

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 3.

УДК 511.6

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-162-189

Об оценках длин периодов функциональных непрерывных дробей над алгебраическими числовыми полями¹

Г. В. Федоров

Фёдоров Глеб Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, Научно-технологический университет «Сириус» (г. Москва).

e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

Аннотация

В статье исследуются верхние оценки на длины периодов функциональных непрерывных дробей для ключевых элементов гиперэллиптических полей над числовыми полями. В случае, когда гиперэллиптическое поле задается многочленом нечетной степени, конечная длина периода тривиальным образом оценивается сверху удвоенной степенью фундаментальной S -единицы. Более интересный и сложный случай, когда гиперэллиптическое поле задается многочленом четной степени. В 2019 году В.П. Платоновым и Г.В. Федоровым для гиперэллиптических полей $\mathcal{L} = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g + 2$, над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел найден точный промежуток значений $s \in \mathbb{Z}$ таких, что непрерывные дроби элементов вида $\sqrt{f}/x^s \in \mathcal{L} \setminus \mathbb{Q}(x)$ периодические. В данной статье найдено обобщение этого результата для произвольного поля в качестве поля констант. Опираясь на этот результат, найдены точные оценки сверху на длины периодов функциональных непрерывных дробей элементов гиперэллиптических полей над числовыми полями K , зависящие только от рода g гиперэллиптического поля, степени расширения $k = [K : \mathbb{Q}]$ и порядка m подгруппы кручения якобиана соответствующей гиперэллиптической кривой.

Ключевые слова: Непрерывные дроби, длина периода, гиперэллиптическое поле, фундаментальные S -единицы, проблема кручения в якобианах.

Библиография: 37 названий.

Для цитирования:

Г. В. Федоров. Об оценках длин периодов функциональных непрерывных дробей над алгебраическими числовыми полями // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 3, с. 162–189.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 3.

UDC 511.6

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-162-189

On estimates for the period length of functional continued fractions over algebraic number fields

G. V. Fedorov

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-71-00101).

Fedorov Gleb Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, University of Science and Technology “Sirius” (Moscow).

e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

Abstract

The paper investigates upper bounds on the period length of functional continued fractions for key elements of hyperelliptic fields over number fields. In the case when the hyperelliptic field is given by a polynomial of odd degree, the finite period length is trivially estimated from above twice the power of the fundamental S -unit. A more interesting and complicated case is when the hyperelliptic field is given by a polynomial of even degree. In 2019 V.P. Platonov and G.V. Fedorov for hyperelliptic fields $\mathcal{L} = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g + 2$, over the field $\mathbb{Q}$ of rational numbers the exact interval of values $s \in \mathbb{Z}$ is found such that the continued fractions of elements of the form $\sqrt{f}/x^s \in \mathcal{L} \setminus \mathbb{Q}(x)$ are periodic. In this article, we find a generalization of this result for an arbitrary field as a field of constants. Based on this result, sharp upper estimates for the lengths of the periods are found functional continued fractions of elements of hyperelliptic fields over number fields K , depending only on the genus g of the hyperelliptic field, the degree of extension $k = [K : \mathbb{Q}]$ and order m of the Jacobian torsion subgroup of the corresponding hyperelliptic curve.

Keywords: Continued fractions, period length, hyperelliptic field, fundamental S -units, torsion problem in Jacobians.

Bibliography: 37 titles.

For citation:

G. V. Fedorov, 2023, “On estimates for the period length of functional continued fractions over algebraic number fields”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 162–189.

1. Введение

Классическая проблема периодичности функциональных непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля тесно связана с проблемой поиска и построения фундаментальных единиц гиперэллиптического поля и проблемой кручения в якобиане соответствующей гиперэллиптической кривой. Для эллиптических кривых над полем рациональных чисел проблема кручения была решена Б. Мазуром в 1978 году. Для гиперэллиптических кривых рода 2 и выше над полем рациональных чисел приведенные три проблемы остаются открытыми.

За последние 20 лет теория функциональных непрерывных дробей получила большое развитие и стала эффективным арифметическим инструментом для исследования приведенных трех проблем. В связи с этим ряд классических проблем из теории числовых непрерывных дробей приобрели новый интерес в функциональном случае, особенно, когда соответствующие результаты значительно отличаются от традиционного случая. Один из таких результатов дает задача о верхней оценке длин периодов функциональных непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля.

Пусть $f(x) \in K[x]$ — свободный от квадратов многочлен степени $2g + 2$, $g \geq 0$, над полем K характеристики отличной от 2. Дополнительно предположим, что старший коэффициент многочлена f является полным квадратом в мультипликативной группе K^* поля K . Классическая проблема периодичности непрерывных дробей элементов гиперэллиптических полей $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ (для различных многочленов f указанного вида) имеет большую и глубокую историю. Вопрос о периодичности функциональных непрерывных дробей связан с многими математическими проблемами. Одной из таких проблем, известной по работам Чебышева, является проблема интегрируемости в элементарных функциях псевдоэллиптических интегралов. Артин [1] получил результаты, связывающие проблему кручения в якобиане гиперэллиптической кривой с решением норменного уравнения в функциональном случае и с проблемой

периодичности функциональных непрерывных дробей элементов вида $\sqrt{f}$, построенных в поле формальных степенных рядов $K((1/x))$. Платоновым [2] была найдена связь приведенных выше проблем с проблемой поиска и построения фундаментальных единиц гиперэллиптического поля. Современные результаты по этой тематике изложены в статьях [3]-[6]. В частности, из этих результатов следует, что в поле $\mathcal{L}$ элемент $\sqrt{f}$ и его разложение в непрерывную дробь играет ключевую роль в вопросах связанных с поиском фундаментальных единиц и рациональных точек кручения в якобиане гиперэллиптической кривой, заданной уравнением $y^2 = f(x)$ (см. [7]-[13]).

В отличие от числовых непрерывных дробей, в функциональном случае непрерывная дробь может быть квазипериодической — периодической с точностью до константы из K^* .

В числовом случае хорошо известны классические результаты [14], [15] об оценках сверху на длину периода непрерывных дробей элементов вида $\sqrt{d}$, $d \in \mathbb{N}$. В функциональном случае над конечным полем $\mathbb{F}_q$ оценки на длину периода изучались в статьях [16], [17], [18].

В эллиптическом случае $\deg f = 4$ над полем констант $K = \mathbb{Q}$ в [19]-[20] был поставлен вопрос о возможной длине периода непрерывной дроби $\sqrt{f}$. Согласно известной теореме Ма-зура, если класс дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ имеет конечный порядок m в группе классов дивизоров степени ноль $\Delta^\circ(L)$ эллиптического поля $\mathcal{L}$, то $2 \leq m \leq 10$ или $m = 12$. Используя этот результат и параметризацию из статьи Куберта [21], в [22]-[23] показано, что длина периода n непрерывной дроби $\sqrt{f}$ принимает одно из значений

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 18, 22\},$$

причем для каждого n из этого множества существует бесконечная серия соответствующих примеров неизоморфных эллиптических кривых. Для квадратичного поля констант K и $\deg f = 4$ в [24] доказано, что длина периода n непрерывной дроби $\sqrt{f}$ может принимать одно из значений

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 22, 26, 30, 34\}.$$

Для гиперэллиптических полей $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g + 2$, $g \geq 1$, в статье [25] дана оценка сверху на длину квазипериода N непрерывной дроби элемента специального вида $\beta = (B + \sqrt{f})/A \in \mathcal{L}$, где $A, B \in K[x]$, $A \mid f - B^2$, согласно которой $N \leq m - p + 1$, где m — порядок класса дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ в группе классов дивизоров степени ноль $\Delta^\circ(L)$, p — порядок полюса элемента β в ∞^+ .

В случае гиперэллиптических полей $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g + 1$, в статьях [12], [13], [26] получен ряд точных результатов о длинах периодов непрерывных дробей элементов вида $\sqrt{f}/x^{g+1}$, построенных в поле формальных степенных рядов $K((x))$.

Для дальнейших результатов об оценке длин периодов непрерывных дробей ключевых элементов вида $\sqrt{f}/x^s$, $s \in \mathbb{Z}$, важным шагом стало доказательство теоремы 2 из [6] о достаточных условия одновременной квазипериодичности непрерывных дробей элементов $\alpha, \alpha \cdot x^s \in \mathcal{L} \setminus K(x)$. Для гиперэллиптических полей $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$, построенных с помощью свободных от квадратов многочленов $f \in K[x]$ нечетной степени $2g + 1$ достаточные условия также являются необходимыми. В случае $\deg f = 2g + 2$ найденные достаточные условия не являются необходимыми, что подтверждается примерами 1-3 в статье [6]. Когда для элементов α и $\alpha \cdot x^s$ достаточные условия не являются необходимыми, длины квазипериодов непрерывных дробей этих элементов могут отличаться в несколько раз. Так, в примере 4 статьи [6] найден свободный от квадратов многочлен f степени 6, для которого длина периода непрерывной дроби, построенной в $\mathbb{Q}((x))$ для элемента $\alpha = \sqrt{f}/x^3$, равна 2, а длина периода непрерывной дроби элемента $\alpha \cdot x^3 = \sqrt{f}$ равна 18 при том, что поле $\mathcal{L} = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$ обладает фундаментальной S -единицей степени 4, где $S = \{v_x^-, v_x^+\}$.

Для удобства в данной статье мы рассматриваем непрерывные дроби, построенные в поле формальных степенных рядов $K((1/x))$, но основные результаты об оценках длин периодов для ключевых элементов остаются справедливы и для непрерывных дробей, построенные в поле формальных степенных рядов $K((x))$ (см. §2 [9]).

Для непрерывных дробей элементов вида $\sqrt{f}/x^s$, $s \in \mathbb{Z}$, справедливо утверждение: если длина квазипериода конечна, то длина периода либо равна длине квазипериода, либо равна удвоенной длине квазипериода. Поэтому в дальнейшем относительно элементов вида $\sqrt{f}/x^s$, $s \in \mathbb{Z}$, основной задачей является оценка сверху длины квазипериода непрерывной дроби.

