

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 3.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-242-250

О последовательности дробных частей отношения чисел

$$\text{Фибоначчи } x_{n+1} = \left\{ \frac{F_{n+1}}{F_n} x_n \right\}$$

А. Х. Гияси, И. П. Михайлов, В. Н. Чубариков

Гияси Азар — кандидат физико-математических наук, Университет имени Алламе Табатабаи (Иран).

e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir

Михайлов Илья Петрович — Казанский авиационный институт (г. Лениногорск).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Аннотация

В работе для разложений действительных чисел по последовательности Фибоначчи доказаны теоремы о равномерном распределении остатков для почти всех чисел в смысле меры Лебега. Вывод этой теоремы основан на критерии Г.Вейля равномерного распределения последовательности по модулю единица и лемме Бореля – Кантелли.

Ключевые слова: последовательность Фибоначчи, критерий Г. Вейля, лемма Бореля – Кантелли.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

А. Х. Гияси, И. П. Михайлов, В. Н. Чубариков. О последовательности дробных частей отношения чисел Фибоначчи $x_{n+1} = \left\{ \frac{F_{n+1}}{F_n} x_n \right\}$ // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 3, с. 242–250.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 3.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-242-250

On the sequence of fractional parts of the ratio of Fibonacci
numbers $x_{n+1} = \left\{ \frac{F_{n+1}}{F_n} x_n \right\}$

A. Kh. Giyasi, I. P. Mikhailov, V. N. Chubarikov

Giyasi Azar — candidate of physical and mathematical sciences, Allameh Tabataba'i University (Iran).

e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir

Mikhailov Ilya Petrovich — Kazan Aviation Institute (Leninogorsk).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Abstract

In this paper for the expansion of real numbers on Fibonacci sequence theorems on the uniform distribution of remainders for almost of all real numbers in the sense of Lebesgue's measure. the conclusion of this theorem is based on the Weyl's criteria of the uniform distribution of a sequence modulo unit and on the lemma.

Keywords: the Fibonacci's sequence, H.Weyl's criteria, lemma of Borel – Kantelli.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

A. Kh. Giyasi, I. P. Mikhailov, V. N. Chubarikov, 2023, "On the sequence of fractional parts of the ratio of Fibonacci numbers $x_{n+1} = \left\{ \frac{F_{n+1}}{F_n} x_n \right\}$ ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 242–250.

Введение

Настоящая статья посвящена распределению остатков при разложении действительного числа по обратным числам Фибоначчи. Интерес к равномерному распределению этой последовательности остатков связан с приложениями (см., например, [15]).

Для полноты изложения приведем схему вывода разложения натурального и действительного числа в позиционной системе счисления.

Пусть $q \geq 2$ — натуральное число. Тогда, как известно, следствием алгоритма Евклида является следующее утверждение: *любое натуральное число n единственным образом может быть представлено в виде*

$$n = a_h q^h + a_{h-1} q^{h-1} + \dots + a_1 q + a_0,$$

где $q^h \leq n < q^{h+1}$ и при $0 \leq s \leq h$ имеем, что a_s — натуральные числа, $0 \leq a_s \leq q, a_h \geq 1$; причем алгоритм Евклида записывается цепочкой формул:

$$\begin{aligned} n &= n_h q + a_0, & 0 \leq a_0 < q, \\ n_h &= n_{h-1} q + a_1, & 0 \leq a_1 < q, \\ n_{h-1} &= n_{h-2} q + a_2, & 0 \leq a_2 < q, \\ &\dots & \dots & \dots \\ n_3 &= n_2 q + a_{h-2}, & 0 \leq a_{h-2} < q, \\ n_2 &= n_1 q + a_{h-1}, & 0 \leq a_{h-1} < q, \\ n_1 &= a_h, & 1 \leq a_h < q. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$a_s = \left[\frac{n}{q^s} \right] - \left[\frac{n}{q^{s+1}} \right] q, \quad 0 \leq s \leq h$$

В самом деле, из первого уравнения при $s = 0$ получим $n_h = [n/q]$ и

$$a_0 = \left[\frac{n}{q^0} \right] - \left[\frac{n}{q} \right] q.$$

Далее по индукции имеем

$$a_s = n_{h-s+1} - \left[\frac{n_{h-s+1}}{q} \right] q = \left[\frac{n}{q^s} \right] - \left[\frac{n}{q^{s+1}} \right] q.$$

Тем самым формула для нахождения цифр $a_s, 0 \leq s \leq h$, доказана.

