ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 3.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-228-241

Об одной аддитивной задаче, связанной с разложениями по линейной рекуррентой последовательности[1]

А. В. Шутов

Шутов Антон Владимирович — Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН (г. Владимир).
e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация

Пусть $a_1, \dots, a_d$ – натуральные числа, удовлетворяющие условию $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq \geq a_{d-1} \geq a_d = 1$. Определим последовательность $\{T_n\}$ при помощи линейного рекуррентного соотношения $T_n = a_1 T_{n-1} + a_2 T_{n-2} + \ldots + a_d T_{n-d}$ и начальных условий $T_0 = 1$, $T_n = 1 + a_1 T_{n-1} + a_2 T_{n-2} + \ldots + a_n T_0$ для $n < d$. Пусть $\mathbb{N}(w)$ – множество натуральных чисел, для которых жадное разложение по линейной рекуррентной последовательности $\{T_n\}$ заканчивается на некоторое слово w. При этом w выбирается так, чтобы множество $\mathbb{N}(w)$ было непустым. Рассматривается задача о числе $r_k(N)$ представлений натурального числа N в виде суммы k слагаемых из $\mathbb{N}(w)$.

С использованием полученного ранее описания множеств $\mathbb{N}(w)$ в терминах сдвигов торов размерности $d-1$ получена асимтотическая формула для числа представлений $r_k(N)$, а также найдены верхние оценки для числа представлений.

Найдены условия на k, при выполнении которых искомое представление существует для всех достаточно больших натуральных N. В частности, такое представление существует, если $k \geq 1 + (a_1+1)^{m-d+1}\frac{(a_1+1)^d - 1}{a_1}$, где m – длина фиксированного окончания w жадного разложения. Кроме того, получена асимтотическая формула для среднего числа представлений.

В заключении сформулировано несколько нерешенных задач.

Ключевые слова: линейные рекуррентные последовательности, жадные разложения, фиксированные последние цифры, линейная аддитивная задача.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:
А. В. Шутов. Об одной аддитивной задаче, связанной с разложениями по линейной рекуррентой последовательности // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 3, с. 228–241.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-11-00065, https://rscf.ru/project/19-11-00065/.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 3.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-228-241

On one additive problem connected with expansions on linear recurrrent sequence

A. V. Shutov

Shutov Anton Vladimirovich — Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (Vladimir).
e-mail: a1981@mail.ru

Abstract

Let $a_1, \ldots, a_d$ be natural numbers satisfying condition $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{d-1} \geq a_d = 1$. Define sequence $\{T_n\}$ using the linear recurrent relation $T_n = a_1T_{n-1} + a_2T_{n-2} + \ldots + a_dT_{n-d}$ and initial conditions $T_0 = 1$, $T_n = 1 + a_1T_{n-1} + a_2T_{n-2} + \ldots + a_nT_0$ for $n < d$. Let $\mathbb{N}(w)$ be a set of natural numbers for which the greedy expansion on the linear recurrent sequence $\{T_n\}$ ends with some word w. Here w is chosen in such a way that so that the set $\mathbb{N}(w)$ is non-empty. We study the problem about the number $r_k(N)$ of representations of a natural number N in as the sum of k terms from $\mathbb{N}(w)$.

Using the previously obtained description of the sets $\mathbb{N}(w)$ in terms of shifts of tori of dimension $d-1$, an asymptotic formula for the number of representations $r_k(N)$ is obtained, and also found upper bounds for the number of representations.

Conditions on k that ensure the existence of considered representations for all sufficiently large natural numbers N are found. In particular, such representations exist if $k \geq 1 +$ $+ (a_1+1)^{m-d+1}\frac{(a_1+1)^d-1}{a_1}$, where m is the length of the fixed end w of the greedy expansion. In addition, an asymptotic formula is obtained for the average number of representations.

In conclusion, several unsolved problems are formulated.

Keywords: linear recurrent sequences, greedy expansions, fixed last digits, linear additive problem.

Bibliography: 32 titles.

For citation:
A. V. Shutov, 2023, “On one additive problem connected with expansions on linear recurrrent sequence”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 228–241.

1. Введение

Пусть $a_1, \ldots, a_d$ – натуральные числа, удовлетворяющие условию

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{d-1} \geq a_d = 1.$$

Определим последовательность $\{T_n\}$ при помощи линейного рекуррентного соотношения

$$T_n = a_1T_{n-1} + a_2T_{n-2} + \ldots + a_dT_{n-d}$$

и начальных условий

$$T_0 = 1,$$

и

$$T_n = 1 + a_1 T_{n-1} + a_2 T_{n-2} + \ldots + a_n T_0$$

для $n < d$. В этом случае любое натуральное число N допускает однозначное жадное разложение по последовательности $\{T_n\}$:

$$N = \sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N) T_k. \tag{1}$$

Жадность разложения (1) означает, что что для любого $m_1 < m(N)$ выполняются неравенства $0 \le N - \sum_{k=m_1}^{m(N)} \varepsilon_k(N) T_k < T_{m_1}$.

Можно выделить два класса задач, связанных с разложениями вида (1):

1) задачи, связанные с изучением сумм цифр подобных разложений [1]–[6];

2) задачи, связанные с числами, имеющими заданное окончание разложения [7]–[10].

Мы рассмотрим задачу второго типа.

