

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 3.

УДК 517.9+531.01

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-190-211

**Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем с четырьмя степенями свободы**

М. В. Шамолин

**Шамолин Максим Владимирович** — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru*

**Аннотация**

Обнаружение достаточного количества тензорных инвариантов (и не только первых интегралов), как известно [13, 14, 45], позволяет проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Как известно, для консервативных систем этот факт естественен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать трансцендентные (т.е. имеющие существенно особые точки, в смысле комплексного анализа) функции (см. также [1, 23, 24]).

Кратко приведем примеры часто встречающихся тензорных инвариантов. Скалярные инварианты — это первые интегралы рассматриваемой системы. Инвариантные векторные поля — поля симметрий для данной системы (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (что, в основном, и проведено в данной работе) порождают интегральные инварианты рассматриваемой системы. При этом само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов рассматриваемой системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из  $n$  дифференциальных уравнений, помимо упомянутого тривиального инварианта, надо знать еще  $n - 1$  независимых тензорных инвариантов.

В работе предъявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

*Ключевые слова:* динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма.

*Библиография:* 47 названий.

**Для цитирования:**

М. В. Шамолин. Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем с четырьмя степенями свободы // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 3, с. 190–211.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 3.

UDC 517.9+531.01

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-190-211

**Some tensor invariants of geodesic, potential, and dissipative systems with four degrees of freedom**

M. V. Shamolin

**Shamolin Maxim Vladivirovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru*

**Abstract**

The detection of a sufficient number of tensor invariants (and not only the first integrals), as [13, 14, 45] is known, allows integrating a system of differential equations. For example, the presence of an invariant differential form of the phase volume makes it possible to reduce the number of required first integrals. As you know, this fact is natural for conservative systems. For systems with attracting or repelling limit sets, not only some first integrals, but also the coefficients of the available invariant differential forms should, generally speaking, include transcendental (i.e. having essentially singular points, in the sense of complex analysis) functions (see also [1, 23, 24]).

We briefly give examples of frequently occurring tensor invariants. Scalar invariants are the first integrals of the system under consideration. Invariant vector fields are symmetry fields for a given system (they commute with the vector field of the system under consideration). The phase flows of systems of differential equations generated by these fields translate the solutions of the system in question into solutions of the same system. Invariant external differential forms (which is mainly carried out in this paper) generate integral invariants of the system under consideration. At the same time, the vector field of the system under consideration itself is one of the invariants (a trivial invariant). Knowledge of tensor invariants of the system of differential equations under consideration facilitates both its integration and qualitative research. Our approach consists in the fact that in order to accurately integrate an autonomous system of  $n$  differential equations, in addition to the mentioned trivial invariant, it is necessary to know  $n - 1$  independent tensor invariants.

In this paper, we present tensor invariants (differential forms) for homogeneous dynamical systems on the tangent bundles of smooth four-dimensional manifolds and demonstrate the connection between the availability of these invariants and the existence of a complete set of first integrals, which is necessary for integrating of geodesic, potential, and dissipative systems.

**Keywords:** dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form.

**Bibliography:** 47 titles.

**For citation:**

M. V. Shamolin, 2023, “Some tensor invariants of geodesic, potential, and dissipative systems with four degrees of freedom”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 190–211.

**Введение**

Как показано ранее, задача о движении пятимерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать, как “поток

набегающей среды, заполняющей объемлющее пятимерное пространство”, приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [7, 16, 22, 29]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (т.е. имеющих существенно особые точки) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Такое же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по четырехмерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего пятимерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим четырехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского (например, в модели Клейна) и т.д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил [18, 26, 32].

Важные частные случаи систем с четырьмя степенями свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в работах автора [33, 34, 36]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [43, 44]). Показана связь наличия данных инвариантов с полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в рассматриваемые системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные (см. также [40, 41, 42]).

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, четырехмерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. И в заключение рассматривается усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Указываются достаточные условия интегрируемости.

## 1. Инварианты систем геодезических на касательном расслоении к четырехмерному многообразию

Рассмотрим гладкое четырехмерное риманово многообразие  $M^4\{\alpha, \beta\}$  с координатами  $(\alpha, \beta)$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , римановой метрикой  $g_{ij}(\alpha, \beta)$ , порождающей аффинную связность  $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ , и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении  $TM^4\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  (ср. с [2, 3, 8]) при изменении координат на нем. Для этого рассмотрим далее достаточно общий случай задания новых кинематических соотношений в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= z_4 f_4(\alpha), \\ \dot{\beta}_1 &= z_3 f_1(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 &= z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ \dot{\beta}_3 &= z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$  — достаточно гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты  $z_1, \dots, z_4$ , в касательном пространстве вводятся тогда, когда

рассматриваются уравнения геодезических [17, 19, 35], например, с 13 ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на четырехмерных поверхностях вращения, в пространстве Лобачевского и т.д.):

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае (1) необходимые соотношения, их дополняющие на касательном расслоении  $TM^4\{z_4, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  примут вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -f_4(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_4 - f_1(\alpha) \left[ 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1 z_3 - \\ &\quad - f_2(\alpha) g_1(\alpha) \left[ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] z_1 z_2, \\ \dot{z}_2 &= -f_4(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_4 - f_1(\alpha) \left[ 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_2 z_3 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1)}{f_2(\alpha) g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) z_1^2, \\ \dot{z}_3 &= -f_4(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_4 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \\ \dot{z}_4 &= -f_4(\alpha) \left[ \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta) z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta) z_1^2, \end{aligned} \quad (3)$$

и уравнения (2) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (1), (3) на многообразии  $TM^4\{z_4, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  с новыми координатами  $z_1, \dots, z_4$  на касательном пространстве.