Выведем теперь формулу для представления числа n в q -ой системе счисления. Из последнего уравнения имеем $n_1 = a_h$. Подставляя это в предыдущее уравнение, получим

$$n_2 = a_h q + a_{h-1}.$$

Продолжая эту процедуру с предыдущим уравнением, находим

$$n_3 = a_h q^2 + a_{h-1} q + a_{h-2}.$$

Так действуем до первого уравнения, что приводит окончательно к равенству

$$n = a_h q^h + a_{h-1} q^{h-1} + \dots + a_1 q + a_0.$$

Следовательно, после стандартных действий с алгоритмом Евклида приходим к искомому представлению числа n .

Известно, что действительное число $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, однозначным образом представляется в виде

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{q^k} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{a}_k}{q^k} + \frac{x_n}{q^n},$$

где

$$x_k = \{q^k x_{k-1}\}, x_0 = \alpha, \bar{a}_k = [q^k x_k], k \in \mathbf{N},$$

и

$$0 \leq \alpha - \sum_{k=1}^n \frac{\bar{a}_k}{q^k} < q^{-n}.$$

Как показали Харди и Литтлвуд [1], последовательность остатков $x_n = x_n(\alpha)$ будет равномерно распределена по модулю единица для почти всех α в смысле меры Лебега. Это означает, что для почти всех α согласно критерию Г.Вейля при любом фиксированном целом $h \neq 0$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i h x_k} = 0.$$

Подобным образом сначала найдем разложение натурального числа по последовательности Фибоначчи.

Пусть задана последовательность чисел Фибоначчи

$$F_0 = F_1 = 1, F_{k+1} = F_k + F_{k-1} (k \geq 1).$$

Возьмем любое натуральное число $n \geq 1$. Тогда найдется натуральное число $h \geq 1$ такое, что $F_h \leq n < F_{h+1}$, и набор $\{a_1, \dots, a_h\}$, состоящий из чисел 0 и 1, причем $a_h = 1, a_s \cdot a_{s+1} = 0$ для всех $s = 1, \dots, h-1$, такой, что имеет место единственное разложение вида

$$n = a_1 F_1 + a_2 F_2 + \dots + a_h F_h.$$

§1. Представление действительного числа в виде бесконечного ряда по обратным числам Фибоначчи

Будем говорить, что число $a \geq 0$ представимо в виде ряда

$$a = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_k}{F_k}, \quad (1)$$

где $a_0 = [a]$ — целая часть числа a , целые числа $\bar{\alpha}_k, k \geq 1$, могут принимать всего два значения 0 и 1, и, кроме того, для любого натурального n выполняется неравенство

$$0 \leq a - a_0 - \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\alpha}_k}{F_k} < F_n^{-1}. \quad (2)$$

Теорема 1. Любое действительное число единственным образом представимо в виде (1) и (2).

Вывод этой теоремы содержится в нашей работе [19].

Определим “цифры” $\bar{\lambda}_k, k \geq 1$.

Положим $a_0 = [a]$

$$a = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\lambda}_k}{F_k} + \frac{x_n}{F_n}, 0 \leq x_n < 1, x_0 = \{a\}. \quad (6)$$

Отсюда находим $x_n + \bar{\lambda}_n = \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1}$, что дает возможность определить величины

$$\bar{\lambda}_n = \left[\frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1} \right], \quad x_n = \left\{ \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1} \right\}.$$

Таким образом, $\bar{\lambda}_n, n \geq 1$ — целые, причем они могут принимать только два значения: 0 и 1.