Для каждого натурального N разложение (1) порождает конечное слово $w(N) = \varepsilon_{m(N)}(N) \ldots \varepsilon_0(N)$ над алфавитом $\{0, 1, \ldots, a_1\}$. Очевидно, что не все конечные слова над данным алфавитом порождаются разложениями натуральных чисел. Слова, порождаемые такими разложениями, будем называть допустимыми. Известно [11], что слвоо является допустимым тогда и только тогда, когда каждое его подслово лексикографически меньше слова $a_1 \ldots a_d$.

Пусть w – допустимое слово. Обозначим через $\mathbb{N}(w)$ множество натуральных чисел, для которых $w(N)$ заканчивается на слово w.

Пусть $r_k(N)$ – число решений линейного диофантова уравнения

$$n_1 + \ldots + n_k = N$$

с дополнительными условиями

$$n_j \in \mathbb{N}(w).$$

Наша цель будет состоять в нахождении условий, при котоорых данная аддитивная задача разрешима при всех достаточно больших N, а также в получении асимптотической формулы для $r_k(N)$.

В работе [12] был доказан следующий результат о множествах $\mathbb{N}(w)$.

Теорема 1. *Существует иррациональный сдвиг S $d-1$-мерного тора $\mathbb{T}^{d-1}$ (зависящий от выбора линейной рекуррентной последовательности) такой, что для любого допустимого слова w существует линейно связное множество $\mathbb{T}(w) \subset \mathbb{T}^{d-1}$ такое, что $n \in \mathbb{N}(w)$ тогда и только тогда, когда $S^n(0) \in \mathbb{T}(w)$.*

В случае $d = 2$ аналогичные результаты были получены ранее в [8] и [9]. В [10] имеется обобщение на другой класс систем счисления.

Теорема 1 позволяет нам переопределить $r_k(N)$ как число решений линейного диофантова уравнения

$$n_1 + \ldots + n_k = N$$

с дополнительными условиями $S^{n_j}(0) \in \mathbb{T}(w)$. Именно это определение мы будем использовать в дальнейшем.

В случае $d = 2$ асимптотика для числа решений переформулированной задачи была впервые получена в [13]. Более общий результат доказан в [14].

2. Основной результат

Определим преобразование $t_y(x) : \mathbb{T}^{d-1} \to \mathbb{T}^{d-1}$ формулой $t_y(x) = -x + y \bmod \mathbb{Z}^{d-1}$. Определим также на торе $\mathbb{T}^{d-1}$ функции $c_k(x)$ при помощи рекуррентного соотношения

$$c_k(x) = \frac{1}{k-1} \int_{t_x(\mathbb{T}(w))} c_{k-1}(t)dt \tag{2}$$

с начальным условием

$$c_1(x) = \chi_w(x)$$

– характеристическая функция множества $\mathbb{T}(w)$.

Замечание 9. *В часности, при $k = 2$ данное определение дает*

$$c_k(x) = mes(\mathbb{T}(w) \cap t_x(\mathbb{T}(w)).$$

Отметим, что функция $c_1(x)$ – кусочно постоянна, а функции $c_k(x)$ с $k \geq 2$ – непрерывны.

Теорема 2. *Справедлива асимптотическая формула*

$$r_k(N) \sim c_k(S^N(0))N^{k-1}. \tag{3}$$

Доказательство будем проводить индукцией по k. При $k = 1$ в силу теоремы 1 имеем

$$r_1(N) = \begin{cases} 1, & S^N(0) \in \mathbb{T}(w) \\ 0, & S^N(0) \notin \mathbb{T}(w) \end{cases},$$

то есть $r_1(N) = \chi_w(S^N(0))$, что согласуется с (3).

Рассмотрим переход $k \to k + 1$.

Заметим, что

$$r_{k+1}(N) = \sum_{\substack{n_1 + n_2' = N \\ S^{n_2'}(0) \in \mathbb{T}(w)}} r_k(n_1).$$

Используя предположение индукции, получаем,

$$r_{k+1}(N) \sim \sum_{n_1=1}^{n} c_k(S^{n_1}(0))n_1^{k-1}\chi_w(S^{N-n_1}(0)).$$

Воспользовавшись формулой суммирования по частям, находим

$$r_{k+1}(N) \sim N^{k-1}B_N - \sum_{n_1=1}^{N-1} B_{n_1}((n_1+1)^{k-1} - n_1^{k-1}), \tag{4}$$

где

$$B_{n_1} = \sum_{j=1}^{n_1} c_k(S^j(0))\chi_w(S^{N-j}(0)).$$

Далее, легко видеть, что $S^{N-j}(x) \in \mathbb{T}(w)$ тогда и только тогда, когда $S^j(0) \in t_{S^N(0)}(\mathbb{T}(w))$. Поэтому

$$B_{n_1} = \sum_{j=1, S^j(0) \in t_{S^N(0)}(\mathbb{T}(w))}^{n_1} c_k(S^j(0)). \tag{5}$$

Мы хотим заменить сумму в (5) интегралом и оценить погрешность этой замены.

Докажем, что
$$|B_{n_1} - n_1 k c_{k+1}(S^N(0))| \leq \Delta(n_1), \tag{6}$$
для некоторой функции $\Delta(n)$, не зависящей от N и такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta(n)}{n} = 0$.