В статье [27] дано уточнение теоремы 2 статьи [6]. А именно, в теореме 2 [27] для гиперэллиптических полей $\mathcal{L} = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g + 2$, найден точный промежуток значений $s \in \mathbb{Z}$ таких, что непрерывные дроби элементов вида $\sqrt{f}/x^s \in \mathcal{L} \setminus \mathbb{Q}(x)$ периодические.

В этой статье найдено обобщение результатов статьи [27] для непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей $\mathcal{L}$ над произвольными алгебраическими полями констант K . Опираясь на этот результат, найдены точные оценки сверху на длины периодов функциональных непрерывных дробей элементов гиперэллиптических полей над числовыми полями K , зависящие только от рода гиперэллиптического поля, степени расширения $[K : \mathbb{Q}]$ и порядка подгруппы кручения якобиана соответствующей гиперэллиптической кривой. Приведены новые примеры ключевых элементов над квадратичными полями с периодами, достигающими некоторые из приведенных оценок. Над полем рациональных чисел подобные результаты были получены в статье [28].

Параграф 2 посвящен вспомогательным утверждениям, которые мы используем для доказательства основных результатов статьи. В частности, проведено полное исследование мультипликативной структуры последовательностей многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$, определенных в (1). Изучение многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ необходимо для более глубокого понимания структуры группы единиц кольца целых элементов гиперэллиптического поля $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$. Связь многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ с группой единиц и их применение для решений функционального уравнения Пелля приведены в параграфе 5. Группа единиц взаимно однозначно соотносится с множеством решений функционального уравнения Пелля, а свойства решений, в свою очередь, позволяют сделать выводы о периодичности ключевых элементов вида $\sqrt{f}/x^s$ (см. предложение 10).

Напомним важное утверждение о периодичности ключевых элементов гиперэллиптических полей: если для некоторого $s \in \mathbb{Z}$ непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/x^s$ квазипериодическая, то она периодическая (см. [12]). В параграфе 3 мы приводим альтернативное очень лаконичное доказательство этого факта, которое нам будет полезно в дальнейших рассуждениях.

Обозначим v_x — нормирование поля $K(x)$, связанное с многочленом x . Мы предполагаем, что $v_x(0) = +\infty$, в частности, чтобы для многочлена $\Omega \in K[x]$ условие $v_x(\Omega) = 0$ исключало возможность $\Omega = 0$.

В параграфе 4 найдены верхние оценки на длину квазипериода непрерывной дроби квадратичной иррациональности в зависимости от степени фундаментального решения функционального уравнения типа Пелля для выбранной квадратичной иррациональности.

В параграфе 5 найдены точные оценки сверху на длину квазипериода непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей, определенных над числовым полем K . Полученные оценки зависят только от рода гиперэллиптического поля, степени расширения $[K : \mathbb{Q}]$ и порядка подгруппы кручения якобиана соответствующей гиперэллиптической кривой. Также в этом параграфе для фиксированной неособой гиперэллиптической кривой получено интересное утверждение о конечности количества обобщенных якобианов ассоциированных с определенными над K модулями ограниченной степени и с непустой подгруппой K -точек кручения.

В случае, когда степень многочлена $f(x)$ четная теорема 3 указывает на удивительный

эффект: длина квазипериода непрерывной дроби квадратичной иррациональности гиперэллиптического поля $\mathcal{L} = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$ может быть значительно больше порядка подгруппы кручения якобиана соответствующей гиперэллиптической кривой. В связи с этим мы высказываем предположение о том, что в каждом гиперэллиптическом поле $\mathcal{L} = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, обладающем нетривиальными единицами кольца целых элементов, существует элемент α с длиной квазипериода непрерывной дроби больше наперед заданного числа.

В качестве иллюстрации полученных результатов в параграфе 6 разобран случай, когда поле K является квадратичным расширением поля $\mathbb{Q}$. Приведены примеры, демонстрирующие точность найденных в теореме 3 оценок на длину квазипериода.

Часть результатов этой статьи (теоремы 1, 3, 4) были анонсированы в [29] без подробных доказательств.

2. Вспомогательные утверждения

Для натуральных n определим две последовательности многочленов $T_n, Q_n \in \mathbb{Z}[x]$:

$$T_n(x) = \sum_{0 \leq j \leq n/2} \binom{n}{2j} x^j, \quad Q_n(x) = \sum_{0 \leq j < n/2} \binom{n}{2j+1} x^j. \quad (1)$$

Из определения следует, что степень многочлена T_n равна $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, а степень многочлена Q_n равна $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Отметим, что многочлены $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ похожи на многочлены Чебышева первого и второго рода и на многочлены Диксона, но их свойства не эквивалентны (см. [30]).

Положим $x = y^2$, тогда справедливо тождество

$$T_n(y^2) + yQ_n(y^2) = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} y^k = (1+y)^n. \quad (2)$$

Если подставить вместо y значение $-y$, то имеем

$$T_n(y^2) - yQ_n(y^2) = (1-y)^n. \quad (3)$$

Отсюда получаем формулы, которые можно использовать как альтернативное определение многочленов T_n, Q_n :

$$T_n(y^2) = \frac{1}{2} \left((1+y)^n + (1-y)^n \right), \quad (4)$$

$$Q_n(y^2) = \frac{1}{2y} \left((1+y)^n - (1-y)^n \right). \quad (5)$$

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При любом $n \in \mathbb{N}$ многочлены $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ взаимно просты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $x_0 \in \mathbb{C}$ является общим корнем многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$. Тогда в силу (2) для $y_0 \in \mathbb{C}$ такого, что $y_0^2 = x_0$, справедливо тождество

$$(1+y_0)^n = T_n(x_0) + y_0 Q_n(x_0) = 0,$$

откуда получаем $y_0 = -1$. Но это противоречит соотношениям

$$T_n((-1)^2) = \sum_{0 \leq j \leq n/2} \binom{n}{2j} > 0, \quad Q_n((-1)^2) = \sum_{0 \leq j < n/2} \binom{n}{2j+1} > 0.$$

□

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. При любом $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, справедливы формулы

$$T_n(x) = T_{n-1}(x) + xQ_{n-1}(x), \quad Q_n(x) = T_{n-1}(x) + Q_{n-1}(x). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из формул (1). $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Многочлены $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ удовлетворяют линейному рекуррентному соотношению

$$\lambda_n = 2\lambda_{n-1} + (x-1)\lambda_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad (7)$$

с начальными условиями $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = 1$, $Q_0(x) = 0$, $Q_1(x) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из предложения 2. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При любом $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, справедливы формулы

$$2T'_n(x) = nQ_{n-1}(x), \quad 2xQ'_n(x) + Q_n(x) = nT_{n-1}(x), \quad (8)$$

где штрихом обозначена производная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя соотношение (1) имеем

$$T'_n(x) = \sum_{0 < j \leq n/2} j \binom{n}{2j} x^{j-1} = \frac{n}{2} \sum_{0 \leq j < (n-1)/2} \binom{n-1}{2j+1} x^j = \frac{n}{2} Q_{n-1}(x).$$

Дифференцируя соотношение (2), учитывая, что $y^2 = x$, получаем

$$2yT'_n(x) + 2xQ'_n(x) + Q_n(x) = n(y+1)^{n-1} = nT_{n-1}(x) + nyQ_{n-1}(x).$$

Следовательно, $2xQ'_n(x) + Q_n(x) = nT_{n-1}(x)$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. При любом $n \in \mathbb{N}$ многочлены $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ не имеют кратных корней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 — кратный корень многочлена $T_n(x)$, тогда $T_n(x_0) = T'_n(x_0) = 0$. По предложению 4 имеем $Q_{n-1}(x_0) = 0$, а по предложению 2 имеем $T_{n-1}(x_0) = 0$. Но согласно предложению 1 это противоречит взаимной простоте многочленов $T_{n-1}(x)$ и $Q_{n-1}(x)$.

Пусть x_0 — кратный корень многочлена $Q_n(x)$, тогда $Q_n(x_0) = Q'_n(x_0) = 0$. По предложению 4 имеем $T_{n-1}(x_0) = 0$, а по предложению 2 имеем $Q_{n-1}(x_0) = 0$. Но согласно предложению 1 это противоречит взаимной простоте многочленов $T_{n-1}(x)$ и $Q_{n-1}(x)$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для любых $n, m \in \mathbb{N}$ справедливы тождества

$$T_{nm}(x) = (T_n(x))^m \cdot T_m(z), \quad Q_{nm}(x) = (T_n(x))^{m-1} \cdot Q_n(x) \cdot Q_m(z), \quad (9)$$

где $z = x(Q_n(x)/T_n(x))^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2), сохраняя обозначение $x = y^2$, имеем

$$\begin{aligned} T_{nm}(y^2) + yQ_{nm}(y^2) &= (1+y)^{nm} = (T_n(y^2) + yQ_n(y^2))^m = \\ &= (T_n(y^2))^m \left(1 + y \frac{Q_n(y^2)}{T_n(y^2)}\right)^m. \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим $u = yQ_n(y^2)/T_n(y^2)$ и $z = u^2 = x(Q_n(x)/T_n(x))^2$, тогда, продолжая равенства (10), с помощью (2) получаем

$$\begin{aligned} T_{nm}(x) + yQ_{nm}(x) &= (T_n(x))^m (T_m(u^2) + uQ_m(u^2)) = \\ &= (T_n(x))^m \cdot T_m(z) + y(T_n(x))^{m-1} Q_n(x) \cdot Q_m(z). \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку $x = y^2$ и z есть функция от y^2 , то из (11) получаем тождества (9). $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть K — числовое поле, и даны числа $n, m \in \mathbb{N}$. Если у многочленов $T_n(x)$, $Q_n(x)$, $T_m(x)$ и $Q_m(x)$ нет корней в поле K , то у многочленов $T_{nm}(x)$ и $Q_{nm}(x)$ также нет корней в поле K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из формул (9). $\square$

В статье [27] были найдены все рациональные корни многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ при всех натуральных n : для многочленов $T_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, корнями могут быть только $x \in \{-1, -1/3\}$, более точно, $T_{2(2k-1)}(-1) = 0$, $T_{3(2k-1)}(-1/3) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, причем указанные корни имеют кратность один и других рациональных корней нет; для многочленов $Q_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, корнями могут быть только $x \in \{-3, -1, -1/3\}$, более точно, $Q_{3k}(-3) = 0$, $Q_{4k}(-1) = 0$, $Q_{6k}(-1/3) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, причем указанные корни имеют кратность один и других рациональных корней нет.