§2. Остатки в разложении действительных чисел. Определим для любого действительного числа a при $n \geq 1$ последовательность остатков $\{x_n\}$. Положим

$$a = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{a}_k}{F_k} + \frac{x_n}{F_n}, 0 \leq x_n < 1.$$

Для любого $n \geq 1$ находим

$$\frac{\bar{a}_n}{F_n} + \frac{x_n}{F_n} = \frac{x_{n-1}}{F_{n-1}}, \bar{a}_n + x_n = \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1}.$$

Следовательно,

$$\bar{a}_n = \left[\frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1} \right], x_n = \left\{ \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1} \right\}.$$

Отсюда получим

$$x_n = \left\{ \frac{F_n}{F_{n-1}} \left\{ \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} \cdots \left\{ \frac{F_2}{F_1} a \right\} \cdots \right\} \right\}.$$

§3. Законы распределения остатков в разложении действительных чисел.

Сначала дадим некоторые общие соображения метрического характера о распределении значений бесконечной последовательности.

Многие утверждения метрической теории чисел в основе их вывода полагаются на следующую лемму Бореля – Кантелли, относящуюся к событиям, которые случаются “почти наверное”.

ЛЕММА 3.1. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — последовательность событий на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, и пусть

$$B = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Тогда, если

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ сходится, то $P(B) = 0$;

2) события A_n независимы и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ расходится, то

$$P(B) = 1.$$

Перейдем к рассмотрению действительных чисел. Пусть число a , $0 \leq a < 1$, представимо в виде (2) и (3), и пусть при $0 \leq t < 1$ определена периодическая функция $\chi_t(x+1) = \chi_t(x)$ вида

$$\chi_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < t, \\ 0, & \text{если } t < x < 1. \end{cases}$$

Тогда число $P(N; t)$ членов последовательности $x_n = x_n(a)$, $n \leq N$, лежащих в полуинтервале $[0, t)$ равно

$$P(N; t) = \sum_{k=1}^N \chi_t(x_k).$$

Если же существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P(N; t)}{N} = \sigma(t),$$

то функция $\sigma(t)$ называется законом распределения последовательности $\{x_n\}$. Тогда для любого действительного числа t справедливы соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 P_n(\alpha) d\alpha = \int_0^1 d\sigma(\alpha),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (P_n(\alpha) - \sigma(t))^2 d\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 P_n^2(\alpha) d\alpha - \sigma^2(t).$$

По лемме Бореля–Кантелли последних двух соотношений обычно достаточно для установления закона распределения последовательности $\{x_n\}$.

В частности, для равномерного распределения последовательности $\{x_n\}$ на отрезке $[0, 1]$ имеем $\sigma(t) = t$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 P_n(\alpha; f) d\alpha = \int_0^1 f(\alpha) d\sigma(\alpha),$$

где

$$P_n(t; f) = \sum_{k=1}^n f(\chi_t(x_k)).$$

§4. Равномерное распределение остатков в разложении действительных чисел по последовательности Фибоначчи.

ЛЕММА 4.1. Пусть F_n — последовательность Фибоначчи, $F_0 = F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ при $n \geq 1$, и пусть $x_n = \left\{ \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1} \right\}, n \geq 1$. Тогда при $n \geq 1$ имеем

$$x_n \equiv F_n x_1 \pmod{1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Находим цепочку соотношений

$$x_n \equiv \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1} \pmod{1}, \quad F_{n-1} x_n \equiv F_n \left\{ \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} x_{n-2} \right\} \pmod{1},$$

$$F_{n-1} x_n \equiv \frac{F_n F_{n-1}}{F_{n-2}} x_{n-2} \pmod{F_{n-1}}, \dots,$$

$$F_{n-1} \dots F_2 x_n \equiv F_n F_{n-1} \dots F_1 x_1 \pmod{F_{n-1} \dots F_2},$$

$$x_n - F_n x_1 \equiv 0 \pmod{1},$$

что и требовалось доказать.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Для почти всех действительных чисел a из полуинтервала $[0, 1)$ (в смысле меры Лебега) последовательность остатков

$$x_n = x_n(a) = \left\{ \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1} \right\} = \left\{ \frac{F_n}{F_{n-1}} \left\{ \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} \dots \left\{ \frac{F_2}{F_1} a \right\} \dots \right\} \right\}.$$