Пусть $k = 1$. Тогда,
$$B_1 = \sharp\{j : 1 \leq j \leq n_1 : S^j(0) \in t_{S^N(0)}(\mathbb{T}(w)) \cap \mathbb{T}(w)\}.$$
Обозначим
$$X_N = t_{S^N(0)}(\mathbb{T}(w)) \cap \mathbb{T}(w).$$
Мы хотим доказать, что
$$|\sharp\{j : 1 \leq j \leq n_1 : S^j(0) \in X_N\} - n_1 mes X_N| \leq \Delta(n_1).$$

Для любого измеримого по Жордану множества $X \in \mathbb{T}^{d-1}$ и любого $\varepsilon > 0$ определим множества
$$X_\varepsilon = \{x \in \mathbb{T}^{d-1} : d(x,y) < \varepsilon \text{ для некотого } y \in X\},$$
$$X_{-\varepsilon} = \{x \in \mathbb{T}^{d-1} : d(x,y) \geq \varepsilon \text{ для всех } y \in \mathbb{T}^{d-1} \setminus X\}.$$
Пусть $b(\varepsilon)$ – неубывающая функция, определенная для любого $\varepsilon > 0$ и такая, что $b(\varepsilon) > 0$ для всех ε и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} b(\varepsilon) = 0$. Будем говорить, что множество X принадлежит классу $\mathcal{M}_b$ если для любого $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства
$$mes(X_\varepsilon \setminus X) \leq b(\varepsilon),$$
$$mes(X \setminus X_{-\varepsilon}) \leq b(\varepsilon).$$
Отметим, что каждое измеримое по Жордану множество X принадлежит классу $\mathcal{M}_b$ для некоторой функции b.

В работе [15] доказано, что для любого класса множеств $\mathcal{M}_b$ и для любой последовательности $x_1, \ldots, x_N, \ldots$ равномерно распределенной на торе $\mathbb{T}^{d-1}$ существует функция $\Delta_b(N)$ (зависящая от $b(\varepsilon)$ и от последовательности), удовлетворяющая условию $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{\Delta_b(N)}{N} = 0$ такая, что для любого множества $X \in \mathcal{M}_b$ выполняется неравенство
$$|\sharp\{j : 1 \leq j \leq n : x_j \in X\} - n mes X| \leq \Delta_b(n). \tag{7}$$

Заметим, что в формуле (5) множество $\mathcal{T}(w)$ и все множества $t_{S^N(0)}(\mathbb{T}(w))$ получаются друг из друга сдвигом тора и поэтому принадлежат одному и тому же классу $\mathcal{M}_{b_w}$ для некоторой функции $b_w(\varepsilon)$, зависящей только от выбора допустимого слова w.

Покажем, что, если $Y_1 \in \mathcal{M}_{b_1}$ и $Y_1 \in \mathcal{M}_{b_2}$, то $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{M}_{b_1+b_2}$. Во-первых, $(Y_1 \cap Y_2)_\varepsilon \subseteq$ $\subseteq (Y_1)_\varepsilon \cap (Y_2)_\varepsilon$. Следовательно,
$$\begin{gathered}(Y_1 \cap Y_2)_\varepsilon \setminus (Y_1 \cap Y_2) \subseteq \ [(Y_1)_\varepsilon \cap (Y_2)_\varepsilon] \setminus (Y_1 \cap Y_2) \subseteq \\ \subseteq ([(Y_1)_\varepsilon \cap (Y_2)_\varepsilon] \setminus Y_1) \cup ([(Y_1)_\varepsilon \cap (Y_2)_\varepsilon] \setminus Y_2) \subseteq [(Y_1)_\varepsilon \setminus Y_1] \cup [(Y_2)_\varepsilon \setminus Y_1]\end{gathered}$$
и
$$\begin{gathered}mes((Y_1 \cap Y_2)_\varepsilon \setminus (Y_1 \cap Y_2)) \leq mes([(Y_1)_\varepsilon \setminus Y_1] \cup [(Y_2)_\varepsilon \setminus Y_1]) \leq \\ \leq mes((Y_1)_\varepsilon \setminus Y_1) + mes((Y_2)_\varepsilon \setminus Y_2) \leq b_1(\varepsilon) + b_2(\varepsilon)\end{gathered}.$$
Во-вторых, $(Y_1)_{-\varepsilon} \cap (Y_2)_{-\varepsilon} \subseteq (Y_1 \cap Y_2)_{-\varepsilon}$. Следовательно,
$$\begin{gathered}(Y_1 \cap Y_2) \setminus (Y_1 \cap Y_2)_{-\varepsilon} \subseteq (Y_1 \cap Y_2) \setminus [(Y_1)_{-\varepsilon} \cap (Y_2)_{-\varepsilon}] \subseteq \\ \subseteq [(Y_1 \cap Y_2) \setminus (Y_1)_{-\varepsilon}] \cup [(Y_1 \cap Y_2) \setminus (Y_2)_{-\varepsilon}] \subseteq [Y_1 \setminus (Y_1)_{-\varepsilon}] \cup [Y_2 \setminus (Y_2)_{-\varepsilon}]\end{gathered}$$

и

$$\begin{aligned} mes((Y_1 \cap Y_2) \setminus (Y_1 \cap Y_2)_{-\varepsilon}) \le mes([Y_1 \setminus (Y_1)_{-\varepsilon}] \cap [Y_2 \setminus (Y_2)_{-\varepsilon}]) \le \\ \le mes(Y_1 \setminus (Y_1)_{-\varepsilon}) + mes(Y_2 \setminus (Y_2)_{-\varepsilon}) \le b_1(\varepsilon) + b_2(\varepsilon) \end{aligned},$$

то есть действительно $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{M}_{b_1+b_2}$.