Дальнейшая наша задача состоит в точном описании всех возможных корней многочленов T_n , Q_n для всех $n \in \mathbb{N}$. Оказывается, если некоторое алгебраическое число x_0 является корнем многочлена T_k для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то в числовых последовательностях $\{T_n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{Q_n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ нули встречаются периодическим образом, а именно, индексы нулевых членов в $\{T_n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{Q_n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ образуют соответственно две бесконечные арифметические прогрессии. Аналогично, если алгебраическое число x_0 является корнем некоторого многочлена Q_k , то индексы нулевых членов в $\{Q_n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ также образуют бесконечную арифметическую прогрессию. В общем случае для доказательства этого утверждения можно воспользоваться теоремой Сколем-Малера-Леха (см., например, [31]), поскольку по предложению 3 последовательности T_n и Q_n удовлетворяют линейному рекуррентному соотношению. Но теорема Сколем-Малера-Леха имеет неконструктивный характер, а нам важно получить явную структуру возможных корней многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$.

Утверждение о том, что обнуляющиеся члены последовательностей $T_n(x_0)$ и $Q_n(x_0)$ образуют арифметические прогрессии, легко следует из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. 1. Пусть n нечетное. Тогда

- $T_n(x) = x^{\deg Q_n} Q_n(1/x)$;
- если $q \mid n$, то $T_q(x) \mid T_n(x)$, $Q_q(x) \mid Q_n(x)$.

2. Пусть n четное. Тогда

- $T_n(x) = x^{\deg T_n} T_n(1/x)$;
- если $n = qd$, q — нечетное, то $T_d(x) \mid T_n(x)$, $Q_q(x) \mid Q_n(x)$;
- если $n = qd$, d — четное, то $T_q(x) \mid Q_n(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n нечетное, тогда $n - 2j$ нечетное, $\binom{n}{2j} = \binom{n}{n-2j}$ и количество слагаемых в определении (1) многочленов $T_n(x)$, $Q_n(x)$ совпадает, откуда, $T_n(x) = x^{\deg Q_n} Q_n(1/x)$. Аналогично, при четном n число $n - 2j$ также четно, и $\binom{n}{2j} = \binom{n}{n-2j}$, откуда $T_n(x) = x^{\deg T_n} T_n(1/x)$.

Остальные соотношения следуют из формул (9). $\square$

Таким образом, задача описания всех алгебраических корней многочленов из последовательностей $\{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{Q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ сводится к поиску корней x_0 и соответствующих им арифметических прогрессий индексов n_j , для которых $T_{n_j}(x_0) = 0$ или $Q_{n_j}(x_0) = 0$. Для решения этой задачи мы найдем для каждого $n \in \mathbb{N}$ разложения на неприводимые над $\mathbb{Q}$ множители многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$. Забегая вперед, отметим, что эти разложения будут зависеть от разложения индекса n на простые множители, а сами неприводимые над $\mathbb{Q}$ множители многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ будут связаны с круговыми многочленами $\Phi_k(x)$ — неприводимыми над $\mathbb{Q}$ множителями многочлена $x^n + 1$.

Из предложения 6 следует, что некоторые множители $Q_n(x)$ лежат в последовательности многочленов $\{T_j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$, а некоторые — связаны с соответствующими многочленами из $\{T_j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$. Далее мы увидим, что на самом деле все неприводимые над $\mathbb{Q}$ множители многочлена $Q_n(x)$ однозначно восстанавливаются из некоторых неприводимых над $\mathbb{Q}$ множителей многочленов из $\{T_j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$. Поэтому сейчас в первую очередь обратимся к исследованию разложения на неприводимые множители над $\mathbb{Q}$ многочленов $T_n(x)$ при различных $n \in \mathbb{N}$.

Положим $L(T_n)$ — наименьшее общее кратное многочленов T_d , где d пробегает все такие делители числа n , что n/d нечетное и больше 1. Тогда по предложению 6 корректно определен многочлен $P(T_n) = T_n/L(T_n)$.

Положим $\tilde{P}(T_n)(x) = x^d P(T_n)(1/x)$, где $d = \deg P(T_n)(x)$. Отметим, что по предложению 6 при нечетном n справедливо соотношение $\tilde{P}(T_n)(x) \mid Q_n$, а при четном n справедливо равенство $\tilde{P}(T_n)(x) = P(T_n)(x)$.

При $k \in \mathbb{N}$ обозначим $\Phi_k(x)$ — круговой многочлен степени $\phi(k)$:

$$\Phi_k(x) = \prod_{1 \leq j \leq k, (j,k)=1} \left(x - e^{2\pi i \frac{j}{k}} \right).$$

ЛЕММА 1. Пусть $n = 2^t q$, где q нечетно. Справедливо тождество

$$x^n + 1 = \prod_{d|q} \Phi_{2^{t+1}d}(x). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$x^{2n} - 1 = \prod_{r|2n} \Phi_r(x) = \prod_{r|n} \Phi_r(x) \cdot \prod_{d|q} \Phi_{2^{t+1}d}(x) = (x^n - 1) \prod_{d|q} \Phi_{2^{t+1}d}(x).$$

□

В статье [32] определено понятие дробно-линейного преобразования многочленов. Обобщим это понятие на рациональные функции и докажем некоторые свойства, которые будем использовать в дальнейшем.

Пусть K — поле и $M \in \text{GL}(2, K)$,

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Определим оператор $M : K(x) \rightarrow K(x)$ на поле рациональных функций $K(x)$ следующим образом:

$$M\alpha(x) = (cx + d)^{-v_\infty(\alpha)} \alpha \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right), \quad (14)$$

где $\alpha = T(x)/Q(x) \in K(x)$, многочлены $T(x)$ и $Q(x)$ взаимно просты, $v_\infty(\alpha) = \deg Q - \deg T$. Если $\alpha \in K$, то положим $M\alpha = \alpha$. Отметим, что для $T(x) \in K[x]$ имеем $MT(x) \in K[x]$.

Положим

$$[M]x = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Для $\alpha \in K(x)$ назовем $M\alpha(x)$ невырожденным, если $v_\infty(M\alpha) = v_\infty(\alpha)$.

Оператор M обратим слева, если существует оператор $M_1 \in \text{GL}(2, K)$, такой, что $M_1 M\alpha = \alpha$ для любого $\alpha \in K(x)$ с невырожденным $M\alpha$. Оператор M обратим справа, если существует $M_1 \in \text{GL}(2, K)$, что $MM_1\alpha = \alpha$ для любого $\alpha \in K(x)$ с невырожденным $M_1\alpha$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\alpha, \beta \in K(x)$ и $M \in \text{GL}(2, K)$ определено как в (13). Тогда

$$1. \quad M(\alpha \cdot \beta) = M\alpha \cdot M\beta;$$

2. $M\alpha$ невырождено тогда и только тогда, когда $c = 0$ или $v_h^-(\alpha) = 0$, где $h = cx - a$;
3. для оператора M существуют обратные операторы слева и справа, причем они совпадают и задаются матрицей M^{-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение тривиально следует из определения (14) оператора M , поскольку $v_\infty(\alpha \cdot \beta) = v_\infty(\alpha) + v_\infty(\beta)$ при $\alpha, \beta \in K(x) \setminus K$. Отдельно отметим, что $Mc\alpha = cM\alpha$ для $c \in K$.

Положим $\alpha = T(x)/Q(x)$, где многочлены $T(x)$ и $Q(x)$ взаимно просты. Из (14) следует, что $M\alpha(x) = MT(x)/MQ(x)$. Разложив многочлены $T(x)$ и $Q(x)$ на линейные множители над замыканием $\bar{K}$, замечаем, что для доказательства второго утверждение достаточно его проверить для случая $\alpha = x - x_0$. Имеем

$$M(x - x_0) = (ax + b) - x_0(cx + d) = (a - cx_0)x - (dx_0 - b).$$

Поскольку $\det M \neq 0$, то a и c не могут одновременно быть равны нулю. Значит $\deg M(x - x_0) = 1$ тогда и только тогда, когда $c = 0$ или $x_0 \neq a/c$, то есть $v_h^-(x - x_0) = 0$, где $h = cx - a$.

Третье утверждение также достаточно проверить для $\alpha = x - x_0$. Пусть $M(x - x_0)$ невырождено. Положим $\hat{x}_0 = [M^{-1}]x_0$, тогда $M(x - x_0) = (a - cx_0)(x - \hat{x}_0)$. Возьмем

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$M_1M(x - x_0) = (a - cx_0)((a_1x + b_1) - \hat{x}_0(c_1x + d_1)) = (a - cx_0)(a_1x + c_1) - (dx_0 - b)(c_1x + d_1).$$

Приравнявая $M_1M(x - x_0) = x - x_0$, находим $a_1 = d/D$, $b_1 = -b/D$, $c_1 = -c/D$, $d_1 = a/D$, где $D = \det M$. Таким образом, однозначно восстанавливается $M_1 = M^{-1}$. Обратимость справа проверяется аналогично. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть многочлен $P \in K[x]$ неприводим над полем K и $MP(x)$ невырожденный для некоторой матрицы $M \in GL(2, K)$. Тогда многочлен $MP(x)$ также неприводим над K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $P \in K[x]$ неприводим, $MP(x)$ невырожденный и $MP(x) = T(x)Q(x)$, где T, Q непостоянные многочлены. Тогда по предложению 7 имеем

$$P(x) = M^{-1}MP(x) = M^{-1}T(x) \cdot M^{-1}Q(x),$$

причем $M^{-1}T(x), M^{-1}Q(x) \in K[x]$ невырожденные, то есть $\deg M^{-1}T(x) = \deg T$ и $\deg M^{-1}Q(x) = \deg Q$. Это противоречит неприводимости многочлена P над K . $\square$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n = 2^t q$, где q нечетно. Тогда справедливо разложение на неприводимые над $\mathbb{Q}$ множители

$$T_n(x) = \prod_{d|q} P(T_{2^t d})(x), \quad (15)$$

$$Q_n(x) = 2^t \prod_{d|q} \tilde{P}(T_d)(x) \cdot \prod_{r|n}^{\prime} P(T_r)(x), \quad (16)$$

где последнее произведение берется по всем делителям r числа n таким, что n/r четное.