равномерно распределена по модулю единица, где F_k — последовательность чисел Фибоначчи: $F_0 = F_1 = 1, F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, k \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся критерием Г.Вейля равномерного распределения последовательности по модулю 1. Положим

$$S_n(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i h x_k(a)},$$

где $h \neq 0$ — любое фиксированное целое число.

Тогда условие равномерной распределенности последовательности x_n по модулю 1 эквивалентно тому, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a) = 0.$$

Далее, используя лемму, имеем

$$\int_0^1 |S_n(a)|^2 da = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \int_0^1 e^{2\pi i h (x_k(a) - x_l(a))} da =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \int_0^1 e^{2\pi i h a (F_k - F_l)} da = \frac{1}{n},$$

поскольку

$$\int_0^1 e^{2\pi i m \alpha} d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ 0, & \text{если } m \neq 0, m \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Отсюда при $n = q^4$ находим, что неравенство $|S_{q^4}| > q^{-1/2}$ справедливо на множестве E_q , мера $\mu = \mu(E_q)$ которого не превосходит q^{-3} . Действительно,

$$\frac{1}{q^4} = \int_0^1 |S_{q^2}(a)|^2 da \geq q^{-1} \mu E_q, \mu E_q \leq q^{-3}.$$

Следовательно, для любого натурального p мера $\mu(E'_p)$ множества $E'_p = \bigcup_{q \geq p} E_q$ не превосходит

$$\mu(E'_p) \leq \sum_{q=p}^{\infty} \mu(E_q) \leq \sum_{q=p}^{\infty} q^{-3} \leq p^{-3} + \int_p^{\infty} \frac{dt}{t^3} = p^{-3} + 2p^{-2} \leq 3p^{-2}.$$

Стало быть, множество $E' = \bigcap_{p=1}^{\infty} E'_p$ имеет меру нуль. Это и доказывает теорему 2.

Заключение

Закон равномерного распределения последовательности остатков в разложения действительных чисел по последовательности Фибоначчи представляют интерес при изучении свойств арифметических функций и в приложениях в анализе Фурье и в криптографии.

В основе наших исследований лежат работы [1]–[19].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. The fractional part of $n^k \theta$. // Acta math., 1914, **37**.
2. Borel E. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. // Rend. Circolo math. Palermo, 1909, **27**.
3. Гельфонд А. О. Об одном общем свойстве систем счисления. // Изв. АН СССР, сер. матем (in Russian). 1959, **23** (Избр. тр. с. 366–371).
4. Zeckendorf E. Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas. // Bull. Soc. R. Sci. Liège (in French). 1972, **41**, p. 179–182.
5. Dickson L. E. History of the theory of numbers. — Carnegie Inst. of Washington. 1919. Ch. 17.
6. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа. 2006. 640 с.
7. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. — М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1961. 212 с.
8. Холл М. Комбинаторика. — М.: Изд-во “Мир”. 1970. 424 с.