Поэтому $X_N \in \mathcal{M}_{2b_w(\varepsilon)}$. Кроме того, в силу иррациональности сдвига S, последовательность $\{S^N(0)\}$ равномерно распредлена на торе $\mathbb{T}^{d-1}$. Поэтому (6) в случае $k = 1$ следует из (7).

Пусть $k > 1$. В этом случае (с учетом (2)) нам достаточно доказать оценку

$$\left| B_{n_1} - n_1 \int_{t_{S^N(0)}(\mathbb{T}(w))} c_k(x)dx \right| \le \Delta(n_1).$$

В [16] доказано, что для любой непрерывной функции f, любого класса $\mathcal{M}_b$ и для любой последовательности $x_1, \ldots, x_N, \ldots$ равномерно распределенной на торе $\mathbb{T}^{d-1}$ существует функция $\Delta(n)$ (зависязая от f, $b(\varepsilon)$ и от последовательности), удовлетворяющая условию $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta(n)}{n} = 0$ такая, что для любого $X \in M_b$ справедлива оценка

$$\left| \sum_{j=1, x_j \in X}^{n} f(x_n) - n \int_X f(x)dx \right| \le \Delta(n). \tag{8}$$

В качестве $\Delta(n)$ можно взять

$$\Delta(n) = 4n\omega_f \left(\sqrt[d-1]{\frac{\Delta_b(n)}{n}} \right),$$

где $\Delta_b(n)$ было определено выше и $\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y) : x, y \in \mathbb{T}^{d-1}, ||x-y||_{L_\infty} < \delta\}$ – многомерный аналог модуля непрерывности.

Оценка (6) следует из (8) с учетом того, что $c_k(x)$ непрерывна при $k > 1$ и все множества $t_{S^N(0)}(\mathbb{T}(w)) \in \mathcal{M}_{b_w(\varepsilon)}$.

Подставляя (6) в (4) и учитывая, что

$$\sum_{n_1=1}^{N-1} n_1((n_1+1)^{k-1} - n_1^{k-1}) = \sum_{n_1=1}^{N-1} n_1((k-1)n_1^{k-2} + O(n_1^{k-3})) =$$

$$= (k-1)\sum_{n_1=1}^{N-1} (n_1^{k-1} + O(n_1^{k-2})) = \frac{k-1}{k} N^k + O(N^{k-1})$$

после простых вычислений получаем требуемый результат.

Отметим, что формулу (2) для функции $c_k(x)$ можно также переписать в виде

$$c_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} \ldots \int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} \chi_w(x_1)\chi_w(x_2 - x_1) \ldots \chi_w(x_{k-1} - x_{k-2})\chi_w(x - x_{k-1}) dx_1 \ldots dx_{k-1}.$$

Доказательство получается при помощи многократного применения формулы (2).

Функция $c_k(x)$, возникающая в главном члене асимптотической формулы (3), имеет достаточно сложный вид. Поэтому возникает отдельная задача о нахождении эффективных оценок для этой функции.

Предложение 1. *Справедливо неравенство*

$$|c_k(x)| \leq \frac{(mes\mathbb{T}(w))^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{9}$$

Доказательство проводится индукцией по k. При $k=1$ оценка (9) немедленно следует из определения функции $c_1(x)$. Переход $k \to k+1$ следует из неравенств

$$|c_{k+1}(x)| = \frac{1}{k}|\int_{t_x(\mathbb{T}(w))} c_k(x)dx| \leq \frac{1}{k}\int_{t_x(\mathbb{T}(w))} |c_k(x)|dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{k}\frac{(mes\mathbb{T}(w))^{k-1}}{(k-1)!}\int_{t_x(\mathbb{T}(w))} 1dx \leq \frac{(mes\mathbb{T}(w))^{k}}{k!}.$$

3. Условия разрешимости

Цель данного параграфа – найти оценку для k, при которой неравенство $r_k(N) > 0$ будет выполняться для всех достаточно больших N.

Предложение 2. *Пусть*

$$\rho_k = \lim_{N\to\infty} \frac{\sharp\{n \leq N : r_k(N) > 0\}}{N}$$

– плотность множества натуральных чисел, для которых рассматриваемая нами аддитивная задача имеет решение. Тогда

$$\rho_k = \min\{1; kmes\mathbb{T}(w)\}. \tag{10}$$

Более того, существует постоянная $\widetilde{c}(w)$ такая, что при $k \geq [\frac{1}{mes\mathbb{T}(w)}] + 1$ выполняется неравенство

$$|c_k(x)| \geq \widetilde{c}(w)\frac{(mes\mathbb{T}(w))^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{11}$$

