно устойчивыми, это позже было доказано Ж. Палисом и С. Смейлом [43,44]. Самим Смейлом было показано, что любую систему можно аппроксимировать системами Морса-Смейла [45]. Программа Андропова в его школе исчерпывающим образом была реализована для двумерных систем, для которых

структурная устойчивость представляет типичное свойство, и поведение таких систем является регулярным. Опыт изучения двумерных систем наталкивал на мысль, что развитые для их описания представления могут быть справедливыми и в многомерном случае. Эту программу он и пытался реализовать. В основе лежала идея, восходящая еще к античности и не потерявшая привлекательности до настоящего времени: мир устроен просто и в его основе лежат простые законы. По мысли Смейла, устройство многомерных динамических систем в главном подобно устройству двумерных систем. Топологическая энтропия систем Морса-Смейла равна нулю, они относятся к системам с «простым поведением». Однако действительность оказалась значительно более сложной и многообразной. Вскоре сам Смейл обнаружил, что в многомерном случае системы Морса-Смейла не являются типичными, они не составляют плотного множества [46,47] – факт фундаментальной важности. В первой из упомянутых работ Смейл описал ставшую знаменитой подкову Смейла – исторически первую модель системы со сложным поведением. Именно такое поведение является типичным в многомерном случае. Указанные работы явились поворотным пунктом, положившим начало не только новому этапу развития теории динамических систем, но и в понимании устройства мироздания.

Механика и физика

К 1970-м годам сформировался новый облик вариационного исчисления в целом. Топология придала развитию предмета мощный импульс. При этом еще более углубились связи с приложениями, в первую очередь с теоретической физикой и это взаимодействие приобрело нетрадиционные черты. Поэтому определим с конца 1970-х гг. новый этап развития рассматриваемой области, который продолжается до настоящего времени.

Физика всегда была питательной почвой для математики (до XIX в. эту роль выполняла механика). Физические построения создавались на языке математики, математика была способом понимания, для решения физических задач использовался математический инструментарий. Квантово-релятивистская революция ввела в обиход физики риманову геометрию, функциональный анализ, теорию групп. Топологии здесь еще нет, она развивалась параллельно с теоретической физикой, хотя у некоторых физиков уже присутствуют построения топологического характера. Показательным в этом отношении является работа П. Дирака о магнитном монополе (1931) [48]. Топологические конструкции неизбежно появляются там, где возникают нетривиальные эффекты, связанные с магнитным полем, с особенностями, полями сложного топологического характера (поля Янга-Миллса, абрикосовские вихри, квантовый эффект Холла, жидкие кристаллы и др.). Особенности в объектах физики совсем не редкость, и они могут иметь ключевое значение (сингулярности гравитационного поля, гравитационный коллапс, сингулярности сечения реакций при испускании глюонов, особые точки в теории фазовых переходов и т.д.).

Программа исследования систем классической динамики методами топологии была намечена Смейлом (1970) [49]. Традиционный подход к интегрированию уравнений динамики заключался в сведении задачи к квадратурам, и этот путь давно уже исчерпал свои возможности. В общем случае вследствие теоремы Пуанкаре о несуществовании алгебраических интегралов задача в прежней постановке является принципиально неразрешимой, подавляющее большинство задач относится к неинтегрируемому типу. Но даже в относительно редких случаях интегрируемых систем приходится сталкиваться с огромными техническими трудностями. Отсюда необходимость глобального анализа. В таком анализе топологическим методам и теории критических точек отводится важнейшее место.

В механике и физике теория критических точек изначально занимает главенствующее место. Но здесь уже чаще всего имеем дело с бесконечномерным случаем. В основе и классической, и квантовой физики лежит принцип наименьшего действия. Так, в механике Лагранжа система характеризуется функцией Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$, определенной на касательном рассло-

нии конфигурационного пространства. Тогда траекториям движения соответствует экстремум функционала действия $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$. Вариационные принципы совершенно естественно связаны с теорией критических точек.

Первое приложение теории категорий к задачам механики дает Люстерник [27]. Он показал, что при движении системы материальных точек по n замкнутым поверхностям и взаимодействующих по любому закону, лишь бы существовала потенциальная функция, имеется не менее $n + 1$ положений равновесия, отвечающих различным уровням потенциальной функции. Сюда примыкает очень важная задача небесной механики, которая вот уже три столетия привлекает пристальное внимание - задача об относительных равновесиях в проблеме n тел. При $n = 3$ первые результаты принадлежат еще Л. Эйлеру и Ж.Л. Лагранжу. Положения относительного равновесия соответствуют критическим точкам потенциальной функции, рассматриваемой в проективном пространстве. Американскому математику Дж. Палмору, используя теорию Морса, удалось пролить новый свет на проблему. Он нашел новые положения относительного равновесия в проблеме 4-х тел [50]. В общем случае, несмотря на все усилия, вопрос остается открытым.

В своей программе [49] Смейл ставит задачу изучения топологии некоторого отображения I фазового пространства T механической системы в линейное пространство $W, I : T \rightarrow W$. Отображение I является прямым произведением отображения, определяемого полной энергией, и отображения, которое обобщает момент импульса, т.е. компоненты I представляют первые интегралы. Таким образом, интегральные многообразия $I_w = I^{-1}(w)$ обладают тем свойством, что траектории, проходящие через точки $v \in I_w$, целиком находятся в I_w . И в глобальном отношении очень важным инвариантом этой траектории является топологический тип I_w , как, например, можно сопоставить траекториям точки v числа Бетти I_w , когда $v \in I_w$. Главный вопрос заключается в том, при каких значениях $w \in W$ изменяется топологический тип I_w . Другими словами, в первую очередь следует сосредоточиться на нахождении бифуркационного множества $\Sigma \subset W$. Отсюда ясно определяющее значение критических точек.