Доказательство. Согласно тождеству (4) и лемме 1 справедливо представление

$$\begin{aligned} T_n(y^2) &= \frac{1}{2} \left((1+y)^n + (1-y)^n \right) = \frac{1}{2} (1-y)^n \left(1 + \frac{(1+y)^n}{(1-y)^n} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (1-y)^n \left(1 + \left(\frac{1+y}{1-y} \right)^n \right) = \frac{1}{2} (1-y)^n \prod_{d|q} \Phi_{2^{t+1}d} \left(\frac{1+y}{1-y} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

При $k > 1$ для кругового многочлена $\Phi_k(x)$ справедливо соотношение $\Phi_k(x) = x^{\phi(k)} \Phi_k\left(\frac{1}{x}\right)$. Положим $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\Psi_k(y) = M\Phi_k(y) = (1-y)^{\phi(k)} \Phi_k\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = (1+y)^{\phi(k)} \Phi_k\left(\frac{1-y}{1+y}\right) \in \mathbb{Z}[y],$$

откуда следует, что $\Psi_k(y)$ является четной функцией, то есть $\Psi_k(y) = R_k(y^2) = R_k(x) \in \mathbb{Z}[x]$. В силу неприводимости кругового многочлена $\Phi_k(x)$ над $\mathbb{Q}$ по лемме 2 при $k > 2$ заключаем, что многочлен $\Psi_k(y)$ неприводим над $\mathbb{Q}$, а, следовательно, и многочлен $R_k(x)$ также неприводим над $\mathbb{Q}$. Дополнительно отметим, что $\Psi_2(y) = M\Phi_2(y) = 2$. Таким образом, из (17) имеем разложение на неприводимые над $\mathbb{Q}$ множители

$$T_n(y^2) = \frac{1}{2} \prod_{d|q} R_{2^{t+1}d}(x). \quad (18)$$

Докажем, что $R_{2^{t+1}d}(x) = P(T_{2^t d})(x)$ при нечетном $d > 1$ и $R_{2^{t+1}}(x) = 2P(T_{2^t})(x)$. Доказательство проведем индукцией по количеству простых делителей нечетного числа q , где $n = 2^t q$. Обозначим за s количество не обязательно различных простых делителей нечетного числа q . При $s = 0$, то есть $q = 1$ и $n = 2^t$, сравнивая (15) и (18), имеем $R_{2^{t+1}}(x) = 2P(T_{2^t})(x)$. Пусть справедливо разложение (15) на неприводимые над $\mathbb{Q}$ множители и p — простое нечетное число. Тогда с одной стороны запишем

$$T_{pn}(x) = P(T_{pn})(x) \cdot \prod_{d|q} P(T_{2^t d})(x) \prod_{d|q, d \neq q} P(T_{2^t p d})(x) = \prod_{d|pq} P(T_{2^t d})(x),$$

а с другой стороны из (18) по предположению индукции имеем

$$T_{pn}(x) = \frac{1}{2} \prod_{d|pq} R_{2^{t+1}d}(x) = R_{2^{t+1}pq}(x) \cdot \prod_{d|q} P(T_{2^t d})(x) \prod_{d|q, d \neq q} P(T_{2^t p d})(x).$$

Следовательно, $R_{2^{t+1}pq}(x) = P(T_{pn})(x)$, что и требовалось доказать.

Для доказательства соотношения (16) аналогично запишем

$$\begin{aligned} Q_n(y^2) &= \frac{1}{2y} \left((1+y)^n - (1-y)^n \right) = \frac{(1-y)^n}{2y} \left(\left(\frac{1+y}{1-y} \right)^n - 1 \right) = \\ &= \frac{(1-y)^n}{2y} \prod_{d|n} \Phi_d \left(\frac{1+y}{1-y} \right) = \frac{(1-y)^n}{2y} \prod_{d|q} \Phi_d \left(\frac{1+y}{1-y} \right) \prod_{d|\frac{n}{2}} \Phi_{2d} \left(\frac{1+y}{1-y} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где последнее произведение считаем пустым, если n нечетно. Отметим, что $M\Phi_1(y) = 2y$, и при нечетных d справедливо $\Phi_d(y) = \Phi_{2d}(-y)$. Продолжая (19), получаем

$$Q_n(x) = \frac{1}{2y} \prod_{d|q} M\Phi_d(y) \prod_{d|\frac{n}{2}} M\Phi_{2d}(y) = \prod_{d|q, d>1} M(\Phi_{2d}(-y)) \prod_{d|\frac{n}{2}} M\Phi_{2d}(y).$$

Остается, как и ранее, по индукции по количеству не обязательно различных нечетных простых делителей n заметить, что $M\Phi_2(y) = 2$, и при $d > 1$ верно равенство

$$M(\Phi_{2d}(-y)) = (1-y)^{\phi(2d)}\Phi_{2d}\left(-\frac{1+y}{1-y}\right) = \tilde{P}(T_d)(x).$$

Теорема 1 доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n = 2^t q$, q нечетно, тогда $\deg P(T_n) = \deg \tilde{P}(T_n) = 2^{t-1}\phi(q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В ходе доказательства теоремы 1 показано, что при $x = y^2$ и $n = 2^t q > 1$ справедливы равенства

$$P(T_{2^t q})(x) = R_{2^{t+1}q}(x) = \Psi_{2^{t+1}q}(y) = M\Phi_{2^{t+1}q}(y),$$

причем $\deg M\Phi_{2^{t+1}q}(y) = \deg \Phi_{2^{t+1}q}(y) = 2^t \phi(q)$. Следовательно, $\deg P(T_n) = \deg \tilde{P}(T_n) = 2^{t-1}\phi(q)$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n = 2^t q$, q нечетно, тогда

$$\omega(T_n) = \begin{cases} \tau(q), & t > 0, \\ \tau(q) - 1, & t = 0; \end{cases} \quad \omega(Q_n) = \begin{cases} \tau(n/2) + \tau(q) - 2, & t > 0, \\ \tau(q) - 1, & t = 0, \end{cases} \quad (20)$$

где функция $\omega(R)$ обозначает количество нетривиальных неприводимых над $\mathbb{Q}$ множителей многочлена R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следствия сразу следует из теоремы 1. $\square$

Теорема 1 позволяет восстановить все алгебраические корни многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$, через корни из 1 соответствующих степеней:

- если ξ — примитивный корень из 1 степени $2^{t+1}d$, где $n = 2^t q$, q нечетное, $d \mid q$, то $x_\xi = (\xi - 1)^2/(\xi + 1)^2$ — корень многочлена $T_n(x)$;
- если ξ — примитивный корень из 1 степени $2d$, где n четное, $d \mid \frac{n}{2}$, то $x_\xi = (\xi - 1)^2/(\xi + 1)^2$ — корень многочлена $Q_n(x)$;
- если ξ — примитивный корень из 1 степени $2d$, где $n = 2^t q$, q нечетно, $d \mid q$, то $x_\xi = (\xi + 1)^2/(\xi - 1)^2$ — корень многочлена $Q_n(x)$.

СЛЕДСТВИЕ 5. У многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ в совокупности для всех $n \in \mathbb{N}$ количество различных неприводимых над $\mathbb{Q}$ множителей ограниченной степени конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 следует, что множество различных неприводимых над $\mathbb{Q}$ множителей многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ при $n \in \mathbb{N}$ есть

$$\{P(T_k)(x), \quad k \in \mathbb{N}\}.$$

Из следствия 3 и нижних оценок на функцию $\phi(q)$ получаем, что неравенство $\deg P(T_n)(x) \leq C$ влечет $n \leq 2C \ln \ln C$. $\square$

3. О периодичности ключевых элементов

Пусть K — произвольное поле характеристики отличной от 2. Пусть $f \in K[x]$ — свободный от квадратов многочлен степени $2g + 2$, $g \geq 1$, со старшим коэффициентом, являющимся полным квадратом в мультипликативной группе K^* поля K . Рассмотрим $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ — гиперэллиптическое поле. В статье [4] определено отношение эквивалентности “ $\approx$ ” для элементов $\alpha, \beta \in \mathcal{L} \setminus K(x)$, а именно $\alpha \approx \beta$, если найдутся $T, R, U, V \in K[x]$ такие, что

$$\alpha = \frac{T + R\beta}{U + V\beta}, \quad TV - RU \in K^*.$$

В частности, легко проверить, что $\alpha \approx 1/\alpha$. В теореме 1 [4] доказано, что $\alpha \approx \beta$ для $\alpha, \beta \in \mathcal{L} \setminus K(x)$ тогда и только тогда, когда $\beta_m = c\alpha_n$ для некоторых $m, n \in \mathbb{N}_0$, $c \in K^*$. Отсюда следует, что непрерывные дроби элементов $\alpha \approx \beta$, построенные в поле формальных степенных рядов $K((1/x))$, одновременно квазипериодические (периодические) или не квазипериодические (не периодические).

ЛЕММА 3. Пусть в гиперэллиптическом поле $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ есть фундаментальная единица $\Omega_1 + \Omega_2\sqrt{f}$, где $\Omega_1, \Omega_2 \in K[x]$, $\Omega_2 \neq 0$. Тогда существуют такие многочлены $f_1, f_2, \Omega_3, \Omega_4 \in K[x]$, что $\deg \Omega_3 \leq \deg \Omega_1$, $v_x(\Omega_3) = \max\{v_x(\Omega_1), v_x(\Omega_2)\}$ и для некоторого $b \in K^*$ справедливы условия

$$f_2\Omega_4^2 - f_1\Omega_3^2 = 1, \quad f_1 \cdot f_2 = b^2 f, \quad \deg f_2 > 0, \quad v_x(f_2) = v_x(\Omega_4) = 0, \quad (21)$$

причем в случае $v_x(\Omega_2^2 f) > 0$ имеем $\deg f_1 > 0$.