Вначале заметим, что в соответствии с теоремой 2 и равномерной распределенностью точек $S^N(0)$ на торе $\mathbb{T}^{d-1}$,

$$\rho_k = mes\{x \in \mathbb{T}^{d-1} : c_k(x) \neq 0\}.$$

Из определения (2) функции $c_k(x)$ вытекает, что

$$\operatorname{supp} c_1(x) = \mathbb{T}(w) \tag{12}$$

и

$$\operatorname{supp} c_{k+1}(x) = \{x : t_x(\mathbb{T}(w)) \cap \operatorname{supp} c_k(x) \neq \varnothing\}. \tag{13}$$

Здесь

$$\operatorname{supp} c_k(x) = \{x : c_k(x) \neq 0\}$$

– носитель функции $c_k(x)$. С учетом определения t_x, перепишем (13) в виде

$$\operatorname{supp} c_{k+1}(x) = \{x : x + \mathbb{T}(w) \cap \operatorname{supp} c_k(x) \neq \varnothing\}.$$

Пусть теперь $x \in \mathbb{T}(w)$, $y_k \in \operatorname{supp} c_k(x)$. Тогда

$$y_k - x \in \operatorname{supp} c_{k+1}(x). \tag{14}$$

Для двух множеств $X, Y \subseteq \mathbb{T}^{d-1}$, определим их сумму по Минковскому при помощи равенства

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}.$$

Тогда из (13) имеем

$$\mathbb{T}(w) + (-\mathrm{supp}\, c_k(x)) \subseteq \mathrm{supp}\, c_{k+1}(x). \tag{15}$$

В работе [17] была доказана оценка

$$mes(X + Y) \geq \min\{1; mesX + mesY\}. \tag{16}$$

Объединяя (15) и (16), получаем

$$\rho_{k+1} \geq \min\{1; mes\mathbb{T}(w) + \rho_k\}.$$

Поскольку из (12) вытекает, что

$$\rho_1 = mes\mathbb{T}(w),$$

справедливость (10) далее легко устанавливается индукцией по k.

Перейдем к доказательству (11). Вновь воспользуемся индукцией по k. При $k = [\frac{1}{mes\mathbb{T}(w)}]+1$ требуемое неравенство следует из (10) и компактности тора (любая функция не обращающаяся в нуль на некотором компактном множестве ограничена снизу на этом множестве некоторой положительной константой). Переход $k \to k+1$ следует из неравенств

$$|c_{k+1}(x)| = \frac{1}{k}|\int_{t_x(\mathbb{T}(w))} c_k(x)dx| \geq \frac{1}{k}\int_{t_x(\mathbb{T}(w))} |c_k(x)|dx \geq$$

$$\geq \widetilde{c}(w)\frac{1}{k}\frac{(mes\mathbb{T}(w))^{k-1}}{(k-1)!}\int_{t_x(\mathcal{T}(w))} 1dx \geq \widetilde{c}(w)\frac{(mes\mathbb{T}(w))^k}{k!}.$$

Следствие 1. *При условии $k \geq k(w) = [\frac{1}{mes\mathbb{T}(w)}] + 1$ $r_k(N) > 0$ для всех достаточно больших N. При $k < k(w)$ $r_k(N) = 0$ для бесконечно многих N.*

Для доказательства достаточно заметить, что в соотвествии с теоремой 2 $r_k(N) > 0$ для всех достаточно больших N тогда и только тогда, когда $c_k(x) > 0$ для всех x, то есть тогда и только тогда, когда $\rho_k = 1$. Далее остается воспользоваться предложением 2.

Для эффективного использования предложений 1, 2 и следствия 1 необходимо уметь находить меру множества $\mathbb{T}(w)$. Описание данных множеств, полученное в [12] (см. также теорему 1) дает следующий способ вычисления $mes\mathbb{T}(w)$.

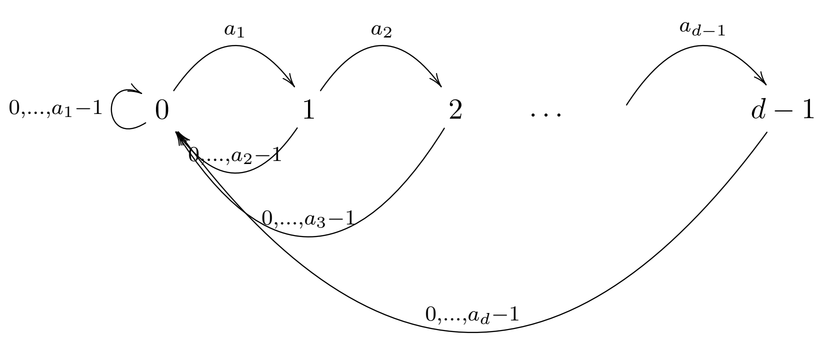
Рассмотрим граф, содержащий d вершин, помеченных числами $0, 1, \ldots, d-1$. Ребра графа имеют следующий вид:

1) a_1 ориентированных петель в вершине 0, помеченных числами от 0 до $a_1 - 1$;

2) ориентированные ребра из вершины i в вершину $i+1$, помеченные числами a_i;

3) a_{i+1} ориентированных ребер из вершины i в вершину 0, помеченные числами от 0 до $a_{i+1} - 1$.

Обозначим данный граф через Gr. Он имеет следующий вид.