Задача механики переводится теперь на язык топологии: конфигурационное пространство представляет C^∞ -многообразие M , фазовое пространство – его касательное расслоение $T = T(M)$ и проекция π – отображение $T \rightarrow M$. Кроме того, задана гладкая функция L – лагранжиан на T . В гамильтоновой механике конфигурационное пространство M задается вместе с гамильтонианом $H : T^* \rightarrow R$ на кокасательном расслоении $T^* = T^*(M)$. Инструменты топологии нашли применение в самых разных задачах [49, 51, 52].

Особое место занимает нахождение периодических решений, чему уделяли пристальное внимание еще Дж. Хилл, А. Пуанкаре, Дж. Биркгоф. Периодические решения не просто простейшие после положений равновесия решения, они позволяют подойти к более сложным случаям. Ближайшими задачами были установление существования периодических движений, исследования ветвления функционалов действия на пространстве замкнутых кривых и вопросов устойчивости.

Существование периодических движений сводится к вопросу нахождения замкнутых геодезических на римановом многообразии. Другой важный вопрос – существование и нахождение точек либрации. Все эти результаты воплощались в конкретных задачах механики: проблеме трех тел, изучение колебаний n -звенного маятника, вращения твердого тела с неподвижной точкой и др. В частности, были найдены достаточные условия неустойчивости вертикального равновесия n -звенного маятника с колеблющейся точкой подвеса [52]. Заметим, что даже задача о движении простого маятника с колеблющейся точкой подвеса совершенно нетривиальна.

Особое значение имеет изучение интегрируемых систем, на их основе можно рассматривать более сложные задачи [53]. В интегрируемых системах существует полный набор независимых интегралов в инволюции. Установление неинтегрируемости гамильтоновых систем в большинстве случаев основывается на идеях Пуанкаре, что сложное поведение несовместимо с

существованием независимых аналитических интегралов. Такое поведение демонстрируют системы с наличием большого числа периодических движений и трансверсальным пересечением асимптотических поверхностей. Были найдены топологические препятствия к интегрируемости. Если род многообразия M отличен от 0 и 1, то уравнения движения не имеют первого аналитического интеграла [52]. Еще одним препятствием к интегрируемости является ветвление решений, что препятствует появлению однозначных интегралов.

Традиционный способ перехода от лагранжева формализма к гамильтоновому состоит в использовании преобразования Лежандра. Но гамильтонова механика может формулироваться независимо от механики Лагранжа посредством симплектической геометрии, дифференциальных форм и алгебры Ли [54]. Механика Лагранжа выступает тогда как частный случай. Использование классической теории критических точек (Морса и Люстерника-Шнирельмана) требует положительно определенного функционала действия, что в общем гамильтоновом формализме далеко не всегда выполняется. Это побудило провести обобщение классической теории, и в итоге появилась важная работа С.П. Новикова [55], где развит аналог теории Морса для многозначных функционалов на пространстве замкнутых контуров на сфере S^2 . Такое обобщение открыло путь к целому ряду интересных физических задач [56,57].

В своих лекциях по математической физике Г. Кирхгоф рассмотрел задачу о движении твердого тела в идеальной жидкости с потенциальным течением и получил уравнения, носящие его имя [58]. Удобное представление этих уравнений было дано А. Клебшем и интегрируемые случаи изучались рядом математиков (А. Клебш, Г. Кирхгоф, В.А. Стеклов и др.) [59]. Из уравнений Кирхгофа и исходил Новиков во впечатляющих приложениях своего обобщения теории Морса [56,57,60]. Он показал, что движение заряженной частицы на поверхности сферы S^2 с римановой метрикой $g_{\alpha\beta}(x)$ в потенциальном поле $U(x)$ и в эффективном поле $F(x)$ математически эквивалентно уравнениям типа Кирхгофа. Эффективное магнитное поле, к примеру, представляет поле монополя Дирака. К уравнениям типа Кирхгофа удастся также привести уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой и уравнения Леггета для сверхтекучего He^3 , классические случаи неинтегрируемых систем. При этом открывается путь к целому ряду других задач: феноменологическая теория сверхтекучести He^3 на основе формализма Гинзбурга-Ландау, топологические свойства поверхности Ферми и др. Теория Морса нашла применение при исследовании спонтанного нарушения симметрии в кристаллах. В точке фазового перехода может оказаться термодинамически выгодным переход в состояние с более низкой симметрией. На основе теории фазовых переходов Ландау были изучены особенности термодинамического потенциала $F(\phi)$, который является функционалом параметра порядка ϕ , что и позволило изучить нарушение симметрии [61].

Перейдем к фундаментальной физике. Распространено утверждение, что в числе главных составляющих математики XX в. будет все более тесное взаимодействие с квантовой теорией поля и все более усиливающееся использование физиками геометрических представлений. Причем такое движение предполагается двусторонним, стимулирует получение новых результатов в самой математике. Такие заметные события, как открытие инстантонных решений уравнений Янга-Миллса [62] и монополя Полякова-т'Хуфта [63], произошли при участии топологов.

Современная модель объединения фундаментальных взаимодействий основывается на калибровочной теории, которая, как и общая теория относительности, имеет геометрический характер. В математическом отношении калибровочная теория является теорией связностей в векторном расслоении. Квантовые поля, играющие роль переносчика взаимодействий, представляют линейные связности на этих расслоениях. Гравитационное поле характеризуется метрическим тензором пространства-времени и его кривизной определяется напряженность поля.