Обратно, если даны многочлены $f_1, f_2, \Omega_3, \Omega_4 \in K[x]$, удовлетворяющие условиям (21), то в поле $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ есть фундаментальная единица $\Omega_1 + \Omega_2\sqrt{f}$, причем $\deg \Omega_1 \leq \deg \Omega_3^2 f_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо соотношение $\Omega_1^2 - \Omega_2^2 f = \gamma \in K^*$. В случае, если $v_x(\Omega_2^2 f) = 0$ в качестве многочленов $f_1, f_2, \Omega_3, \Omega_4 \in K[x]$ можно взять

$$f_1 = -1/\gamma, \quad f_2 = -f/\gamma, \quad \Omega_3 = \Omega_1, \quad \Omega_4 = \Omega_2, \quad (22)$$

тогда $b = -1/\gamma$ и справедливы условия (21) и другие условия леммы.

Пусть теперь $v_x(\Omega_2^2 f) > 0$, тогда $\gamma = b^{-2}$ для некоторого $b \in K^*$. Выберем знак у постоянной b так, что

$$b^2\Omega_2^2 f = b^2\Omega_1^2 - 1 = (b\Omega_1 - 1)(b\Omega_1 + 1), \quad v_x(b\Omega_1 - 1) > 0.$$

Поскольку $(b\Omega_1 - 1, b\Omega_1 + 1) \in K^*$, то существуют многочлены $f_1, f_2, \Omega_3, \Omega_4 \in K[x]$, удовлетворяющие условиям

$$b\Omega_1 - 1 = 2\Omega_3^2 f_1, \quad b\Omega_1 + 1 = 2\Omega_4^2 f_2, \quad \Omega_2 = 2\Omega_3\Omega_4, \quad b^2 f = f_1 f_2. \quad (23)$$

Для таких многочленов справедливы условия (21) и условия леммы, причем $\deg f_1 > 0$ и $\deg f_2 > 0$, поскольку в противном случае фундаментальная единица имела бы вид $\Omega_3 + \Omega_4\sqrt{f_2/f_1}$ или $\Omega_4 + \Omega_3\sqrt{f_1/f_2}$ соответственно.

Обратное утверждение следует из формул (22) или (23) соответственно при $\deg f_1 = 0$ или $\deg f_1 > 0$. $\square$

Следующая лемма обобщает лемму 1 [28].

ЛЕММА 4. Пусть многочлены $f_1, f_2, \Omega_3, \Omega_4 \in K[x]$ удовлетворяют (21) и $s \in \mathbb{Z}$. Если $-v_x(f_1) - v_x(\Omega_3) \leq s \leq v_x(\Omega_3)$, то

$$\frac{1}{x^s \sqrt{f}} \approx x^s \sqrt{f} \approx x^s \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} \approx x^{-s} \sqrt{\frac{f_2}{f_1}}, \quad (24)$$

а если $-v_x(\Omega_3) \leq s \leq v_x(\Omega_3) + v_x(f_1)$, то

$$\frac{x^s}{\sqrt{f}} \approx \frac{\sqrt{f}}{x^s} \approx x^{-s} \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} \approx x^s \sqrt{\frac{f_2}{f_1}}. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замена s на $-s$ превращает (24) в (25). Кроме того, поскольку $\alpha \approx 1/\alpha$, то достаточно доказать только соотношение $x^{-s}\sqrt{f} \approx x^{-s}\sqrt{f_1/f_2}$ для $-v_x(\Omega_3) \leq s \leq v_x(\Omega_3) + v_x(f_1)$.

Рассмотрим $T = x^{-s}\Omega_3 f_1$, $R = \Omega_4$, $U = \Omega_4 f_2$, $V = x^s \Omega_3$, тогда из (21) имеем

$$TV - RU = -(f_2 \Omega_4^2 - f_1 \Omega_3^2) \in K^*, \quad T, R, U, V \in K[x],$$

$$\frac{\sqrt{f}}{x^s} \approx \frac{T + R\sqrt{f}/x^s}{U + V\sqrt{f}/x^s} = x^{-s} \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}.$$

Лемма 4 доказана. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть многочлены $f_1, f_2, \Omega_3, \Omega_4 \in K[x]$ удовлетворяют (21) и $s \in \mathbb{Z}$. Если $-v_x(f_1) - v_x(\Omega_3) \leq s \leq v_x(\Omega_3)$, то непрерывные дроби элементов из (24) периодические, а если $-v_x(\Omega_3) \leq s \leq v_x(\Omega_3) + v_x(f_1)$, то непрерывные дроби элементов из (25) периодические.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку f свободен от квадратов, то $0 \leq v_x(f) \leq 1$. Определим v_∞ как одно из продолжений бесконечного нормирования поля $K(x)$ на поле $\mathcal{L}$. В силу того, что $\deg_x f_2 > 0$, имеем

$$\begin{aligned} \min \left(v_\infty \left(x^{-s}/\sqrt{f} \right), v_\infty \left(x^s \sqrt{f} \right), v_\infty \left(x^s \sqrt{f_1/f_2} \right), v_\infty \left(x^{-s} \sqrt{f_2/f_1} \right) \right) &< 0, \\ \min \left(v_\infty \left(x^s/\sqrt{f} \right), v_\infty \left(x^{-s} \sqrt{f} \right), v_\infty \left(x^{-s} \sqrt{f_1/f_2} \right), v_\infty \left(x^s \sqrt{f_2/f_1} \right) \right) &< 0. \end{aligned}$$

У всех этих элементов один и тот же дискриминант D , причем при $v_x(f) = 0$ или $s = 0$ имеем $D = x^{2|s|}f$, а при $v_x(f) = 1$ и $s \neq 0$ имеем $D = x^{2|s|-2}f$. Следовательно, по теореме 2 [4] получаем, что непрерывные дроби элементов $x^s\sqrt{f}$ и $x^{-s}\sqrt{f}$ квазипериодические. Наконец, по теореме 3 [4] и лемме 4 получаем периодичность непрерывных дробей всех элементов из (24) и (25) соответственно.

Предложение 8 доказано. $\square$

4. Оценки на длину квазипериода и периода

Пусть элемент $\beta \in \mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ является корнем уравнения

$$\Lambda_2 X^2 + 2\Lambda_1 X + \Lambda_0 = 0, \quad (26)$$

где $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2 \in K[x]$ взаимно простые многочлены. Обозначим $D = \Lambda_1^2 - \Lambda_0 \Lambda_2$. Тогда по теореме 2 [4] квазипериодичность непрерывной дроби $\beta = [a_0; a_1, \dots]$ в $K((1/x))$ эквивалентна наличию решения $\Theta_1, \Theta_2 \in K[x]$, $\Theta_2 \neq 0$, уравнения

$$\Theta_1^2 - \Theta_2^2 D = \gamma \in K^*. \quad (27)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть существует решение $\Theta_1, \Theta_2 \in K[x]$, $\Theta_2 \neq 0$, уравнения (27). Тогда непрерывная дробь элемента β может быть записана следующим образом

$$\beta = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, \overline{a_n, \dots, a_t^c}],$$

где $a_n, \dots, a_t$ — квазипериод, c — константа квазипериода, причем

$$\sum_{j=n}^t \deg a_j \leq \deg \Theta_2 + \max \left(\deg \Lambda_1, \frac{1}{2} (\deg \Lambda_0 + \deg \Lambda_2) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. теорему 2 [28]. $\square$

При введенных обозначениях $N = t - n + 1$ — длина квазипериода непрерывной дроби β , следовательно, по предложению 9 справедлива оценка

$$N \leq \deg \Theta_2 + \max \left(\deg \Lambda_1, \frac{1}{2} (\deg \Lambda_0 + \deg \Lambda_2) \right).$$

ТЕОРЕМА 2. *Элемент $\beta = \sqrt{f}/x^s \in \mathcal{L}$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$ имеет периодическое разложение в непрерывную дробь тогда и только тогда, когда существуют многочлены $f_1, f_2, \Omega_3, \Omega_4 \in K[x]$, которые удовлетворяют условиям (21) для некоторого $b \in K^*$ и $-v_x(\Omega_3) \leq s \leq v_x(\Omega_3) + v_x(f_1)$. В случае периодичности непрерывной дроби элемента β для длины квазипериода N справедливы оценки*

$$N \leq \begin{cases} 2(\deg \Omega_3 + s + 1), & \text{если } s + g + 1 < \deg f_1, \\ 2(\deg \Omega_3 + \deg f_1 - g) - 1, & \text{если } s + g + 1 = \deg f_1, \\ 2(\deg \Omega_3 - g), & \text{если } \deg f_1 < s + g + 1 < \deg f, \\ 2(\deg \Omega_3 + \deg f_1 - g) - 1, & \text{если } s + g + 1 = \deg f, \\ 2(\deg \Omega_3 + \deg f_1 - s + 1), & \text{если } \deg f < s + g + 1, \end{cases}$$

где $\deg f = 2g + 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существуют многочлены $f_1, f_2, \Omega_3, \Omega_4 \in K[x]$, удовлетворяющие условиям (21) для некоторого $b \in K^*$, и дано $s \in \mathbb{Z}$ такое, что $-v_x(\Omega_3) \leq s \leq v_x(\Omega_3) + v_x(f_1)$. Тогда по предложению 8 непрерывные дроби элементов из (25) периодические, и, в частности, периодическая непрерывная дробь элемента β .

Пусть теперь непрерывная дробь элемента β периодическая. Тогда по теореме 2 [4] существуют многочлены $\Theta_1, \Theta_2 \in K[x]$, являющиеся решением уравнения (27), где D — дискриминант элемента β , $D = \omega^2 f$. Без ограничения общности мы можем считать, что многочлены Θ_1, Θ_2 имеют минимальную степень среди возможных нетривиальных решений уравнения (27) при разных $\gamma \in K^*$. Имеем $\omega = x^{|s|}$ при $v_x(f) = 0$ или $s \leq 0$, и $\omega = x^{|s|-1}$ при $v_x(f) = 1$ и $s > 0$.