Отметим ряд задач, приводящих к уравнениям (2) (к системе (1), (3)).

(a) Системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для движения динамически симметричного пятимерного твердого тела (см. также [40, 42]).

(b) Системы на касательных расслоениях более общих четырехмерных поверхностях вращения.

(c) Системы на касательном расслоении четырехмерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (1), (3) достаточно знать пять независимых тензорных инвариантов: или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством пять. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. с [6, 11, 12]).

И то, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет показано ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических (2), переписанных в виде

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^4 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (4)$$

является гладкая функция

$$\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^4 g_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k, \quad (5)$$

но мы представим его в более простой форме.

Кроме того, в следующей теореме 1 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений на 20 функций: на 7 функций  $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$  из (1) и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности  $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ .

Отметим также, что в [10, 15, 41] рассмотрены примеры систем геодезических на четырехмерной сфере с различными метриками, а в [7] — примеры систем геодезических на четырехмерных поверхностях вращения и в пространстве Лобачевского.

**ТЕОРЕМА 1.** *Если выполнены условия*

$$f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) =: f(\alpha), \quad g_1(\beta_1) \equiv g_2(\beta_1) =: g(\beta_1), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha), \\ \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \quad \Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_3(\beta_2), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) g^2(\beta_1) \equiv \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) =: \Gamma_4(\alpha), \\ \Gamma_{22}^1(\beta_1) &\equiv h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2), \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \\ f_4^2(\alpha) \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] &+ f^2(\alpha) \Gamma_4(\alpha) \equiv 0, \\ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\beta_1) &\equiv 0, \\ 2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} + h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\beta_2) &\equiv 0, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

то система (1), (3) обладает полным набором, состоящим из пяти первых интегралов вида

$$\Phi_1(z_4, \dots, z_1) = z_1^2 + \dots + z_4^2 = C_1^2 = const; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \Phi_0(\alpha) = C_2 = const, \\ \Phi_0(\alpha) &= f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta_1) &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) = C_3 = const, \\ \Psi_1(\beta_1) &= g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\Phi_4(z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= z_1 \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) = C_3 = \text{const}, \\ \Psi_2(\beta_2) &= h(\beta_2) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \Gamma_3(b) db \right\};\end{aligned}\quad (12)$$

$$\Phi_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const}.\quad (13)$$

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = f_4(\alpha) \frac{d}{d\tau}\quad (14)$$

и фазовых

$$\begin{aligned}w_4 &= z_4, \quad w_3^* = \ln |w_3|, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \\ w_s^* &= \ln \left| w_s + \sqrt{1 + w_s^2} \right|, \quad s = 1, 2, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}\end{aligned}\quad (15)$$

— фазовый поток системы (1), (3) сохраняет фазовый объем с постоянной плотностью на касательном расслоении  $TM^4\{w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ , т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма

$$dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3.\quad (16)$$

Видно, что условий (6)–(8) заведомо меньше (их 16), чем количество “произвольных” функций  $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$  из (1) (их 7) и 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности  $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$  (т.е. всего их 20).

Заметим также, что система равенств (8) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (9) (или см. ниже (24)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [4, 10, 20, 21, 27]). Ну а поиск как интеграла (9), так и (10)–(13) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий [28, 30, 31].

**ПРИМЕР 5.** В случае обобщенных сферических координат  $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , когда метрика на четырехмерной сфере  $\mathbf{S}^4$  индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства (задача класса (а)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - \left[ \dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 \right] \sin \alpha \cos \alpha = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_2) \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \dot{\beta}_3^2 \sin \beta_2 \cos \beta_2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + 2\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} = 0, \end{cases}\quad (17)$$

и имеющая первые интегралы (9)–(13), примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = -z_4, \\ \dot{z}_4 = -(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}, \\ \dot{z}_3 = z_3 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} + (z_1^2 + z_2^2) \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \\ \dot{z}_2 = z_2 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} - z_2 z_3 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} - \\ - z_1^2 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \\ \dot{z}_1 = z_1 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} - z_1 z_3 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} + \\ + z_1 z_2 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \\ \dot{\beta}_1 = z_3 \frac{1}{\sin \alpha \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \\ \dot{\beta}_2 = -z_2 \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \\ \dot{\beta}_3 = z_1 \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad \nu_1 \in \mathbf{R}, \end{array} \right. \quad (18)$$

если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы (18) рассматривать как новые кинематические соотношения.