Калибровочная теория является главным кандидатом для понимания мира элементарных частиц. Основная трудность заключается в нелинейности уравнений Янга-Миллса, представ-

ляющих по существу обобщение уравнений теории электромагнетизма Максвелла на случай неабелевой калибровочной теории. Главным расчетным аппаратом квантовой физики является теория возмущений, однако для многих задач она оказывается недостаточной и постоянно предпринимаются попытки развития непертурбативных методов.

Поэтому значительный интерес представляет получение хотя бы качественной информации, и здесь изучение математических структур занимает важное место. В этом контексте надо отметить работы М. Атья и Р. Ботта [64,65], которые посвящены геометрии полей Янга-Миллса. Уравнения Янга-Миллса можно рассматривать для любого риманова многообразия и они связаны с определенной компактной группой Ли. Атья показал [64], что у функционала Янга-Миллса, который играет роль действия в вариационном принципе, с группой $SU(2)$ имеются только минимумы, но не критические точки с более высоким индексом. В другой работе совместно с Боттом [65] он установил с помощью теории Морса особенности полей Янга-Миллса на компактной римановой поверхности.

Следующий наш сюжет связан с именем американского физика и математика Эдварда Виттена, у которого целый ряд выдающихся достижений, Виттен стал первым физиком, удостоенным медали Филдса. Эту самую престижную награду для математиков Виттен получил за доказательство фундаментального физического утверждения – о положительности энергии в общей теории относительности.

Нас будет интересовать другая работа Виттена [66], которая явилась совершенно неожиданным развитием программы Тома-Смейла теории Морса. После этой работы Виттена под новым обликом предстала не только теория Морса, а открылась новая страница во взаимодействии математики и физики, новый подход к задачам чистой математики вообще. Идея заключается в привлечении физических соображений и решенных задач теоретической физики для доказательства собственно математических утверждений. Каноны математической строгости и доказательности были установлены только в XIX в. До этого границы между собственно математическими и физическими утверждениями были довольно расплывчаты. Полагаем, что Л. Эйлер и Ж.Л. Лагранж не придавали особого значения различию аналитической механики и отдельно ее математической структуры. Поэтому говорить о названной качественно новой черте взаимодействия математики и физики для того времени представляется неправомерным. Речь также не идет об импульсе придаваемой математике физическими запросами, это традиционная область. Существенно новая черта взаимодействия математики и физики конца XX в. заключается в том, физические результаты непосредственно входят в математические построения в задачах чистой математики. Показательной является работа английского математика С. Дональдсона [67,68]. Дональдсон положил инстантонные решения уравнений Янга-Миллса в основу построения нового топологического инварианта для классификации 4-х мерных многообразий и показал, что существуют гомеоморфные, но не диффеоморфные многообразия, и их нельзя различить традиционными топологическими методами. Этот результат можно сравнить с ситуацией, сложившейся в XIX в., когда были обнаружены непрерывные, но не дифференцируемые функции, что привело математический мир в состояние растерянности [69.С.26]. У Дональдсона все было доказано по принятым в математике канонам строгости. Работа Дональдсона была удостоена медали Филдса, что можно считать своеобразной формой институционализации физической математики.

В упомянутой работе [66] Виттен раскрыл новые черты современной квантовой теории. При этом ему удалось не только связать критические точки многообразия с группой гомологий, но восстановить всю гомологическую структуру самого многообразия. В основу Виттен положил идеи суперсимметрии. Симметрия в физике формулируется на языке какой-либо группы преобразований, действующей на состояние системы. Суперсимметричная квантовая теория утверждает наличие симметрии при взаимообмене бозонов и фермионов. Оказалось, что конструкция Виттена в математическом отношении давно известна – это когомологии Ходжа-де Рама, которые задаются гармоническими формами. Гильбертово пространство H_1

разделяется на бозонную и фермионную части $H_1 = H_1^B \oplus H_1^F$. Чтобы все это связать с теорией Морса, нужно рассмотреть риманово многообразие M размерности n и V_p - пространство p -форм ($p = 0, 1, \dots, n$), p -формы относятся к бозонным и фермионным состояниям в зависимости от того, являются они четными или нечетными. Следующий шаг заключается в нахождении связи суперсимметричной алгебры с операторами внешнего дифференцирования d и кодифференцирования d^* . Тогда можно определить операторы суперсимметрии $Q_1 = d + d^*$, $Q_2 = i(d - d^*)$ и лапласиан $\Delta = dd^* + d^*d$. Эти операторы удовлетворяют соотношениям

$$Q_1^2 = Q_2^2 = H, Q_1 Q_2 + Q_2 Q_1 = 0, [Q_{1,2}, H] = 0$$

Операторы Q_1 и Q_2 действуют соответственно на бозонные и фермионные состояния. Поскольку здесь присутствуют коммутаторы и антикоммутаторы, эти соотношения образуют супералгебру Ли.