Если $v_x(\Theta_2^2 D) = 0$, то $s = 0$, $D = f$, и в качестве многочленов $f_1, f_2, \Omega_3, \Omega_4 \in K[x]$ можно взять

$$f_1 = -1/\gamma, \quad f_2 = -f/\gamma, \quad \Omega_3 = \Theta_1, \quad \Omega_4 = \Theta_2,$$

тогда $b = -1/\gamma$ и справедливы условия (21).

Рассмотрим теперь случай $v_x(\Theta_2^2 D) > 0$. Тогда $\gamma = b^{-2}$ для некоторого $b \in K^*$, причем можно выбрать знак у постоянной b так, что

$$b^2 \Theta_2^2 D = b^2 \Theta_1^2 - 1 = (b\Theta_1 - 1)(b\Theta_1 + 1), \quad v_x(b\Theta_1 - 1) > 0.$$

Поскольку $(b\Theta_1 - 1, b\Theta_1 + 1) \in K^*$, то существуют многочлены $f_1, f_2, \Omega_3, \Omega_4 \in K[x]$, удовлетворяющие условиям

$$b\Theta_1 - 1 = 2\Omega_3^2 f_1, \quad b\Theta_1 + 1 = 2\Omega_4^2 f_2, \quad \Theta_2 \omega = 2\Omega_3 \Omega_4, \quad b^2 f = f_1 f_2.$$

Заметим, что $\deg f_2 > 0$, поскольку в противном случае при $f_2 \in K^*$ многочлены $\Omega_4, \Omega_3/\omega$ также являются решением уравнения типа (27), но меньшей степени, чем решение Θ_1, Θ_2 . Таким образом, для многочленов $f_1, f_2, \Omega_3, \Omega_4$ справедливы условия (21) и $-v_x(\Omega_3) \leq s \leq v_x(\Omega_3) + v_x(f_1)$, поскольку многочлен ω делит Ω_3 .

Перейдем к доказательству оценки на длину квазипериода N .

По предложению 8 непрерывные дроби элементов из (24) и (25) периодические, причем по лемме 4 периоды для элементов из (24) и (25) соответственно совпадают с точностью до сдвига и умножения на некоторую постоянную. Следовательно, среди неполных частных непрерывной дроби β , входящих в квазипериодическую часть, найдутся неполные частные каждой положительной степени из $-v_{\infty}^{-}(\alpha)$ для элементов α из (25). Значит, степени некоторых неполных частных a_j можно оценить сверху более точно значениями

$$\max(1, |g + 1 - s|), \quad \max(1, |s + g + 1 - \deg f_1|).$$

Обозначим

$$\delta = \max(0, |g + 1 - s| - 1) + \max(0, |s + g + 1 - \deg f_1| - 1), \quad (28)$$

тогда $0 \leq \delta \leq 2 \max(s - 1, g)$ и справедлива оценка

$$\deg A \geq \deg P_t = \sum_{j=0}^t \deg a_j \geq \deg P_{n-1} + N + \delta. \quad (29)$$

Далее, по предложению 9, для элемента $\beta = \sqrt{f}/x^s$ получаем

$$N + \delta \leq \max\left(\deg \Theta_1, \deg \Theta_2 + \frac{\deg \Lambda_0 + \deg \Lambda_2}{2}\right) = \deg \Theta_1 \leq 2 \deg \Omega_3 + \deg f_1.$$

Далее, раскрывая значение модулей в δ , получаем требуемые оценки на длину квазипериода N .

Теорема 2 доказана. $\square$

Из предложения 8 и теоремы 2 следует, что для ключевых элементов вида $\sqrt{f}/x^s$ условие квазипериодичности непрерывной дроби, построенной в поле $K((1/x))$, эквивалентно условию ее периодичности. Это следствие эквивалентно результату, полученному впервые в статье [12] о периодичности непрерывных дробей, построенных в поле $K((x))$, для ключевых элементов вида $\sqrt{f}/x^s$.

Из оценок теоремы 2 на длину квазипериода N следует, что для любых $s \in \mathbb{Z}$ справедливо неравенство $N \leq 2 \deg(\Omega_3 + \deg f_1 - g)$. В случае, когда многочлен f неприводим, имеем $f_1 \in K^*$ и длина квазипериода N не превосходит $2(\deg \Omega_3 - g)$.

5. Оценка сверху длин периодов непрерывных дробей ключевых элементов над числовыми полями

Пусть в поле $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ существует фундаментальная единица $\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{f}$, где $\Psi_1, \Psi_2 \in K[x]$. Для $j \in \mathbb{N}$ положим $\Omega_1^{(j)}, \Omega_2^{(j)} \in K[x]$ такие многочлены, что

$$\Omega_1^{(j)} + \Omega_2^{(j)}\sqrt{f} = (\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{f})^j. \quad (30)$$

Положим $Z = \Psi_2^2 f / \Psi_1^2$, тогда

$$\Omega_1^{(j)} + \Omega_2^{(j)}\sqrt{f} = \Psi_1^j (T_j(Z) + Q_j(Z)\sqrt{Z}), \quad (31)$$

где многочлены $T_n(x), Q_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $n \in \mathbb{N}$, определены в (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть $\beta \in \mathcal{L}$ — квадратичная иррациональность с дискриминантом $D(\beta) = \omega^2 f \in K[x]$. Для того, чтобы разложение элемента β в непрерывную дробь в поле $K((1/x))$ было квазипериодическим, необходимо и достаточно, чтобы нашелся номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что $\omega \mid \Omega_2^{(n)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2 [4] элемент β имеет квазипериодическую непрерывную дробь в поле $K((1/x))$ тогда и только тогда, когда для дискриминанта $D(\beta) = \omega^2 f$ справедливо соотношение (27) для некоторых ненулевых многочленов $\Theta_1, \Theta_2 \in K[x]$. Так как в поле $\mathcal{L}$ есть фундаментальная единица $\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{f}$, то без ограничения общности можно считать, что разрешимость соотношения (27) в многочленах Θ_1, Θ_2 равносильна для некоторого $n \in \mathbb{N}$ равенствам $\Theta_1 = \Omega_1^{(n)}$, $\Theta_2\omega = \Omega_2^{(n)}$, где многочлены $\Omega_1^{(n)}, \Omega_2^{(n)}$ определены в (30). Таким образом, необходимым и достаточным условием квазипериодичности непрерывной дроби элемента β является $\omega \mid \Omega_2^{(n)}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Пусть выполнены условия предложения 10, и число a является корнем многочлена ω . Необходимым условием того, что $\omega \mid \Omega_2^{(n)}$ является условие $\Omega_2^{(n)}(a) = 0$, которое согласно (31) равносильно условию

$$\lim_{x \rightarrow a} \Psi_1^{n-1}(x) \cdot \Psi_2(x) \cdot Q_n(Z) = 0, \quad \text{где} \quad Z = Z(x) = \Psi_2^2(x)f(x)/\Psi_1^2(x).$$

Обозначим $Q_n(Z, W)$ — однородный многочлен, соответствующий многочлену $Q_n(Z)$. Если $\Psi_1(a) = 0$, то $Q_n(\Psi_2^2(a)f(a), \Psi_1^2(a)) \neq 0$, поскольку $\Psi_2^2(a)f(a) \neq 0$, ибо $\Psi_1^2(x) - \Psi_2^2(x)f(x) \in K^*$. Таким образом, для квазипериодичности непрерывной дроби элемента β с дискриминантом $D(\beta) = \omega^2 f$ необходимо, чтобы для каждого корня a многочлена ω либо $\Psi_1(a) = 0$, либо $\Psi_2(a) = 0$, либо $Q_n(Z_a) = 0$, где $Z_a = Z(a)$ при $\Psi_1(a) \neq 0$. В случае, если у многочлена ω нет кратных корней, то приведенные необходимые условия являются также достаточными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ — гиперэллиптическое поле, в котором есть нетривиальная единица $\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{f}$ такая, что $\Psi_1^2 - \Psi_2^2 f = 1$. Пусть элемент α поля $\mathcal{L}$ имеет дискриминант $D = D(\alpha) = \omega^2 f$. Тогда следующие условия равносильны:

1. непрерывная дробь элемента α квазипериодическая;
2. найдется такое число $n \in \mathbb{N}$, что

$$\omega(x) \mid \Psi_2(x) \sum_{j \leq [\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2j+1} \Psi_1(x)^{n-2j-1} (\Psi_1(x)^2 - 1)^j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 10 условие квазипериодичности непрерывной дроби элемента α равносильно условию $\omega \mid \Omega_2^{(n)}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Из равенств (19) имеем

$$\begin{aligned} \Omega_2^{(n)}(x) &= \Psi_1^n(x) Q_n \left(\frac{\Psi_2^2(x)}{\Psi_1^2(x)} f(x) \right) \frac{\Psi_2(x)}{\Psi_1(x)} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Psi_2(x)}{\sqrt{\Psi_1(x)^2 - 1}} \left((\sqrt{\Psi_1(x)^2 - 1} + \Psi_1(x))^n - (\sqrt{\Psi_1(x)^2 - 1} - \Psi_1(x))^n \right) = \\ &= \frac{\Psi_2(x)}{\Psi_1(x)} \sum_{j \leq [\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2j+1} \Psi_1(x)^{n-2j-1} (\Psi_1(x)^2 - 1)^j. \end{aligned}$$

Предложение 11 доказано. $\square$

Легко видеть, что условие наличия в гиперэллиптическом поле $\mathcal{L}$ фундаментальной единицы равносильно наличию в поле $\mathcal{L}$ нетривиальной единицы $\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{f}$ такой, что $\Psi_1^2 - \Psi_2^2 f = 1$, как в предложении 11.

ТЕОРЕМА 3. Пусть K — расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ степени k . Пусть $f \in K[x]$ — свободный от квадратов многочлен, и в поле $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ есть фундаментальная единица $u = \Psi_1 + \Psi_2\sqrt{f}$ степени t , где $\Psi_1, \Psi_2 \in K[x]$. Пусть для $j \in \mathbb{N}$ многочлены $\Omega_1^{(j)}, \Omega_2^{(j)} \in K[x]$ определены соотношениями (30).