**ПРИМЕР 6.** В случае обобщенных сферических координат  $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , но когда метрика на четырехмерной сфере  $\mathbf{S}^4$  индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (см. также [31], задача класса (a)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\alpha} - \left[ \dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 \right] \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - (\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_2) \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \dot{\beta}_3^2 \sin \beta_2 \cos \beta_2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + 2 \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} = 0, \end{array} \right. \quad (19)$$

и имеющая первые интегралы (9)–(13), примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
\dot{\alpha} &= -z_4, \\
\dot{z}_4 &= -(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}, \\
\dot{z}_3 &= z_3 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} + (z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \\
\dot{z}_2 &= z_2 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} - \\
&\quad - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1 \sin \beta_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \\
\dot{z}_1 &= z_1 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} + \\
&\quad + z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1 \sin \beta_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \\
\dot{\beta}_1 &= z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \\
\dot{\beta}_2 &= -z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \\
\dot{\beta}_3 &= z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad \nu_1 \in \mathbf{R},
\end{aligned} \right. \quad (20)$$

если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы (20) рассматривать как новые кинематические соотношения.

**ПРИМЕР 7.** В случае геодезических в четырехмерном пространстве Лобачевского (с координатами  $x = \beta_1, y = \beta_2, z = \beta_3, w = \alpha$ , задача класса (с)) четырехпараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\left\{ \begin{aligned}
\ddot{\alpha} - \frac{1}{\alpha}(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_1^2 - \dot{\beta}_2^2 - \dot{\beta}_3^2) &= 0, \\
\ddot{\beta}_1 - \frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 &= 0, \\
\ddot{\beta}_2 - \frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 &= 0, \\
\ddot{\beta}_3 - \frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 &= 0,
\end{aligned} \right. \quad (21)$$

и имеющая первые интегралы (9)–(13), примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = z_4 \nu_1 \alpha, \\ \dot{z}_4 = -z_3^2 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_2} - z_2^2 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_3} - z_1^2 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_4}, \\ \dot{z}_3 = z_3 z_4 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_2}, \\ \dot{z}_2 = z_2 z_4 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_3}, \\ \dot{z}_1 = z_1 z_4 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_4}, \\ \dot{\beta}_1 = z_3 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_2}}, \\ \dot{\beta}_2 = z_2 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_3}}, \\ \dot{\beta}_3 = z_1 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_4}}, \quad \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \in \mathbf{R}, \end{array} \right. \quad (22)$$

если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы (22) рассматривать как новые кинематические соотношения.

## 2. Инварианты систем на касательном расслоении к четырехмерному многообразию в потенциальном силовом поле

Теперь несколько модифицируем составную динамическую систему (1), (3) и получим систему *консервативную*. А именно, внесем с систему гладкое (внешнее) консервативное силовое поле в проекциях на оси  $\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_4$  соответственно:

$$\tilde{F}(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_3) f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2) \\ F_2(\beta_2) f_2(\alpha) g_1(\beta_1) \\ F_3(\beta_1) f_1(\alpha) \\ F_4(\alpha) f_4(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении  $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  примет вид

$$\left\{ \begin{aligned}
& \dot{\alpha} = z_4 f_4(\alpha), \\
& \dot{z}_4 = F_4(\alpha) f_4(\alpha) - f_4(\alpha) \left[ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) z_3^2 - \\
& \quad - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) z_2^2 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \\
& \dot{z}_3 = F_3(\beta_1) f_1(\alpha) - f_4(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_4 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_2^2 - \\
& \quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \\
& \dot{z}_2 = F_2(\beta_2) f_2(\alpha) g_1(\beta_1) - f_4(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_4 - \\
& \quad - f_1(\alpha) \left[ 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_2 z_3 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) z_1^2, \\
& \dot{z}_1 = F_1(\beta_3) f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2) - f_4(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_4 - \\
& \quad - f_1(\alpha) \left[ 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1 z_3 - f_2(\alpha) g_1(\alpha) \left[ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] z_1 z_2, \\
& \dot{\beta}_1 = z_3 f_1(\alpha), \\
& \dot{\beta}_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\
& \dot{\beta}_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2),
\end{aligned} \right. \quad (23)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \ddot{\alpha} - F_4(\alpha) f_4^2(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\
& \ddot{\beta}_1 - F_3(\beta_1) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\
& \ddot{\beta}_2 - F_2(\beta_2) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\
& \ddot{\beta}_3 - F_1(\beta_3) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 = 0
\end{aligned} \right.$$

на касательном расслоении  $TM^4\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ .

**ТЕОРЕМА 2.** Если выполнены условия (6)–(8), то система (23) обладает полным набором, состоящим из пяти первых интегралов вида

$$\begin{aligned}
\Phi_1(z_4, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= z_1^2 + \dots + z_4^2 + V(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_1 = \text{const}, \\
V(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= V_4(\alpha) + \sum_{k=1}^3 V_{4-k}(\beta_k) = -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_4(a) da - 2 \sum_{k=1}^3 \int_{\beta_{k,0}}^{\beta_k} F_{4-k}(b) db,
\end{aligned} \quad (24)$$

а также при  $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$ ,  $k = 1, 2, 3$  — первых интегралов (10)–(13).

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной (14) и фазовых (15) — фазовый поток системы (23) сохраняет фазовый объем с постоянной плотностью на касательном расслоении  $TM^4\{w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ , т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма (16).