Для построения гомологий нужно определить группу цепей C_q и граничный оператор $\partial : C_q \rightarrow C_{q-1}$. Когомологии Ходжа-де Рама основаны на гармонических формах коцепных комплексов гладких многообразий. Главный результат заключается в том, что пространство когомологий Ходжа-де Рама изоморфно пространству гармонических форм соответствующей степени. Виттен ввел функцию Морса, используя деформированные операторы

$$d_t = e^{-ft} d e^{ft}, d_t^* = e^{ft} d^* e^{-ft},$$

где f – гладкая функция на M , t – параметр. Тогда

$$Q_{1t} = d_t + d_t^*, Q_{2t} = i(d_t - d_t^*).$$

Доказательство неравенств Морса проводилось с помощью анализа спектра оператора $H_t = d_t d_t^* + d_t^* d_t$, который отождествляется с гамильтонианом системы. Виттен показал, что, используя деформированный лапласиан, можно построить группы когомологий. Как побочный результат получаются неравенства Морса. Спектр H_t имеет специфические особенности, он радикально упрощается при больших значениях параметра t . Вблизи критической точки Виттен ввел локально евклидову систему координат, тогда H_t аппроксимируется выражением

$$H_t \approx H_{1t} = \sum_i \left(-\frac{\partial^2}{\partial \varphi_i^2} + t^2 A \varphi_i^2 + tB \right),$$

представляющим гамильтониан гармонического осциллятора с добавочным членом. Его собственные значения концентрируются вблизи критических точек, которые на языке физики идентифицируются с основными состояниями. Далее Виттен при построении комплекса когомологий опять использует физический подход - идею квантовомеханического туннелирования для классически запрещенного перехода между критическими точками, $p \rightarrow q$. Числа Бетти R_p равны числу линейно независимых p -форм. Виттен установил, что число критических точек с индексом Морса p $M_p \geq R_p$ – неравенства Морса. Граничный оператор, отвечающий за переход $p \rightarrow q$ получает неожиданную физическую интерпретацию.

Шаг, сделанный Виттеном, устанавливает новые отношения математики с физикой. Через несколько лет после появления работы Виттена [66] американский физик Л. Альварес-Гауме, используя тот же самый подход, доказал теорему об индексе Атья-Зингера (1983) [70,71]. Входит в употребление термин «физическая математика». Еще рано говорить, что сложилось новое поле взаимодействия математики и физики. Подход остается предметом дискуссий, порой приобретающих острую форму. Во всяком случае, открываются новые возможности. Насколько велик их потенциал, покажет будущее.

Заключение

Вариационное исчисление в целом представляет молодую область математики, это детище XX в. Оно прошло свой исторический путь развития, и здесь выделяется несколько этапов со своими специфическими чертами.

Первый этап определим с конца XIX в. до конца 1940-х гг., это время зарождения и становления теории. Побудительным мотивом зарождения новой области явилось изучение классической вариационной задачи о геодезических, ее различные аспекты и обобщения. И к постановке, и к решению задач с самого начала привлекаются топологические идеи, особенно это проявляется у А. Пуанкаре – основателя топологии. Его результаты и поставленные им вопросы явились питательной почвой для следующего поколения математиков Дж. Биркгофа, М. Морса, Л.А. Люстерника, Л.Г. Шнирельмана. Именно в работах этих математиков сложилась новая область, главными частями которой являются теория Морса и теория Люстерника-Шнирельмана. В обеих теориях, исходя из топологических понятий, были развиты общие методы изучения критических точек гладких многообразий и на этой основе решены различные задачи. Хотя обе теории исходят из топологических понятий, в них еще сильно проступают черты традиционной математики.

На следующем этапе – конец 1940-х – конец 1970-х гг. – происходит полноценное и систематическое формирование области на основе алгебраической топологии. Вариационное исчисление в целом принимает свой современный облик. Реализация этой программы была осуществлена главным образом Р. Томом, Р. Боттом и С. Смейлом. Открылось целое поле возможностей для решения новых задач из разных разделов математики. Был получен целый ряд глубоких и нетривиальных результатов.

О дальнейшем развитии вариационном исчислении в целом следует говорить в контексте вообще математики конца XX в., поскольку в рассматриваемой области выступают все главные тенденции. В период 1940-х – 1960-х годов в математике доминировала тенденция, известная как линия Гильберта с ее акцентированием внимания на решении конкретных задачи и на вопросах обоснования. На это время приходится расцвет программы Бурбаки, разрабатывается аксиоматика, в частности, топология уже обогатилась аксиоматикой теории гомологий Стинрода–Эйленберга. Такое движение было закономерным и необходимым, новые математические инструменты должны были обрести твердую почву. Хотя результаты К. Геделя и парадоксы теории множеств сделали очевидным наличие пределов для логических построений, идеология линии Гильберта не может исчезнуть, без этого нет самой математики. Однако под воздействием прежде всего значительно возросших потребностей приложений постепенно происходит переориентация курса. На первый план выступает линия Пуанкаре, резонирующая с главными сюжетами, диктовавшими ход математической мысли. Наступила новая фаза в развитии математики. Ее начало можно отнести к 1970-м годам и она продолжается до настоящего времени. Вариационное исчисление в целом представляет неотъемлемую часть современной математики, и сказанное в полной мере относится и к нему.

Линия Пуанкаре означала смену приоритетов, когда интенсифицируется сближение и объединение различных разделов, осознается ограниченность четко поставленных и полностью разрешимых задач, на первый план выступают геометрические представления, акцентируется внимание на осмыслении теорий. Качественной теории отводится одна из главных ролей. Имеет место настолько тесное сближение с физикой, что в некоторых областях становятся трудно различимыми границы между математикой и теоретической физикой. Взаимодействие между ними приобретает многообразные формы, среди которых направление, получившее название физической математики. Нацеленность на прагматические цели отнюдь не исчерпывают главного содержания математики рассматриваемого периода. Проводимые исследования высветили в качестве побочного эффекта вопросы принципиального характера. Среди них и те, которые непосредственно связаны с качественной теорией. Изменилось понимание того, какие

вопросы можно задавать, пришло осознание ограниченности слишком точных решений, что и ошибочные утверждения могут быть конструктивными. Появились указания о границах применимости качественного описания. Эволюция качественной теории открывает путь для философских обобщений. Можно сказать, что качественная теория представляет не просто язык и инструмент для решения задач, а способ видеть и понимать вещи.