1. Если хотя бы одно из значений $v_x(f)$, $v_x(\Psi_1)$, $v_x(\Psi_2)$ отлично от нуля, то непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/x^s$, построенная в $K((1/x))$, периодическая тогда и только тогда, когда

$$-v_x(\Psi_1) - v_x(\Psi_2) \leq s \leq v_x(\Psi_1) + v_x(\Psi_2) + v_x(f).$$

В случае периодичности непрерывной дроби $\sqrt{f}/x^s$, длина квазипериода N не превосходит $mt - \delta$, где значение δ определено в (28) при некотором $f_1 \mid f$, $\deg f_1 < \deg f$.

2. Если $v_x(f) = v_x(\Psi_1) = v_x(\Psi_2) = 0$, то непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/x^s$, построенная в $K((1/x))$, периодическая тогда и только тогда, когда найдется такой номер n , что $v_x(\Omega_2^{(1)}) = \dots = v_x(\Omega_2^{(n-1)}) = 0$, $|s| \leq v_x(\Omega_2^{(n)})$ и $\phi(n) \mid 2k$. В случае периодичности непрерывной дроби $\sqrt{f}/x^s$, длина квазипериода N не превосходит $nt - \delta$, где значение δ определено в (28) при некотором $f_1 \mid f$, $\deg f_1 < \deg f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1 следует из результатов статьи [28].

Предположим, что $v_x(f) = v_x(\Psi_1) = v_x(\Psi_2) = 0$. Положим $Z = Z(x) = \Psi_2^2 f / \Psi_1^2$, тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство (31). Отметим, что $Z_0 = Z(0)$ определено корректно, поскольку $\Psi_1(0) \neq 0$. Согласно предложению 10 для периодичности элемента $\sqrt{f}/x^s$, $s \neq 0$ необходимо, чтобы для некоторого минимального $n \in \mathbb{N}$ было выполнено равенство $Q_n(Z)|_{x=0} = 0$, то есть число Z_0 должно быть корнем многочлена $Q_j(x)$. В силу минимальности n , число Z_0 не должно быть корнем многочленов $Q_1(x), \dots, Q_{n-1}(x)$. По теореме 1 число Z_0 должно быть корнем либо многочлена $P(T_{n/2})$ при четном n , либо многочлена $\tilde{P}(T_n)$ при нечетном n , поскольку остальные неприводимые над $\mathbb{Q}$ множители в разложении (16) содержатся в соответствующих разложениях на неприводимые над $\mathbb{Q}$ множители многочленов $Q_1(x), \dots, Q_{n-1}(x)$. По следствию 3 при четном $n = 2^t q$, $t \geq 1$, имеем $\deg P(T_{n/2}) = 2^{t-2} \phi(q)$, при нечетном $n = q$ имеем $\deg \tilde{P}(T_n) = \phi(q)/2$, откуда в силу неприводимости соответственно многочленов $P(T_{n/2})$ и $\tilde{P}(T_n)$ получаем условие $\phi(n) \mid 2k$. Более того, поле K в качестве подполя должно содержать поле разложения соответственно многочлена $P(T_{n/2})$ или многочлена $\tilde{P}(T_n)$.

Из оценок на длину квазипериода в предложении 9 и теореме 2 следует, что $N \leq \deg \Theta_1 - \delta = \deg \Omega_1^{(n)} - \delta = nt - \delta$.

Теорема 3 доказана. $\square$

По теореме 3 из условия $\phi(n) \mid 2k$ получаем в таблице 1 возможные значения n для различных значений $k = [K : \mathbb{Q}]$, $k \leq 10$. В статье [28] доказано, что при $k = 1$ все соответствующие значения n из таблицы 1 достигаются. Примеры 1-4 ниже показывают, что при $k = 2$ также достигаются все соответствующие значения n из таблицы 1. В частности, пример 4 показывает, что существуют примеры элементов вида $\sqrt{f}/x^s$, определенные над полем K , $[K : \mathbb{Q}] = 2$, длина квазипериода непрерывных дробей которых почти в 12 раз больше степени соответствующей фундаментальной единицы.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть справедливы обозначения теоремы 3, и непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/x^s$ периодическая. Пусть дополнительно выполнено одно из трех условий: либо $v_x(\Psi_1) > 0$, либо $v_x(f) = v_x(\Psi_1) = v_x(\Psi_2) = 0$, и n четно, либо $v_x(f) = v_x(\Psi_1) = v_x(\Psi_2) = 0$ и многочлен f неприводим. Тогда справедливы неравенства

$$N \leq \begin{cases} mn - 2g, & \text{если } |s| < g + 1, \\ mn - 2g - 1, & \text{если } |s| = g + 1, \\ mn - 2|s| - 2, & \text{если } |s| > g + 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $v_x(\Psi_1) > 0$ или многочлен f неприводим или n четно, то $f_1 \in K^*$. Следовательно, из (28) имеем $\delta = 2g$ при $|s| < g + 1$, $\delta = 2g + 1$ при $|s| = g + 1$, $\delta = 2|s| + 2$ при $|s| > g + 1$. $\square$

Таблица 1: Возможные значения n из теоремы 3 для различных значений $k = [K : \mathbb{Q}]$.

$k = [K : \mathbb{Q}]$	Множество возможных значений n
1	1, 2, 3, 4, 6
2	1, ..., 6, 8, 10, 12
3	1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 14, 18
4	1, ..., 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30
5	1, 2, 3, 4, 6, 11, 22
6	1, ..., 10, 12, 13, 14, 18, 21, 26, 28, 36, 42
7	1, 2, 3, 4, 6
8	1, ..., 10, 12, 13, 14, 18, 21, 26, 28, 36, 42
9	1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 14, 18, 19, 27, 38, 54
10	1, ..., 6, 8, 10, 11, 12, 22, 25, 33, 44, 50, 66

ТЕОРЕМА 4. Пусть K — числовое поле, $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ — гиперэллиптическое поле и b — некоторая постоянная, $\deg f \leq b$. Пусть $M = M(b)$ — множество многочленов D со старшим коэффициентом 1, $f \mid D$, $\deg D \leq b$, таких, что элементы поля $\mathcal{L}$ с дискриминантом $D \in M$ обладают квазипериодическим разложением в непрерывную дробь. Тогда множество M конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в поле $\mathcal{L}$ нет нетривиальных единиц, то множество M пусто, поскольку тогда в поле $\mathcal{L}$ нет элементов с квазипериодической непрерывной дробью. Пусть $\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{f}$ — фундаментальная единица поля $\mathcal{L}$. Пусть для $n \in \mathbb{N}$ многочлены $\Omega_1^{(n)}, \Omega_2^{(n)} \in K[x]$ определены соотношениями (30). Из (2) справедливо представление

$$\Omega_1^{(n)} + \Omega_2^{(n)}\sqrt{f} = \Psi_1^n \left(T_n \left(\frac{\Psi_2^2}{\Psi_1^2} f \right) + Q_n \left(\frac{\Psi_2^2}{\Psi_1^2} f \right) \frac{\Psi_2}{\Psi_1} \sqrt{f} \right). \quad (32)$$

По предложению 10 для того, чтобы непрерывная дробь квадратичной иррациональности $\alpha \in \mathcal{L}$, принадлежащей дискриминанту $D = \omega^2 f$, была квазипериодической необходимо и достаточно, чтобы нашелся номер n такой, что $\omega \mid \Omega_2^{(n)}$. По следствию 5 в совокупности для всех $n \in \mathbb{N}$ у многочленов Q_n количество различных неприводимых множителей ограниченной степени конечно, поэтому количество возможных делителей ω многочленов $\Omega_2^{(n)}$ при $n \in \mathbb{N}$, таких, что $\deg \omega \leq (b - \deg f)/2$, также конечно.

Теорема 4 доказана. $\square$

Напомним понятие обобщенного якобиана особой кривой согласно конструкции Розенлихта [33]-[34], подробно изложенной в монографии Серра [35]. Особой гиперэллиптической кривой соответствует неособая кривая $C : y^2 = f(x)$ и эффективный дивизор $\mathfrak{m}$, называемый модулем. Обобщенный якобиан $J_{\mathfrak{m}}$, ассоциированный с модулем $\mathfrak{m}$, есть расширение якобиана J неособой гиперэллиптической кривой C на линейную группу $\Lambda = \Lambda_{\mathfrak{m}}$ так, что последовательность $0 \rightarrow \Lambda \rightarrow J_{\mathfrak{m}} \rightarrow J \rightarrow 0$ точна. В статьях [36]-[37] установлена связь периодических функциональных непрерывных дробей с точками конечного порядка на обобщенных якобианах.

Пусть $P \in C(K)$ и образ дивизора $P - \iota P$ имеет конечный порядок в якобиане J , где ιP — гиперэллиптическая инволюция точки P . Пусть b — некоторая положительная постоянная. Положим $\mathcal{M} = \mathcal{M}(b)$ — множество обобщенных якобианов $J_{\mathfrak{m}}$, удовлетворяющих следующим свойствам:

- обобщенный якобиан $J_{\mathfrak{m}}$ ассоциирован с определенными над K модулем $\mathfrak{m}$ таким, что $\mathfrak{m} = \iota \mathfrak{m}$ и $\deg \mathfrak{m} \leq b$;

- образ дивизора $P - \iota P$ имеет конечный порядок в обобщенном якобиане J_m .

Тогда по теореме 4 множество $\mathcal{M}(b)$ конечно, поскольку каждому дискриминанту $D \in M(b)$ соответствует конечное число модулей $\mathfrak{m}$, удовлетворяющих приведенным выше условиям.

6. Оценка сверху длин периодов непрерывных дробей ключевых элементов над квадратичным полем

В статье [28] были найдены все рациональные корни последовательностей многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$, определенных в (1). Исходя из этого в той же статье были даны оценки на возможные длины периодов непрерывных дробей ключевых элементов вида $\sqrt{f}/x^s$, а также приведены соответствующие примеры, определенные над полем $\mathbb{Q}$.