### 3. Инварианты систем на касательном расслоении к четырехмерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией

Теперь несколько модифицируем систему (23). При этом получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент  $b\delta(\alpha)$ ,  $b > 0$ , в первом уравнении системы (25) (в отличие от системы (23)), но и следующая линейная зависимость гладкого (внешнего) силового поля от  $z_1, \dots, z_4$  в проекциях на оси  $\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_4$  соответственно:

$$\tilde{F}(z_4, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) \\ F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) \\ F_3(\beta_1)f_1(\alpha) \\ F_4(\alpha)f_4(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ z_2 F_2^1(\alpha) \\ z_3 F_3^1(\alpha) \\ z_4 F_4^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении  $TM^4\{z_4, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_4 = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f_4(\alpha) \left[ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) z_3^2 - \\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) z_2^2 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2 + z_4 F_4^1(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F_3(\beta_1)f_1(\alpha) - f_4(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_4 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_2^2 - \\ - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) z_1^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot{z}_2 = F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) - f_4(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_4 - \\ - f_1(\alpha) \left[ 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_2 z_3 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot{z}_1 = F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) - f_4(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_4 - \\ - f_1(\alpha) \left[ 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1 z_3 - f_2(\alpha)g_1(\alpha) \left[ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] z_1 z_2 + \\ + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \dot{\beta}_1 = z_3 f_1(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 = z_2 f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \\ \dot{\beta}_3 = z_1 f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2), \end{cases} \quad (25)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \ddot{\alpha} - \left\{ b\tilde{\delta}(\alpha) + F_4^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \dot{\alpha} - \\
& - F_4(\beta_1) f_4^2(\alpha) + b\delta(\alpha) F_4^1(\alpha) + b^2 \delta^2(\alpha) \left[ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \right] + \\
& + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\
& \ddot{\beta}_1 - \left\{ F_3^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \dot{\beta}_1 - \\
& - F_3(\beta_1) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\
& \ddot{\beta}_2 - \left\{ F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \dot{\beta}_2 - \\
& - F_2(\beta_2) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\
& \ddot{\beta}_3 - \left\{ F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \dot{\beta}_3 - \\
& - F_1(\beta_3) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 + \\
& + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 = 0
\end{aligned} \right.$$

на касательном расслоении  $TM^4\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ . Здесь, как и выше,

$$\tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}.$$

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (25) при выполнении свойств (6)–(8), а также при отсутствии проектирования внешней силы на оси  $\dot{z}_1$ ,  $\dot{z}_2$  и  $\dot{z}_3$  (т.е. присутствует проекция внешней силы лишь на ось  $\dot{z}_4$ ):

$$F_1(\beta_3) \equiv F_2(\beta_2) \equiv F_3(\beta_1) \equiv 0.$$

Тогда система (25) допускает отделение независимой подсистемы седьмого порядка:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \dot{\alpha} = z_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\
& \dot{z}_4 = F_4(\alpha) f_4(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) z_3^2 - \\
& - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1) z_2^2 - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta_1, \beta_2) z_1^2 + z_4 F_4^1(\alpha), \\
& \dot{z}_3 = -f_4(\alpha) \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_4 - f(\alpha) g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\beta_1) z_2^2 - \\
& - f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2) z_1^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \\
& \dot{z}_2 = -f_4(\alpha) \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_4 - f(\alpha) \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_2 z_3 - \\
& - f(\alpha) g(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\beta_2) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\
& \dot{z}_1 = -f_4(\alpha) \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_4 - f(\alpha) \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1 z_3 - \\
& - f(\alpha) g(\alpha) \left[ 2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\
& \dot{\beta}_1 = z_3 f_1(\alpha), \\
& \dot{\beta}_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1),
\end{aligned} \right. \quad (26)$$

при наличии также восьмого уравнения

$$\dot{\beta}_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2). \quad (27)$$

Наложим определенные ограничения на силовое поле, которое, как отмечалось, в явном виде вводит в систему диссипацию разного знака. Поэтому предположим, что выполнены (в некотором смысле, технические) равенства:

$$F_1^1(\alpha) \equiv F_2^1(\alpha) \equiv F_3^1(\alpha) = F^1(\alpha). \quad (28)$$

Для полного интегрирования (по Якоби [1, 2, 5]) рассматриваемой системы (26), (27) при условии (28) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad (29)$$

система (26), (27) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_4 f_4(\alpha) + b \delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = F_4(\alpha) f_4(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) w_3^2 + w_4 F_4^1(\alpha), \\ \dot{w}_3 = \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) w_3 w_4 + w_3 F^1(\alpha), \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_2 = \pm w_3 \sqrt{\frac{1 + w_2^2}{1 + w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1) \left[ 2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right], \\ \dot{\beta}_2 = \pm \frac{w_2 w_3}{\sqrt{(1 + w_1^2)(1 + w_2^2)}} f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \pm w_3 \sqrt{1 + w_1^2} f(\alpha) \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \frac{w_1 w_3}{\sqrt{1 + w_1^2}} f(\alpha), \end{cases} \quad (32)$$

$$\dot{\beta}_3 = \pm \frac{w_3}{\sqrt{(1 + w_1^2)(1 + w_2^2)}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2). \quad (33)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (30)–(33) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (30), по одному — для систем (31) и (32) (после соответствующих замен независимого переменного в них) и дополнительный тензорный инвариант, “привязывающий” уравнение (33) (т.е. всего *пять*).