Авторы выражают свою благодарность Вл.П. Визгину за плодотворные дискуссии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Campbell L., Garnett W. The life of James Clerk Maxwell. L.: MacMillan and Co., 1882. 342 p.
2. Maxwell J.C. On the transformations of surfaces by bending // The scientific papers of James Clerk Maxwell. Ed. W.D. Niven. V. 1. N.Y.: Dover Publ., 1965. Pp. 80-114.
3. Maxwell J.C. Faraday // The scientific papers of James Clerk Maxwell. Ed. W.D. Niven. V. 2. N.Y.: Dover Publ., 1965. Pp. 355-360.
4. Maxwell J.C. On Hills and Dales // The scientific papers of James Clerk Maxwell. Ed. W.D. Niven. V. 2. N.Y.: Dover Publ., 1965. Pp. 233-240.
5. Cayley A. On Contour and Slope Lines // Phil. Mag. 1859. V. XVIII. Pp. 264-268.
6. Мухин Р.Р. О теореме Пуанкаре-Биркгофа как важнейшем результате теории динамических систем // Чебышев. сб. 2022. Т. 23. № 1. С. 209-222.
7. Poincaré, H. Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes // Trans. AMS. V. 6. Pp. 237-274.
8. Jacobi C.G. Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und der verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen Substitution // Crelles J. 1839. V. 19. S. 309-313.
9. Darboux G. Leçon sur la théorie des surfaces. 3 partie. Paris: Gauthier-Villars, 1894.
10. Hadamard J. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques // J. Math. pures et appl. 1898. V. 4. Pp. 27-73.
11. Briefe Jacobi's an Bessel // C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke. 7 B. Berlin: Druck und Verlag von Georg Reiner. 1891. S. 377-386.
12. Poincaré H. Memoire sur les courbes définies par une équations differentielle // J. math. pures et appl. Sér. 3. 1881. V. 7. P. 375-422; 1882. V. 8. P. 251-296; Sér. 4. 1885. V. 1. P. 167-244; 1886. V. 2. P. 151-217. Рус. пер.: Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.: ГИТТЛ, 1947. 392 с.
13. Morse M. The calculus of variations in the large. N.Y.: AMS, 1934. 360 p.
14. Погребыский И.Б. О геодезических линиях на выпуклых поверхностях // Анри Пуанкаре. Избр. труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 982-983.
15. Birkhoff, G.D. An extension of Poincare's last geometric theorem // Acta. Math. 1926. V. 47. Pp. 297-311.
16. Birkhoff, G.D. Dynamical systems with two degrees of freedom // Trans. AMS. 1917. V. 18. Pp. 199-300 / G.D. Birkhoff. Coll. math. papers. V. 2. N.Y.: AMS, 1950. Pp. 1-102.

17. Birkhoff G.D. Dynamical Systems. Providence, Rhode Island: AMS, 1927. IX + 295 p. / Рус. пер.: Дж. Биркгоф Динамические системы / Пер. с англ. Ижевск: РХД, 1999. 408 с.
18. Morse M. Relations between the critical points of a real function of n independent variables // Trans. AMS. 1925. V. 22. Pp. 84-110.
19. Morse M. The foundations of a theory of the calculus of variations in the large // Trans. AMS. 1928. V. 30. Pp. 213-274.
20. Lefschetz S. Continuous transformations of manifolds // Proc. National Acad. Sci. 1925. V. 11. Pp. 290-292.
21. Hopf H. Vectorfelder in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten // Math. Ann. 1926. V. 96. S. 225-251.
22. Morse M. The calculus of variations in the large // Mat. Congr. Zurich, 1932. Pp. 173-188.
23. Lusternik L. Sur quelques méthodes topologiques dans la géométrie différentielle // Acti. Congr. Inter. Mat. Bologna. 1928. V. 4. Pp. 291-296.
24. Lusternik L., Schnirelmann L. Sur un principe topologique en analyse // Comp. Rend. 1929. V. 188. Pp. 295-298.
25. Lusternik L., Schnirelmann L. Existence des trois géodésiques fermées sur toute surface de genre 0 // Comp. Rend. 1929. V. 188. Pp. 269-271.
26. Люстерник Л.А., Шнирельман Л.Г. Топологические методы в вариационных задачах. М.: Госиздат, 1930. 68 с.
27. Люстерник Л.А., Шнирельман Л.Г. Топологические методы в вариационных задачах и их приложения к дифференциальной геометрии поверхностей // УМН. 1947. Т. 2. В. 1(17). С. 166-217.
28. Шварц А.С. Топология пространств замкнутых кривых // Тр. ММО. 1960. Т. 9. С. 3-44.
29. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. М.: Наука, 1987. 435 с.
30. Thom R. Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété // Comp. Rend. 1949. Т. 228. Pp. 973-975.
31. Tu L.V. The life and works of Raoul Bott // The founders of index theory. Ed. S.-T. Yau. Somerville, MA: Int. Press, 2003. Pp. 85-112.
32. Bott R. Morse theory indomitable // Publ. Math. IHES. 1988. V. 68. Pp. 99-114.
33. Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965. 186 с.
34. Bott R. An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups // Bull. SMF. 1956. V. 84. Pp. 251-281.
35. Bott R. The stable homotopy of the classical groups // Ann. Math. 1959. V. 70. N 2. Pp. 313-337.
36. Atiyah M. Obituary Raoul Bott // Bull. London Math. Soc. 2010. V. 42. Pp. 170-180.
37. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14. № 5. С. 247-252.