Каждому конечному пути $v_0 \xrightarrow{c_0} v_1 \xrightarrow{c_1} \ldots \xrightarrow{c_{m-1}} v_m$ в графе $G(\beta)$ можно сопоставить слово $c_0 c_1 \ldots c_{m-1}$, составленное из меток ребер пути. Пусть $J(w)$ – множество вершин графа $G(\beta)$ для которых существует путь в Gr, начинающийся в вершине j, которому сопоставлено слово w.

Рассмотрим уравнение

$$x^d - a_1 x^{d-1} - a_2 x^{d-2} - \ldots - a_d x_d = 0.$$

Из условия на коэффициенты

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{d-1} \geq a_d = 1$$

вытекает [18], что наибольший по модулю корень β уравнения действительный, причем $\beta > 1$. Все остальные корни данноо уравнения по модулю меньше 1. Другими словами, β является числом Пизо.

Предложение 3. *Справедливо равенство*

$$mes\mathbb{T}(w) = \frac{\sum_{j \in J(w)} \beta^{d-1-j-|w|}}{\sum_{l=0}^{d-1} \beta^l}.$$

Следствие 2. *Пусть длина допустимого слова w равна m. Тогда при условии $k \geq [\beta^{|w|-d+1} \frac{\beta^d - 1}{\beta - 1}] + 1$ $r_k(N) > 0$ для всех достаточно больших N.*

Достаточно доказать, что

$$k(w) = \left[\frac{1}{mes\mathbb{T}(w)}\right] + 1 \leq \left[\frac{\beta^{d+m} - \beta^m}{\beta^d - \beta^{d-1}}\right] + 1.$$

В силу предложения 3 имеем

$$k(w) = 1 + \left[\frac{\sum_{l=0}^{d-1} \beta^l}{\sum_{j \in J(w)} \beta^{d-1-j-m}}\right].$$

Проверяя, что $0 \in J(w)$ для всех допустимых слов w находим

$$k(w) \leq 1 + \sum_{l=0}^{d-1} \beta^{m+l-d+1}. \tag{17}$$

Просуммировав полученную геометрическую прогрессию, после простых преобразований получаем требуемый результат.

Следствие 3. *Пусть w – допустимое слово длины $m \geq d-1$. Тогда при условии $k \geq 1 + (a_1+1)^{m-d+1} \frac{(a_1+1)^d - 1}{a_1}$ имеем $r_k(N) > 0$ для всех достаточно больших N.*

Пусть $P(x) = x^d - a_1 x^{d-1} - a_2 x^{d-2} - \ldots - a_d x_d$. Так как коэффициенты многочлена $P(x)$ не возрастают и $a_d = 1$ при $t > 0$ имеем

$$P(x) \geq x^d - a_1(x^{d+1} + \ldots + 1) = x^d - a_1 \frac{x^d - 1}{x - 1} = \frac{x^d(x - a_1 - 1) + a_1}{x - 1}.$$

Так как $a_1 > 1$, отсюда получаем, что $P(x) > 0$ при $x > a_1 + 1$ и, следовательно,

$$\beta < a_1 + 1.$$

Так как $m \geq d-1$, при $l \geq 0$ имеем $m+l-d+1 \geq 0$ и

$$\beta^{m+l-d+1} < (a+1)^{m+l-d+1}.$$

Подспавляя данную оценку в (17) и суммируя геометрическую прогрессию, получаем, что

$$k(w) \leq 1 + (a_1+1)^{m-d+1}\frac{(a_1+1)^d - 1}{a_1},$$

что и требовалось.

4. Асимптотика для среднего числа решений

Рассмотрим также среднее число решений

$$sr_k(N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} r_k(N).$$

Теорема 3. *Для любого допустимого слова w справедлива асимптотическая формула*

$$sr_k(N) \sim \frac{(mes\mathbb{T}(w))^{k-1}}{k!}N^{k-1}.$$

С учетом теоремы 2, имеем

$$sr_k(N) \sim \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} c_k(S^n(0))n^{k-1}.$$

Используя формулу суммирования по частям, получаем

$$sr_k(N) = \frac{1}{N}\left(B_N N^{k-1} - \sum_{n=1}^{N-1}((n+1)^{k-1} - n^{k-1})\right),$$

где

$$B_n = \sum_{j=1}^{n} c_k(S^j(0)).$$

Рассуждая аналогично доказательству теоремы 2, находим, что

$$B_n \sim C_k n$$

и

$$sr_k(N) \sim \frac{C_k}{k}N^{k-1}.$$

Здесь

$$C_k = \int_{\mathbb{T}^{d-1}} c_k(x)dx.$$

Для завершения доказательства теоремы 3 остается доказать, что

$$C_k = \frac{(mes\mathbb{T}(w))^k}{(k-1)!}.$$

Доказательство будем проводить индукцией по k. При $k = 1$ имеем

$$C_1 = \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \chi_w(x)dx = mes\mathbb{T}(w),$$

что и требуется.