Продолжим определенные ограничения на силовое поле. Будем также предполагать, что для некоторого  $\kappa \in \mathbf{R}$  выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad (34)$$

$$\tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)},$$

а для некоторых  $\lambda_k^0, \lambda_k^1 \in \mathbf{R}$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} F_4(\alpha) &= \lambda_4^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda_4^0 \tilde{\Delta}(\alpha) \Delta(\alpha); \\ F_k^1(\alpha) &= \lambda_k^1 f_4(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha) = \lambda_k^1 \tilde{\Delta}(\alpha) f_4(\alpha), \quad k = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (35)$$

Условие (34) назовем “геометрическим”, а условия из группы (35) — “энергетическими”. При этом  $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda_3^1 = \lambda^1$ , в силу (28).

Условие (34) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности  $\Gamma_4(\alpha)$ , приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции  $\Delta(\alpha)$  при участии функции  $f(\alpha)$ , входящей в кинематические соотношения.

Условия группы (35) названы энергетическими в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к “силовой” функции  $\Delta^2(\alpha)/2$  (или  $\Delta(\alpha)$ ), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции  $\Delta(\alpha)$ ). При этом функция  $\Delta(\alpha)$  и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую *(знако)переменную диссипацию* (см. также [22, 25, 37]).

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть выполняются условия (34) и (35). Тогда система (30)–(33) обладает четырьмя независимыми, вообще говоря, трансцендентными [9, 23, 24] (т.е. имеющими существенно особые точки) первыми интегралами.

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [9]). В частности, если  $\kappa = -1$ ,  $\lambda^1 = \lambda_4^1$ , явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\begin{aligned} \Theta_1(w_4, w_3; \alpha) &= G_1 \left( \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)} \right) = \\ &= \frac{f_4^2(\alpha)(w_4^2 + w_3^2) + (b - \lambda^1)w_4\delta(\alpha)f_4(\alpha) - \lambda_4^0\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)f_4(\alpha)} = C_1 = \text{const.} \end{aligned} \quad (36)$$

При этом дополнительный первый интеграл для системы (30) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G_2 \left( \Delta(\alpha), \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const.} \quad (37)$$

Первые интегралы для систем (31) и (32) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2, \quad (38)$$

о функциях  $\Psi_s(\beta_s)$ ,  $s = 1, 2$ , см. (11), (12).

А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (33), находится по аналогии с (13):

$$\Theta_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const}, \quad (39)$$

где, после взятия интеграла (39), вместо постоянных  $C_3$ ,  $C_4$  можно подставить левые части первых интегралов (11), (12), соответственно.

Выражение функций (36), (37) через конечную комбинацию элементарных функций зависит и от явного вида функции  $\Delta(\alpha)$ . Так, например, при  $\kappa = -1$ ,  $\lambda^1 = \lambda_4^1$  дополнительный первый интеграл системы (30) найдется из дифференциального соотношения

$$\begin{aligned} d \ln |\Delta(\alpha)| &= \frac{(b + u_4)du_4}{U_2(C_1, u_4)}, \quad u_4 = \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \quad u_3 = \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}, \\ U_1(u_4) &= u_4^2 + (b - \lambda^1)u_4 - \lambda_4^0, \quad U_2(C_1, u_4) = 2U_1(u_4) - \frac{C_1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_4)} \right\}, \quad C_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Правая часть данного соотношения выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции  $\Delta(\alpha)$ .

**ТЕОРЕМА 4.** *Если для систем вида (30)–(33) выполняются геометрическое и энергетические свойства (34), (35), то у нее также существуют функционально независимые между собой следующие пять инвариантных дифференциальных форм с трансцендентными (т.е. имеющими существенно особые точки), вообще говоря, коэффициентами (ср. с [43, 44]):*

$$\begin{aligned} & \rho_1(w_4, w_3; \alpha) dw_4 \wedge dw_3 \wedge d\alpha, \\ & \rho_1(w_4, w_3; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_4}{U_2(C_1, u_4)} \right\} \cdot \frac{u_4^2 + u_3^2 + (b - \lambda^1)u_4 - \lambda_4^0}{u_3}, \\ & \rho_2(w_4, w_3; \alpha) dw_4 \wedge dw_3 \wedge d\alpha, \\ & \rho_2(w_4, w_3; \alpha) = \Delta(\alpha) \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_4}{U_2(C_1, u_4)} \right\} \cdot \exp \left\{ - \int \frac{(b + u_4) du_4}{U_2(C_1, u_4)} \right\}; \\ & \rho_{2+s}(w_s; \beta_s) = \frac{1}{\sqrt{1 + w_s^2}} dw_s \wedge d\beta_s, s = 1, 2 \\ & \text{(после соответствующих замен независимого переменного в системах (31), (32));} \\ & \rho_5(w_4, w_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) dw_4 \wedge dw_3 \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3, \\ & \rho_5(w_4, w_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_4}{U_2(C_1, u_4)} \right\} \cdot \Theta_5(\beta_2, \beta_3), \end{aligned}$$

но независимые с первыми интегралами (36)–(39).

Для полной интегрируемости системы (30)–(33) можно использовать или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию (только независимых элементов) из интегралов и форм общим количеством пять (ср. с [38, 39]).