-
38. Smale S. Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio // *Chaos Avant-Gard*. Singapore: World Sci., 2000. Pp. 7-22.
 39. Smale S. Morse inequalities for the dynamical system // *Bull. AMS*. 1960. V. 66. Pp. 43-49 / Рус. пер.: Смейл С. Неравенства Морса для динамических систем / *Математика*. 1967. Т. 11. В. 4. С. 79-87.
 40. Андронов А.А. Математические проблемы теории автоколебаний // I Всесоюзн. конф. по колебаниям. Т. I. М.: Гостехтеориздат, 1933. С. 32-71.
 41. Smale S. Generalized Poincare conjecture in a higher dimensions // *Bull. AMS*. 1960. V. 66. Pp. 373-375.
 42. Smale S. Generalized Poincare conjecture in dimensions greater than four // *Ann. Math*. 1961. V. 74. Pp. 391-406.
 43. Palis J. On Morse-Smale dynamical systems // *Topology*. 1969. V. 8. N 4. Pp. 385-404.
 44. Palis J., Smale S. Structural stability theorems // *Global Analysis. Proc. Simp. Pure Math.* Providence, RI. 1970. V. 14. Pp. 223-231.
 45. Smale S. On gradient dynamical systems // *Ann. Math*. 1961. V. 74. N 1. Pp. 199-206.
 46. Smale S. A structurally stable differential homomorphysm with an infinite number of periodic points // *Тр. Межд. симпоз. по нелин. колебаниям*. Киев 1961. Киев: АН УССР, 1963. С. 365-366.
 47. Smale S. A structurally stable systems are not dense // *Am. J. Math*. 1966. V. 88. N 2. Pp. 491-496 / Рус. пер.: Смейл С. Грубые системы не плотны / *Математика*. 1967. Т. 11, № 4. С. 107-112.
 48. Dirac P.A. M. Quantized singularities in the electromagnetic field // *Proc. Roy. Soc*. 1931 V. 31. V. 133. Pp. 60-72.
 49. Смейл С. Топология и механика // *УМН*. 1972. Т. 27. В. 2(164). С. 77-133.
 50. Palmore J.L. Classifying relative equilibria // *Bull. AMS*. 1973. V. 79. Pp. 904-908; 1975. V. 81. Pp. 488-491.
 51. Козлов В.В. Вариационное исчисление в целом и классическая механика // *УМН*. 1985. Т. 40. В. 2(242). С. 33-60.
 52. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // *УМН*. 1983. Т. 38. В. 1. С. 3-67.
 53. Козлов В.В. Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // *ДАН СССР*. 1979. Т. 249. № 6. С. 1299-1302.
 54. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
 55. Новиков С.П. Многозначные функции и функционалы. Аналог теории Морса // *ДАН СССР*. 1981. Т. 260. № 1. С. 31-34.
 56. Новиков С.П., Шмельцер И. Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника-Шнирельмана-Морса (ЛШМ) // *Функц. анализ и его прил*. 1981. Т. 15. В. 3. С. 54-66.

57. Новиков С.П. Вариационные методы и периодические решения уравнений типа Кирхгофа // Функц. анализ и его прил. 1981. Т. 15. В. 4. С. 37-52.
58. Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. М.: Из-во АН СССР, 1962. 402 с.
59. Борисов А.В., Мамаев И.С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд. Дом «Удмурт. ун-т», 1999. 464 с.
60. Новиков С.П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН. 1982. Т. 37. В. 5(227). С. 3-49.
61. Michel L., Mozrzymas B. Application of Morse theory to the symmetry breaking in the Landau theory of second order phase transition // Group theoretical methods in physics. Lecture notes in physics. Berlin: Springer-Verlag, 1978. Pp. 447-461.
62. Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwarz A.S., Tyupkin Y.S. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations // Phys. Lett. 1975. V. 59B. Pp. 85-87.
63. Поляков А. М. Спектр частиц в квантовой теории поля // Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 20. В. 6. С. 430—433.
64. Atiyah M. Geometry of Yang-Mills fields. Fermi lecture // Michel Atiyah. Collected works. V. 5. Oxford: Clarendon Press, 1988. Pp. 75-174.
65. Atiyah M., Bott R. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces // Phil. Trans. Soc. Lond. 1982. V. A 308. Pp. 523-615.
66. Witten E. Supersymmetry and MORSE Theory // J. Dif. Geometry. 1982. V. 17(4). Pp. 661-692.
67. Donaldson S. Self-dual connections and the topology of smooth 4-manifolds // Bull. AMS. 1983. V. 8. Pp. 81-83.
68. Donaldson S., Kronheimer P. The Geometry of Four- Manifolds. Oxford: OUP, 1990. 440 p.
69. Бурбаки Н, Очерки по истории математики. М.: Изд-во иностр. литературы, 1963. 292 с.
70. Alvarez-Gaume L. Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index Theorem // Comm. Math. Phys. 1983. V. 90. Pp. 161-173.
71. Монастырский М.И. Современная математика в отблеске медалей Филдса. М.: Янус-К, 2000. 200 с.

REFERENCES

1. Campbell L., Garnett W. The life of James Clerk Maxwell. L.: MacMillan and Co., 1882. 342 p.
2. Maxwell J.C. On the transformations of surfaces by bending // The scientific papers of James Clerk Maxwell. Ed. W.D. Niven. V. 1. N.Y.: Dover Publ., 1965. Pp. 80-114.
3. Maxwell J.C. Faraday // The scientific papers of James Clerk Maxwell. Ed. W.D. Niven. V. 2. N.Y.: Dover Publ., 1965. Pp. 355-360.