9. Бернулли Д. // *Comment. Acad.Sci. Petrop.*, 1728, **3**, p. 85–100.
10. Кнут Д. Э. Искусство программирования, т.1. Основные алгоритмы, 3-е изд. Уч. пособие. — М.: Изд. дом “Вильямс”. 2000. 720 с.
11. de Moivre A. // *Philos. Trans.*, 1922, **32**, p. 162–178.
12. Чебышев П. Л. Теория вероятностей. — Изд-во АН СССР. 1936, §23. с.143–147.
13. Ландау Э. Основы анализа. — М.: ИЛ, 1947.
14. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: теория и приложения. — М.: Наука, 1987, 344 с.
15. Минеев М. П., Чубариков В. Н. Лекции по арифметическим вопросам криптографии. — М.: ООО“Луч”, 2014, 224 с.
16. Ghyasi A. H. A generalization of the Gel'fond theorem concerning number systems// *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2007, **14**, No.3, p.370.
17. Гияси А. Х., Михайлов И. П., Чубариков В. Н. О разложении действительных чисел по некоторым последовательностям// *Чебышевский сборник*. 2022, **23**, No.1, с.50-60.
18. Гияси А. Х., Михайлов И. П., Чубариков В. Н. О равномерном распределении остатков в разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел// *Чебышевский сборник*. 2022, **23**, No.3, с.38-44.
19. Гияси А. Х., Михайлов И. П., Чубариков В. Н. О разложении действительных чисел по последовательности Фибоначчи// *Чебышевский сборник*. 2023, **24**, No.2, с.

REFERENCES

1. Hardy G. H., Littlewood J. E., 1914, “The fractional part of $n^k\theta$ ” // *Acta math.*, **37**.
2. Borel E, 1909, “Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques” // *Rend Circolo math. Palermo*, **27**.
3. Gel'fond A. O, 1959, “On one general property of numerical system ”// *Izv. AN SSSR, Ser. math.* (in Russian). **23** (Selected works) pp. 366–371.
4. Zeckendorf E, 1972, “Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas” // *Bull. Soc. R. Sci. Liège* (in French). **41**, pp. 179–182.
5. Dickson L. E, 1919, “History of the theory of numbers” — *Carnegie Inst. of Washignton*. Ch.17.
6. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N, 2006, “Lectures on mathematical analysis” — М.: Drofa. Pp. 640.
7. Cassels J. W. S, 1961, “An introduction to Diophantine approximation” — *Cambridge University Press*, pp. 212.
8. Hall M., Jr, 1970, “Combinatorial theory” — Waltham (Massachusetts)-Toronto-London: *Blaisdell Publ. Comp.*, pp. 424.
9. Bernoulli D, 1728, “Combinatorial theory” // *Comment. Acad.Sci. Petrop.*, **3**, pp. 85–100.

10. Knuth D. E., 1998, “The art computer programming. Fundamental algorithms. Third Ed” — Reading, Massachusetts-Harlow, England-Menlo Park, California-Berkley, california-Lon Mills, Ontario-Sidney-Bonn-Amsterdam-Tokyo-Mexico City: Addison Wesley Longman, Inc. pp. 720.
11. de Moivre A, 1922, “Philos. Trans”, **32**, p. 162–178.
12. Chebyshev P. L, 1936, “The theory of probabilities” — *AN SSSR*. §23. pp. 143–147. (in Russian).
13. Landau E, 1947, “Fundamentals of analysis” — M.: Inostr.literature.(in Russian).
14. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A, 1987, “Series and the Uolsh’s transformations: the theory and applications” — M.: Nauka, pp. 344.(in Russian).
15. Mineev M. P., Chubarikov V. N, 2014, “Lectures on arithmetical questions of cryptography” — M.: LLC “Luch”, pp. 224. (in Russian).
16. Ghyasi A. H, 2007, “A generalization of the Gel’fond theorem concerning number systems”// *Russian Journal of Mathematical Physics*. **14**, no.3, p.370.
17. Ghyasi A. K., Mihaylov I. P., Chubarikov V. N, 2022, “On the expansion of real numbers over some sequences” // *Chebyshevskii Sbornik*. **23**, no.3, pp.50–60.
18. Ghyasi A. K., Mihaylov I. P., Chubarikov V. N, 2022, “On the uniform distribution of remainders in the expansion of real numbers over the multiplicative system of numbers” // *Chebyshevskii Sbornik*. **23**, No.5, с.38-44.
19. Ghyasi A. K., Mihaylov I. P., Chubarikov V. N, 2023, “On the expansion of real numbers over the Fibonacci sequence” // *Chebyshevskii Sbornik*. **24**, no.2, pp. 247–253.

Получено: 11.06.2023

Принято в печать: 12.09.2023