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [40, 41, 42]. Заметим лишь, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (т.е. наличие у них существенно особых точек) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [12, 24].

В заключение можно сослаться на многочисленные приложения [22, 46, 47], касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к четырехмерной сфере, а также более общих систем на расслоении четырехмерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского. При этом из всего колоссального множества работ по геометрическим и топологическим аспектам, связанным с рассматриваемым интегрированием систем, выделим также работы [7, 8, 10].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967. — 396 с.
2. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977. — 600 с.
3. Вейль Г. Симметрия. М.: URSS, 2007.
4. Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbf{R}^n$  // Доклады РАН. — 2001. — Т. 380. — № 1. — С. 47–50.

5. Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbf{R}^n$  // Доклады РАН. — 2002. — Т. 383. — № 5. — С. 635–637.
6. Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в  $\mathbf{R}^n$  // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2003. — № 5. — С. 37–41.
7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. — 760 с.
8. Иванова Т.А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики // Матем. заметки. — 1992. — Т. 52. — Вып. 2. — С. 43–51.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
10. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. — М.: URSS, 2017. 352 с.
11. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
12. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
13. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. — 2019. — Т. 74. — № 1(445). — С. 117–148.
14. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. — 1953. — Т. 93. — № 5. — С. 763–766.
15. Походня Н.В., Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2012. — № 9(100). — С. 136–150.
16. Походня Н.В., Шамолин М.В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2013. — № 9/1(110). — С. 35–41.
17. Походня Н.В., Шамолин М.В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2014. — № 7(118). — С. 60–69.
18. Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
19. Трофимов В.В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1980. — Т. 44. — № 5. — С. 1191–1199.
20. Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 31–33.
21. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1349–1353.

22. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // *Фундам. и прикл. матем.* 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
23. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
24. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // *Успехи матем. наук.* 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
25. Шамолин М.В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // *Доклады РАН.* — 2000. — Т. 375. — № 3. — С. 343–346.
26. Шамолин М.В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем // *Успехи матем. наук.* — 2002. — Т. 57. — Вып. 1. — С. 169–170.
27. Шамолин М.В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на  $\mathfrak{so}(4) \times \mathbf{R}^4$  // *Успехи матем. наук.* — 2005. — Т. 60. — Вып. 6. — С. 233–234.
28. Шамолин М.В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы // *Успехи матем. наук.* — 2007. — Т. 62. — Вып. 5. — С. 169–170.
29. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле // *Доклады РАН.* — 2013. — Т. 453. — № 1. — С. 46–49.
30. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере // *Успехи матем. наук.* — 2013. — Т. 68. — Вып. 5(413). — С. 185–186.
31. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования // *Доклады РАН.* — 2014. — Т. 457. — № 5. — С. 542–545.
32. Шамолин М.В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // *Фундам. и прикл. матем.* — 2015. — Т. 20. — Вып. 4. — С. 3–231.
33. Шамолин М.В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле // *Доклады РАН.* — 2015. — Т. 461. — № 5. — С. 533–536.
34. Шамолин М.В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // *Доклады РАН.* — 2015. — Т. 464. — № 6. — С. 688–692.
35. Шамолин М.В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере // *Дифференц. уравнения.* — 2016. — Т. 52. — № 6. — С. 743–759.
36. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // *Доклады РАН.* — 2017. — Т. 474. — № 2. — С. 177–181.
37. Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией // *Пробл. матем. анализа.* — 2018. — № 95. — С. 79–101.

38. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // Доклады РАН. — 2018. — Т. 482. — № 5. — С. 527–533.
39. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН. — 2018. — Т. 479. — № 3. — С. 270–276.
40. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 491. — № 1. — С. 95–101.
41. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 497. — № 1. — С. 23–30.
42. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 500. — № 1. — С. 78–86.
43. Шамолин М.В. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 501. — № 1. — С. 89–94.
44. Шамолин М.В. Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 507. — № 1. — С. 86–92.
45. Poincaré H. Calcul des probabilités, Gauthier–Villars, Paris, 1912, 340 pp.
46. Shamolin M.V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium, In: Journal of Mathematical Sciences, 2002, Vol. 110, No. 2, pp. 2528–2557.
47. Tikhonov A.A., Yakovlev A.B. On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters, International Journal of Plasma Environmental Science and Technology, Vol. 13, No. 1, pp. 49–52.

## REFERENCES

1. Bourbaki N., 1967, “Integration. Measures, measure integration” // Moscow, Nauka.
2. Bourbaki N., 1977, “Integration. Measures on locally compact spaces. Continuation of measures. Measures on separable spaces” // Moscow, Nauka, 1977.
3. Weil G. Symmetries. Moscow, URSS, 2007.
4. Georgievskii D. V., Shamolin M. V., 2001, “Kinematics and mass geometry for a solid body with a fixed point in  $\mathbf{R}^n$ ”. *Doklady RAN [Physics Doklady]*, Vol. 380, № 1, pp. 47–50.
5. Georgievskii D. V., Shamolin M. V., 2002, “Generalized Euler’s Equations Describing the Motion of a Rigid Body with a Fixed Point in  $\mathbf{R}^n$ ”. *Doklady RAN [Physics Doklady]*, Vol. 383, № 5, pp. 635–637.