Рассмотрим переход $k \to k+1$. Нам достаточно показать, что

$$C_{k+1} = \frac{mes\mathbb{T}(w)}{k} C_k.$$

Согласно определению,

$$C_{k+1} = \int_{\mathbb{T}^{d-1}} c_{k+1}(x)dx = \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \frac{1}{k} \int_{t_x(\mathbb{T}(w))} c_{k-1}(t)dtdx.$$

Сделаем замену $t \to t - x$ во внутреннем интеграле. Тогда

$$C_{k+1} = \frac{1}{k} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \int_{-\mathbb{T}(w)} c_{k-1}(t-x)dtdx.$$

Меняя интегралы местами и замечая, что интеграл от функции по всему тору инвариантен относительно сдвига аргумента, получаем

$$C_{k+1} = \frac{1}{k} \int_{-\mathbb{T}(w)} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} c_{k-1}(t-x)dtdx = \frac{1}{k} \int_{-\mathbb{T}(w)} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} c_{k-1}(t)dtdx =$$

$$= \frac{1}{k} \int_{-\mathbb{T}(w)} C_k dx = \frac{mes\mathbb{T}(w)}{k} C_k,$$

что и требовалось.

5. Заключение

В работе получена асимптотическая формула для числа представлений натуральных чисел в виде суммы заданного числа слагаемых с фиксированным окончанием разложения по линейной рекуррентной последовательности порядка d. В основе доказательства лежит полученное ранее описание данных чисел в терминах орбит некоторого сдвига S тора размерности $d-1$, а также полученная в настоящей работе асимптотическая формула для числа решений уравнения $n_1 + \ldots + n_k = N$ с условиями на слагаемые вида $S^{n_j}(0) \in X$, где X – некоторая область на торе. Ранее аналогичные результаты были известны только в случае $d = 2$.

Поскольку главный член асимптотики для числа решений содержит некоторую очень сложно устроенную функцию, поучена также простая верхняя оценка на число решений. Кроме того, найдены нижние оценки на k, гарантирующие, что любое достаточно большое натуральное число будет представимо в виде суммы k слагаемых с фиксированным окончанием разложения по линейной рекуррентной последовательности. Также получена асимптотика для среднего числа решений, имеющая принципиально более простой вид.

В случае $d = 2$ в серии работ Гриценко и Мотькиной [19]–[22] были получены более сильные результаты, касающиеся решения ряда классических проблем теории чисел в числах, удовлетворяющих условиям вида $\{n\alpha\} \in I$ (с алгебраическим α). Было бы интересно получить аналог этих результатов для произвольного d.

Также было бы интересно заменить условия вида $S^{n_j}(0) \in X$ на более общие условия $S_j^{n_j}(0) \in X_j$, где $S_1, \ldots, S_k$ – различные сдвиги торов (возможно различной размерности).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Drmota M., Gajdosik J. The Parity of the Sum-of-Digits-Function of Generalized Zeckendorf Representations // Fibonacci Quarterly. 1998. Vol. 36, № 1. P. 3-19.

2. Lamberger M., Thuswaldner J. W. Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences // Mathematicf Slovaca. 2003. Vol. 53, № 1. P. 1-20.

3. Shutov A. On sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers // Fibonacci Quarterly. 2020. Vol. 58, № 3. P. 203-207.

4. Шутов А.В. Об одной сумме, связанной с системой счисления Фибоначчи // Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20, № 2. С. 271-275.

5. Drmota M., Gajdosik J. The distribution of the sum-of-digits function // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1998. Vol. 10, № 1. P. 17-32.

6. Жукова А.А., Шутов А.В. Об аналоге задачи Гельфонда для обобщенных разложений Цеккендорфа // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 2. С. 104–120.

7. Журавлев В.Г. Четно-фибоначчевы числа: бинарная аддитивная задача, распрделение по прогрессиям и спектр // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 3. С. 18-46.

8. Давлетярова Е.П., Жукова А.А., Шутов А.В. Геометризация системы счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, $\mathcal{N}$ 6. С. 1-23.

9. Давлетярова Е.П., Жукова А.А., Шутов А.В. Геометризация обобщенных систем счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, вып. 2. С. 88-112.

10. Жукова А. А., Шутов А. В. Геометризация систем счисления // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, Вып. 4. С. 222—245.

11. Parry W. On the β-expansions of real numbers // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1960. Vol. 11, № 3. P. 401–416.

12. Шутов А.В. Обобщенные разбиения Рози и линейные рекуррентные последовательности // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 2. С. 313-333.

13. Шутов А.В. Об одной аддитивной задаче с дробными долями // Науч. вед. БелГУ. Сер. мат. физ., 2013. Т. 5 (148):30. С. 111–120.

14. Жукова А.А., Шутов А. В. Аддитивная задача с k числами специального вида // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 166. С. 10–21.

15. Niederreiter H., Wile M. Diskrepanz und Distanz von Maßlen bezüglich konvezer und Jordanscher Mengen // Math. Z. 1975. Vol. 144. P. 125–134.

16. Götz M. Discrepancy and error in integration // Monatsh. Math. 2002. Vol. 136. P. 99–121.

17. Macbeath A.M. On measure of sum sets II: the sum theorem for the torus // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1953. Vol.49. № 1. P. 40–43.

18. Frougny C., Solomyak B. Finite beta-expansions // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 1992. Vol. 12, № 4. P. 713-–723.

19. Гриценко С.А., Мотькина Н.Н. Задача Хуа-Локена с простыми числами специального вида // ДАН республики Таджикистан. 2009. Т. 52, № 7. С. 497-500.

20. Гриценко С.А., Мотькина Н.Н. О теореме Чудакова в простых числах специального вида // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, № 4. С. 75-84.