4. Maxwell J.C. On Hills and Dales // The scientific papers of James Clerk Maxwell. Ed. W.D. Niven. V. 2. N.Y.: Dover Publ., 1965. Pp. 233-240.
5. Cayley A. On Contour and Slope Lines // Phil. Mag. 1859. V. XVIII. Pp. 264-268.
6. Mukhin R.R. On the Poincaré-Birkhoff theorem as the most important result of the theory of dynamical systems // Chebyshev collection. 2022. V. 23. No. 1. Pp. 209-222 (in Russian).
7. Poincaré, H. Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes // Trans. AMS. V. 6. Pp. 237-274.
8. Jacobi C.G. Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und der verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen Substitution // Crelles J. 1839. V. 19. S. 309-313.
9. Darboux G. Leçon sur la théorie des surfaces. 3 partie. Paris: Gauthier-Villars, 1894.
10. Hadamard J. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques // J. Math. pures et appl. 1898. V. 4. Pp. 27-73.
11. Briefe Jacobi's an Bessel // C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke. 7 B. Berlin: Druck und Verlag von Georg Reiner. 1891. S. 377-386.
12. Poincaré H. Memoire sur les courbes définies par une équations différentielle // J. math. pures et appl. Sér. 3. 1881. V. 7. P. 375-422; 1882. V. 8. P. 251-296; Sér. 4. 1885. V. 1. P. 167-244; 1886. V. 2. P. 151-217.
13. Morse M. The calculus of variations in the large. N.Y.: AMS, 1934. 360 p.
14. Pogrebyssky I.B. On geodesic lines on convex surfaces // Henri Poincaré. Collect. works. V. 2. M.: Nauka, 1972. Pp. 982-983 (in Russian).
15. Birkhoff, G.D. An extension of Poincare's last geometric theorem // Acta. Math. 1926. V. 47. Pp. 297-311.
16. Birkhoff, G.D. Dynamical systems with two degrees of freedom // Trans. AMS. 1917. V. 18. Pp. 199-300 / G.D. Birkhoff. Coll. math. papers. V. 2. N.Y.: AMS, 1950. Pp. 1-102.
17. Birkhoff G.D. Dynamical Systems. Providence, Rhode Island: AMS, 1927. IX + 295 p.
18. Morse M. Relations between the critical points of a real function of n independent variables // Trans. AMS. 1925. V. 22. Pp. 84-110.
19. Morse M. The foundations of a theory of the calculus of variations in the large // Trans. AMS. 1928. V. 30. Pp. 213-274.
20. Lefschetz S. Continuous transformations of manifolds // Proc. National Acad. Sci. 1925. V. 11. Pp. 290-292.
21. Hopf H. Vectorfelder in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten // Math. Ann. 1926. V. 96. S. 225-251.
22. Morse M. The calculus of variations in the large // Mat. Congr. Zurich, 1932. Pp. 173-188.
23. Lusternik L. Sur quelques méthodes topologiques dans la géométrie différentielle // Acti. Congr. Inter. Mat. Bologna. 1928. V. 4. Pp. 291-296.
24. Lusternik L., Schnirelmann L. Sur un principe topologique en analyse // Comp. Rend. 1929. V. 188. Pp. 295-298.

25. Lusternik L., Schnirelmann L. Existence des trois géodésiques fermées sur tout surfaces de genre 0 // *Comp. Ren.*. 1929. V. 188. Pp. 269-271.
26. Lyusternik L.A., Shnirelman L.G. Topological methods in variational problems. M.: Gosizdat, 1930. 68 p. (in Russian).
27. Lyusternik L.A., Shnirelman L.G. Topological methods in variational problems and their applications to differential geometry of surfaces // *Russian Mat. Survey*. 1947. Vol. 2. V. 1(17). Pp. 166-217 (in Russian).
28. Shvarts A.S. Topology of spaces of closed curves // *Proc. Moscow Math. Soc.* 1960. T. 9. Pp. 3-44 (in Russian).
29. Klein F. *Elementarmathematik vom hoheren Standpunkte aus. Teil I.* Berlin: Springer, 1968. 614 S.
30. Thom R. Sur une partition en cellules associée a une fonction sur une variété // *Comp. Ren.* 1949. T. 228. Pp. 973-975.
31. Tu L.V. The life and works of Raoul Bott // *The founders of index theory*. Ed. S.-T. Yau. Sommerville, MA: Int. Press, 2003. Pp. 85-112.
32. Bott R. Morse theory indominable // *Publ. Math. IHES*. 1988. V. 68. Pp. 99-114.
33. Milnor J. *Morse theory*. Princeton, N.J.: Princeton Univ.Press, 1963. 154 p.
34. Bott R. An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups // *Bull. SMF*. 1956. V. 84. Pp. 251-281.
35. Bott R. The stable homotopy of the classical groups // *Ann. Math.* 1959. V. 70. N 2. Pp. 313-337.
36. Atiyah M. Obituary Raoul Bott // *Bull. London Math. Soc.* 2010. V. 42. Pp. 170-180.
37. Andronov A.A., Pontryagin L.S. Rough systems // *Rep. Acad. Sci. USSR*. 1937. V. 14, Pp. 247-250 (in Russian).
38. Smale S. Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio // *Chaos Avant-Gard*. Singapore: World Sci., 2000. Pp. 7-22.
39. Smale S. Morse inequalities for the dynamical system // *Bull. AMS*. 1960. V. 66. Pp. 43-49.
40. Andronov A.A. Mathematical problems in self-oscillation theory // A.A. Andronov. *Coll. Works*, M.: Acad. Sci. USSR, 1956. Pp. 32-71 (in Russian).
41. Smale S. Generalized Poincare conjecture in a higher dimensions // *Bull. AMS*. 1960. V. 66. Pp. 373-375.
42. Smale S. Generalized Poincare conjecture in dimensions greater than four // *Ann. Math.* 1961. V. 74. Pp. 391-406.
43. Palis J. On Morse-Smale dynamical systems // *Topology*. 1969. V. 8. N 4. Pp. 385-404.
44. Palis J., Smale S. Structural stability theorems // *Global Analysis. Proc. Simp. Pure Math.* Providence, RI. 1970. V. 14. Pp. 223-231.
45. Smale S. On gradient dynamical systems // *Ann. Math.* 1961. V. 74. N 1. Pp. 199-206.