6. Georgievskii D. V., Shamolin M. V., 2003, First integrals of motion equations of a generalized gyroscope in  $\mathbf{R}^n$ . *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika [Moscow University Mathematics Bulletin]*, № 5, pp. 37–41.
7. Dubrovin B. A., Novikov S. P., Fomenko A. T., 1979, “Modern Geometry” // Moscow, Nauka.
8. Ivanova T. A., 1992, “Euler equations in models of theoretical physics”. *Matematicheskiye zametki [Mathematical Notes]*, Vol. 52, № 2, pp. 43–51.
9. Kamke E., 1976, “Handbook of Ordinary Differential Equations” // Moscow, Nauka.
10. Klein F., 2017, “Non-Euclidean geometry” // M., URSS.
11. Kozlov V. V., 1983, “Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics” // *Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian Mathematical Surveys]*, Vol. 38, № 1, pp. 3–67.
12. Kozlov V. V., 2015, “Rational integrals of quasi-homogeneous dynamical systems” // *Journal of applied mathematics and mechanics*, Vol. 79, № 3, pp. 307–316.
13. Kozlov V. V., 2019, “Tensor invariants and integration of differential equations” // *Russian Mathematical Surveys*, Vol. 74, № 1(445), pp. 117–148.
14. Kolmogorov A. N., 1953, “On dynamical systems with an integral invariant on a torus” // *Doklady AN SSSR [Doklady Mathematics]*, Vol. 93, № 5, pp. 763–766.
15. Pokhodnya N. V., Shamolin M. V., 2012, “A new case of integrability in the dynamics of a multidimensional body” // *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, № 9(100), pp. 136–150.
16. Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. Nekotorye usloviya integriruemosti dinamicheskikh sistem v transtsendentnykh funktsiyakh [Some conditions of integrability of dynamical systems in transcendental functions]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya [Vestnik of Samara University. Natural Science Series]*, 2013, № 9/1(110), pp. 35–41.
17. Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. Integriruemye sistemy na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoy sfere [Integrable systems on a tangent bundle to a multidimensional sphere]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya [Vestnik of Samara University. Natural Science Series]*, 2014, № 7(118), pp. 60–69.
18. Samsonov V.A., Shamolin M.V. K zadache o dvizhenii tela v soprotivlyayushcheisya srede [On the problem of a body motion in a resisting medium]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika [Moscow University Mathematics Bulletin]*, 1989, № 3, pp. 51–54.
19. Trofimov V.V. Euler equations on finite-dimensional solvable Lie groups. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya [Izvestiya: Mathematics]*, 1980, Vol. 44, № 5, pp. 1191–1199.
20. Trofimov V.V. Simplekticheskiye struktury na gruppakh avtomorfizmov simmetricheskikh prostranstv [Symplectic structures on automorphism groups of symmetric spaces]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika [Moscow University Mathematics Bulletin]*, 1984, № 6, pp. 31–33.
21. Trofimov V.V., Fomenko A.T. Metodika postroeniya gamil'tonovykh potokov na simmetricheskikh prostranstvakh i integriruemost' nekotorykh gidrodinamicheskikh sistem [The technique of Hamiltonian flows constructing on symmetric spaces and the integrability of some

- hydrodynamic systems]. Doklady AN SSSR [Doklady Mathematics], 1980, Vol. 254, № 6, pp. 1349–1353.
22. Trofimov V.V., Shamolin M.V. Geometricheskiye i dinamicheskiye invarianty integriruemyykh gamil'tonovykh i dissipativnykh sistem [Geometric and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems]. Fundamental'naya i prikladnaya matematika [Journal of Mathematical Sciences], 2010, Vol. 16, № 4, pp. 3–229.
23. Shabat B.V. Vvedeniye v kompleksniy analiz [Introduction in Complex Analysis], Moscow, Nauka, 1987.
24. Shamolin M.V. Ob integriruемости v transtsendentnykh funktsiyakh [On integrability in transcendental functions]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian mathematical surveys], 1998, Vol. 53, № 3, pp. 209–210.
25. Shamolin M.V. Integriruemyost' po Yakobi v zadache o dvizhenii chetyrekhmernogo tverdogo tela v soprotivlyayushcheysya srede [Integrability according to Jacobi in the Problem of Motion of a Four-Dimensional Solid in a Resistant Medium]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2000, Vol. 375, № 3, pp. 343–346.
26. Shamolin M.V. Ob integririrovaniy nekotorykh klassov nekonservativnykh sistem [Integration of certain classes of non-conservative systems]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian mathematical surveys], 2002, Vol. 57, № 1, pp. 169–170.
27. Shamolin M.V. Ob odnom integriruemyom sluchae uravneniy dinamiki na  $so(4) \times \mathbf{R}^4$  [An integrable case of dynamical equations on  $so(4) \times \mathbf{R}^4$ ]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian mathematical surveys], 2005, Vol. 60, № 6, pp. 233–234.
28. Shamolin M.V. Sluchay polnoy integriruемости v dinamike na kasatel'nom rassloenii dvumernoy sfery [The case of complete integrability in dynamics on a tangent bundle of a two-dimensional sphere]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian mathematical surveys], 2007, Vol. 62, № 5, pp. 169–170.
29. Shamolin M.V. Noviy sluchay integriruемости v dinamike mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole [New Case of Integrability in the Dynamics of a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2013, Vol. 453, № 1, pp. 46–49.
30. Shamolin M.V. Noviy sluchay integriruемости uravneniy dinamiki na kasatel'nom rassloenii k trekhmernoy sfere [New case of integrability of dynamic equations on the tangent bundle of a 3-sphere]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian mathematical surveys], 2013, Vol. 68, № 5(413), pp. 185–186.
31. Shamolin M.V. Noviy sluchay integriruемости v dinamike mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole pri uchete lineynogo dempfirovaniya [A New Case of Integrability in the Dynamics of a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field under the Assumption of Linear Damping]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2014, Vol. 457, № 5, pp. 542–545.
32. Shamolin M.V. Integriruemye sistemy s peremennoy dissipatsiey na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoy sfere i prilozheniya [Integrable variable dissipation systems on the tangent bundle of a multi-dimensional sphere and some applications]. Fundamental'naya i prikladnaya matematika [Journal of Mathematical Sciences], 2015, Vol. 20, № 4, pp. 3–231.
33. Shamolin M.V. Polniy spisok pervykh integralov dinamicheskikh uravneniy dvizheniya mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole [Complete List of First Integrals of Dynamic