21. Гриценко С.А., Мотькина Н.Н. Об одном варианте тернарной проблемы Гольдбаха // ДАН республики Таджикистан. 2009. Т. 52, № 6. С. 413-417.

22. Гриценко С.А., Мотькина Н.Н. Проблема Варинга с натуральными числами специального вида // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, № 3. С. 31-47.

REFERENCES

1. Drmota, M. & Gajdosik, J. 1998, "The Parity of the Sum-of-Digits-Function of Generalized Zeckendorf Representations", *Fibonacci Quarterly*, vol. 36, no. 1, pp. 3-19. doi: 10.1007/s002290050221.

2. Lamberger, M., Thuswaldner, J. W. 2003, "Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences", *Mathematicf Slovaca*, vol. 53, no. 1, pp. 1-20.

3. Shutov, A. 2020, "On sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers", *Fibonacci Quarterly*, vol. 58, no. 3, pp. 203-207.

4. Shutov, A. V. 2020, "On one sum associated with Fibonacci numeration system", *Far Eastern Mathematical Journal*, vol. 20, no. 2, pp. 271-275. (Russian). doi: 10.47910/FEMJ202028

5. Drmota, M. & Gajdosik, J. 1998, "The distribution of the sum-of-digits function", *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux*, vol. 10, no. 1. pp. 17-32. doi:10.5802/jtnb.216.

6. Zhukova, A.A. & Shutov, A.V. 2021, "On Gelfond-type problem for generalized Zeckendorf representations", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 104–120. (Russian). doi:10.22405/2226-8383-2018-22-2-104-120.

7. Zhuravlev, V. G. 2008. "Chetno-fibonachchevy chisla: binarnaja additivnaja zadacha, raspredelenie po progressijam i spectr", *Algebra i analiz*, vol. 20, no. 3, pp. 18-46. (Russian) translation in St. Petersburg Mathematical Journal, 2009, 20:3, 339-360. doi: 10.1090/S1061-0022-09-01051-6.

8. Davletjarova, E. P., Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2013. "Geometrizacija sistemy schislenija Fibonacci i ee prilozhenija k teorii chisel" *Algebra i analiz*, vol. 25, no. 6, pp. 1-23. (Russian) translation in St. Petersburg Mathematical Journal, 2014, 25:6, 893-907. doi:10.1090/S1061-0022-2014-01321-0.

9. Davletjarova, E. P., Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2016. "Geometrizacija obobshhennyh sistem schislenija Fibonacci i ee prilozhenija k teorii chisel" *Chebyshevskii sbornik*, vol. 17, no. 2, pp. 88-112. (Russian)

10. Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2017, "Geometrization of numeration systems", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 222—245. doi:10.22405/2226-8383-2017-18-4-221-244.

11. Parry, W. 1950, "On the β-expansions of real numbers", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, vol. 11, no. 3, pp. 401–416. doi:10.1007/BF02020954.

12. Shutov, A.V. 2021. "Generalized Rauzy tilings and linear recurrence sequences", *Chebyshevskii Sbornik* vol. 22, no. 2, pp. 313–333. (Russian). doi: 10.22405/2226-8383-2018-22-2-313-333.

13. Shutov, A. V. 2013. “On one additive problem with fractional parts“, *Nauchn. ved. BelGU. Ser. math. phys.*, vol. 5 (148):30, pp. 111–120.

14. Zhukova, A.A. & Shutov, A.V. 2022. “Additive Problem with k Numbers of a Special Form“, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 260, pp. 163–174. doi: 10.1007/s10958-022-05681-7.

15. Niederreiter, H. & Wile, M. 1975. “Diskrepanz und Distanz von Maßlen bezüglich konvezer und Jordanscher Mengen“, *Math. Z.*, vol. 144, no. 1, pp. 125-134. doi:/10.1007/BF01190941.

16. Götz, M. 2002. “Discrepancy and error in integration“, *Monatsh. Math.*, vol. 136, pp. 99–121. doi:10.1007/s006050200037.

17. Macbeath, A.M. 1953. “On measure of sum sets II: the sum theorem for the torus“ *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol.49, no. 1, pp. 40–43. doi:10.1017/S0305004100028012.

18. Frougny, C. & Solomyak, B. 1992, “Finite beta-expansions“, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, vol. 12. no. 4, pp. 713-–723. doi:10.1017/S0143385700007057.

19. Gricenko, S. A. & Mot’kina, N. N. 2009. “Zadacha Hua-Lokena s prostymi chislami special’nogo vida“, *DAN respubliki Tadzhikistan*, Vol. 52, no. 7, pp. 497-500. (Russian).

20. Gricenko, S. A. & Mot’kina, N. N. 2011. “On Chudakov’s theorem involving primers of a special type“, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 12, no. 4, pp. 75-84. (Russian).

21. Gricenko, S.A. & Mot’kina, N. N. 2009. “Ob odnom variante ternarnoj problemy Gol’dbaha“, *DAN respubliki Tadzhikistan*, Vol. 52, no. 6, pp. 413-417. (Russian).

22. Gricenko, S.A. & Mot’kina, N. N. 2014. “Waring’s promblem involving natural numbers of a special type“, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 15, no. 3, pp. 31-47. (Russian).

Получено: 25.04.2023

Принято в печать: 12.09.2023