-
46. Smale S. A structurally stable differential homomorphysm with an infinite number of periodic points // Proc. Int. Symp. Nonlin. Oscillations. Kyiv 1961. Kyiv: AN Ukrainian SSR, 1963. Pp. 365–366.
 47. Smale S. A structurally stable systems are not dense // Am. J. Math. 1966. V. 88. N 2. Pp. 491-496.
 48. Dirac P.A. M. Quantized singularities in the electromagnetic field // Proc. Roy. Soc. 1931 V. 31. V. 133. Pp. 60-72.
 49. Smale S. Topology and mechanics // Invent. Math. 1970. N10. Pp. 305-351.
 50. Palmore J.L. Classifying relative equilibria // Bull. AMS. 1973. V. 79. Pp. 904-908; 1975. V. 81. Pp. 488-491.
 51. Kozlov V.V. Calculus of variations in the large and classical mechanics // Russian Mat. Survey. 1985. Vol. 40. Issue 2(242). Pp. 33-60 (in Russian).
 52. Kozlov V.V. Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics // Russian Mat. Survey. 1983. Vol. 38. Issue 1. Pp. 3-67 (in Russian).
 53. Kozlov V.V. Topological obstacles to the integrability of natural mechanical systems // Rep. Acad. Sci. USSR. 1979. V. 249. N. 6. Pp. 1299-1302 (in Russian).
 54. Arnold V.I. Mathematical methods of classical mechanics. N.Y.: Springer-Verlag, 1989. 536 p.
 55. Novikov S.P. Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory // Rep. Acad. Sci. USSR. 1981. V. 260. N. 1. Pp. 31-34 (in Russian).
 56. Novikov S.P., Shmeltser I. Periodic Solutions of the Kirchhoff Equations for Free Motion of a Rigid Body in a Fluid and the Extended Lyusternik-Shnirelman-Morse (LSM) Theory // Funct. analysis and its applications. 1981. V. 15. Issue. 3. Pp. 54-66 (in Russian).
 57. Novikov S.P. Variational Methods and Periodic Solutions of Kirchhoff Type Equations // Funct. analysis and its applications. 1981. V. 15. Issue. 4. Pp. 37-52 (in Russian).
 58. Kirchhoff G. Vorlesungen über mechanic. Leipzig: B. G. Teubner, 1897. 475 p.
 59. Borisov A.V., Mamaev I.S. Poisson structures and Lie algebras in Hamiltonian mechanics. Izhevsk: Ed. House "Udmurt. Univ.", 1999. 464 p. (in Russian).
 60. Novikov S.P. Hamiltonian formalism and a many-valued analogue of Morse theory // Russian Mat. Survey. 1982. V. 37. Issue 5(227). Pp.3-49 (in Russian).
 61. Michel L., Mozrzymas B. Application of Morse theory to the symmetry breaking in the Landau theory of second order phase transition // Group theoretical methods in physics. Lecture notes in physics. Berlin: Springer-Verlag, 1978. Pp. 447-461.
 62. Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwarz A.S., Tyupkin Y.S. Pseudopartical solutions of the Yang-Mills equations // Phys. Lett. 1975. V. 59B. Pp. 85-87.
 63. Polyakov A. M. The spectrum of particles in quantum field theory // JETP Letters. 1974. V. 20. Issue 6. Pp. 430-433 (in Russian).
 64. Atyah M. Geometry of Yang-Mills fields. Fermi lecture // Michel Atyah. Collected works. V. 5. Oxford: Clarendon Press, 1988. Pp. 75-174.

- 65. Atyah M., Bott R. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces // Phil. Trans. Soc. Lond. 1982. V. A 308. Pp. 523-615.
- 66. Witten E. Supersymmetry and MORSE Theory // J. Dif. Geometry. 1982. V. 17(4). Pp. 661-692.
- 67. Donaldson S. Self-dual connections and the topology of smooth 4-manifolds // Bull. AMS. 1983. V. 8. Pp. 81-83.
- 68. Donaldson S., Kronheimer P. The Geometry of Four- Manifolds. Oxford: OUP, 1990. 440 p.
- 69. Bourbaki N. Elements of the history of mathematics. N.Y.: Springer-Verlag, 1994. 301 p.
- 70. Alvarez-Gaume L. Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index Theorem // Comm. Math. Phys. 1983. V. 90. Pp. 161-173.
- 71. Monastyrsky M.I. Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals. M.: Janus-K, 2000. 200 p. (in Russian).

Получено: 24.04.2023

Принято в печать: 12.09.2023