- Equations for a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2015, Vol. 461, № 5, pp. 533–536.
34. Shamolin M.V. Polniy spisok pervykh integralov dinamicheskikh uravneniy dvizheniya mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole pri nalichii lineynogo dempfirovaniya [Complete List of the First Integrals of Dynamic Equations of a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field under the Assumption of Linear Damping]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2015. — T. 464. — № 6. — С. 688–692.
35. Shamolin M.V. Integriruemiye nekonservativniye dinamicheskiye sistemy na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoy sfere [Integrable Nonconservative Dynamical Systems on the Tangent Bundle of the Multidimensional Sphere]. Differentsial'niye uravneniya [Differential equations], 2016, Vol. 52, № 6, pp. 743–759.
36. Shamolin M.V. Noviye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiyey na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoy sfere [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on a Tangent Bundle of a Multidimensional Sphere]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2017, Vol. 474, № 2, pp. 177–181.
37. Shamolin M.V. Integriruemiye dinamicheskie sistemy s konechnym chislom stepeney svobody s dissipatsiyey [Integrable Dynamic Systems with Dissipation and Finitely Many Degrees of Freedom]. Problemy matematicheskogo analiza [Journal of mathematical sciences], 2018, № 95, pp. 79–101.
38. Shamolin M.V. Noviye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiyey na kasatel'nom rassloenii mnogomernogo mnogoobraziya [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on the Tangent Bundle of a Multidimensional Manifold]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2018, Vol. 482, № 5, pp. 527–533.
39. Shamolin M.V. Noviye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiyey na kasatel'nom rassloenii chetyrekhmernogo mnogoobraziya [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Four-Dimensional Manifolds]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2018, Vol. 479, № 3, pp. 270–276.
40. Shamolin M.V. Noviye sluchai integriruemykh sistem nechetnogo poryadka s dissipatsiyey [New Cases of Integrable Odd-Order Systems with Dissipation]. Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics], 2020, Vol. 491, № 1, pp. 95–101.
41. Shamolin M.V. Noviye sluchai odnorodnykh integriruemykh sistem s dissipatsiyey na kasatel'nom rassloenii chetyrekhmernogo mnogoobraziya [New Cases of Homogeneous Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Four-Dimensional Manifolds]. Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics], 2021, Vol. 497, № 1, pp. 23–30.
42. Shamolin M.V. Noviye sluchai integriruемости geodezicheskikh, potentsial'nykh i dissipativnykh sistem na kasatel'nom rassloenii konechnomernogo mnogoobraziya [New Cases of Integrability of Systems of Geodesics and Potential and Dissipative Systems on Tangent Bundles of Finite-Dimensional Manifolds]. Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics], 2021, Vol. 500, № 1, pp. 78–86.
43. Shamolin M.V. Tenzorniye invarianty geodezicheskikh, potentsial'nykh i dissipativnykh sistem na kasatel'nom rassloenii dvumernogo mnogoobraziya [Tensor Invariants of Geodesic, Potential, and Dissipative Systems on Tangent Bundles of Two-Dimensional Manifolds]. Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics], 2021, Vol. 501, № 1, pp. 89–94.

- 
44. Shamolin M.V. Invariantniye formy obyema sistem s tremya stepenyami svobody s peremennoy dissipatsiyey [Invariant Volume Forms of Variable Dissipation Systems with Three Degrees of Freedom]. Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics], 2022, Vol. 507, № 1, pp. 86–92.
  45. Poincaré H. Calcul des probabilités, Gauthier–Villars, Paris, 1912.
  46. Shamolin M.V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium. Journal of Mathematical Sciences, 2002, Vol. 110, № 2, pp. 2528–2557.
  47. Tikhonov A.A., Yakovlev A.B. On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters. International Journal of Plasma Environmental Science and Technology, Vol. 13, № 1, pp. 49–52.

Получено: 21.03.2023

Принято в печать: 12.09.2023