Для квадратичных полей K из теоремы 3 и таблицы (1) следуют возможные оценки сверху на длины периодов непрерывных дробей ключевых элементов вида $\sqrt{f}/x^s$, которые в первую очередь зависят от поля K и от степени фундаментальной единицы гиперэллиптического поля $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$.

Исследуем последовательности многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$, на наличие корней в квадратичных полях, чтобы явно найти квадратичные поля K , над которыми выполнены соответствующие оценки на длину квазипериода из теоремы 3 при $k = 2$, а также все остальные квадратичные поля, над которыми справедливы такие же оценки, как над $\mathbb{Q}$. Далее приведем соответствующие примеры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Множество корней последовательности многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$, принадлежащих квадратичным полям, исчерпывается множеством*

$$M = \left\{ -1, -\frac{1}{3}, -3, -3 \pm 2\sqrt{2}, \frac{-5 \pm 2\sqrt{5}}{5}, -5 \pm 2\sqrt{5}, -7 \pm 4\sqrt{3} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\deg T_n = \left[\frac{n}{2} \right]$, $\deg Q_n = \left[\frac{n-1}{2} \right]$ и

$$\begin{aligned} T_1(x) &= 1, & Q_1(x) &= 1, & T_2(x) &= x + 1, & Q_2(x) &= 2, \\ T_3(x) &= 3x + 1, & Q_3(x) &= x + 3, & T_4(x) &= x^2 + 6x + 1, & Q_4(x) &= 4(x + 1), \\ T_5(x) &= 5x^2 + 10x + 1, & Q_5(x) &= x^2 + 10x + 5, \\ T_6(x) &= (x + 1)(x^2 + 14x + 1), & Q_6(x) &= 2(x + 3)(3x + 1), \dots \end{aligned}$$

Множество различных корней многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ при $n \leq 6$ в точности совпадает с множеством M . Из теоремы 1 и следствия 3 получаем, что при $n > 6$ справедливы соотношения $\deg P(T_n) = \deg \tilde{P}(T_n) \geq 3$. Значит, при $n > 6$ у многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ нет других корней, лежащих в квадратичных полях, по сравнению с корнями из множества M . $\square$

ПРИМЕР 1. *Рассмотрим гиперэллиптическое поле $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ рода $g = 1$, заданное над полем $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ с помощью многочлена*

$$\begin{aligned} f &= x^4 + 4x^3 - 4\sqrt{5}x^2 - 8x^2 - 72x - 24\sqrt{5}x - 40 - 8\sqrt{5} = \\ &= \left(-x^2 - 2\sqrt{5}x - 4x - 6\sqrt{5} - 10 \right) \left(-x^2 + 2\sqrt{5}x - 2 + 2\sqrt{5} \right). \end{aligned}$$

В поле $\mathcal{L}$ есть фундаментальная единица $\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{f}$ степени $m = 4$,

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= -\frac{3x^4}{8} + \frac{\sqrt{5}x^4}{8} - \frac{3x^3}{4} + \frac{\sqrt{5}x^3}{4} + 2x^2 + 6x - 6 - 2\sqrt{5}, \\ \Psi_2 &= -\frac{3x^2}{8} + \frac{\sqrt{5}x^2}{8} + 1 = \left(-\frac{\sqrt{5}x}{4} + \frac{x}{4} - 1 \right) \left(-\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{5}x}{4} - 1 \right). \end{aligned}$$

Непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}$ имеет вид

$$\sqrt{f} = \left[x^2 + 2x - 6 - 2\sqrt{5}; \frac{x(-3 + \sqrt{5})}{32}, 4x, \frac{-3x^2 + \sqrt{5}x^2 - 6x + 2\sqrt{5}x + 8}{64}, \right. \\ \left. \frac{4x, \frac{x(-3 + \sqrt{5})}{32}, 2(x^2 + 2x - 6 - 2\sqrt{5})}{32} \right].$$

Длина квазипериода равна 3, коэффициент квазипериода равен $-32(3 + \sqrt{5})$, длина периода равна 6. Непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/x$ имеет вид

$$\frac{\sqrt{f}}{x} = \left[x + 2; \frac{x-4}{2(\sqrt{5}+3)}, -\frac{\sqrt{5}x+3x+7\sqrt{5}+19}{8}, 2(-18x+8\sqrt{5}x-3\sqrt{5}+7), \right. \\ \frac{\frac{(4\sqrt{5}+9)(x+2)}{32}, -4(-11x+5\sqrt{5}x-6+2\sqrt{5}), -\frac{-x+\sqrt{5}x+12}{64},}{-8(2x+\sqrt{5}x-3-\sqrt{5}), -\frac{(-9+4\sqrt{5})(x+2)}{32}, 4(11x+5\sqrt{5}x+16\sqrt{5}+36),} \\ \frac{-29x+13\sqrt{5}x-72+32\sqrt{5}}{64}, 4(11x+5\sqrt{5}x+16\sqrt{5}+36), -\frac{(-9+4\sqrt{5})(x+2)}{32}, \\ -8(2x+\sqrt{5}x-3-\sqrt{5}), -\frac{-x+\sqrt{5}x+12}{64}, -4(-11x+5\sqrt{5}x-6+2\sqrt{5}), \\ \frac{(4\sqrt{5}+9)(x+2)}{32}, 2(-18x+8\sqrt{5}x-3\sqrt{5}+7), -\frac{\sqrt{5}x+3x+7\sqrt{5}+19}{8}, \\ \left. \frac{-\frac{x-4}{2(\sqrt{5}+3)}, 2(x+2)}{32} \right].$$

Длина квазипериода равна $N = 20$ и совпадает с длиной периода. В данном примере при обозначениях теоремы 3 имеем $s = 1$, $n = 5$, $v_x(\Omega_2^{(1)}) = \dots = v_x(\Omega_2^{(4)}) = 0$, $v_x(\Omega_2^{(5)}) = 1$, $k = [K : \mathbb{Q}] = 2$ и $\phi(n) \mid 2k$. По теореме 3 имеем оценку на длину квазипериода $N \leq nt - \delta = 20$, поскольку $\deg f_1 = 2$, $\delta = 0$. Получается, что на этом примере достигается верхняя оценка на длину квазипериода теоремы 3.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим гиперэллиптическое поле $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ рода $g = 1$, заданное над полем $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ с помощью многочлена

$$f = x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 8\sqrt{2}x^2 - 96x - 48\sqrt{2}x - 32.$$

В поле $\mathcal{L}$ есть фундаментальная единица $\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{f}$ степени $m = 4$,

$$\Psi_1 = -\frac{x^4}{4} + \frac{\sqrt{2}x^4}{8} - \frac{x^3}{2} + \frac{\sqrt{2}x^3}{4} + 2x^2 + 6x - 8 - 4\sqrt{2}, \\ \Psi_2 = -\frac{x^2}{4} + \frac{\sqrt{2}x^2}{8} + 1.$$

Непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}$ имеет вид

$$\sqrt{f} = \left[x^2 + 2x - 8 - 4\sqrt{2}; \frac{x(-2 + \sqrt{2})}{32}, 4x, \frac{-2x^2 + \sqrt{2}x^2 - 4x + 2\sqrt{2}x + 8}{64}, \right. \\ \left. \frac{4x, \frac{x(-2 + \sqrt{2})}{32}, 2(x^2 + 2x - 8 - 4\sqrt{2})}{32} \right].$$

Длина квазипериода равна 3, коэффициент квазипериода равен $-64(\sqrt{2} + 2)$, длина периода равна 6. Непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/x$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{f}}{x} = & \left[x + 2; \overline{-\frac{x-4}{4(\sqrt{2}+2)}, -\frac{\sqrt{2}x+2x+8\sqrt{2}+14}{4}, -10x+7\sqrt{2}x-4\sqrt{2}+6,} \right. \\ & \overline{\frac{(7\sqrt{2}+10)(x+2)}{16}, -2\left(-7x+5\sqrt{2}x-6+4\sqrt{2}\right), -\frac{x+\sqrt{2}x+6\sqrt{2}+10}{8},} \\ & \overline{-\sqrt{2}x+x-2\sqrt{2}+4, \frac{x+2}{4}, -x+2\sqrt{2}+4, \frac{-3x+2\sqrt{2}x-10+6\sqrt{2}}{8},} \\ & \overline{-2\left(2\sqrt{2}+3\right)(x-2), -\frac{(-10+7\sqrt{2})(x+2)}{16}, -3x^2-2\sqrt{2}x^2+28\sqrt{2}+40,} \\ & \overline{-\frac{-17x^3+12\sqrt{2}x^3-34x^2+24\sqrt{2}x^2-28\sqrt{2}x+40x-112\sqrt{2}+160}{64},} \\ & \overline{-3x^2-2\sqrt{2}x^2+28\sqrt{2}+40, -\frac{(-10+7\sqrt{2})(x+2)}{16}, -2\left(2\sqrt{2}+3\right)(x-2),} \\ & \overline{\frac{-3x+2\sqrt{2}x-10+6\sqrt{2}}{8}, -x+2\sqrt{2}+4, \frac{x+2}{4}, -\sqrt{2}x+x-2\sqrt{2}+4,} \\ & \overline{-\frac{x+\sqrt{2}x+6\sqrt{2}+10}{8}, -2\left(-7x+5\sqrt{2}x-6+4\sqrt{2}\right), \frac{(7\sqrt{2}+10)(x+2)}{16},} \\ & \left. \overline{-10x+7\sqrt{2}x-4\sqrt{2}+6, -\frac{\sqrt{2}x+2x+8\sqrt{2}+14}{4}, -\frac{x-4}{4(\sqrt{2}+2)}, 2(x+2)} \right]. \end{aligned}$$

Длина квазипериода равна $N = 28$ и совпадает с длиной периода. В данном примере при обозначениях теоремы 3 имеем $s = 1$, $n = 8$, $v_x\left(\Omega_2^{(1)}\right) = \dots = v_x\left(\Omega_2^{(7)}\right) = 0$, $v_x\left(\Omega_2^{(8)}\right) = 1$, $k = [K : \mathbb{Q}] = 2$ и $\phi(n) \mid 2k$. По следствию 6 имеем оценку на длину квазипериода $N \leq nt - 2g = 30$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим гиперэллиптическое поле $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ рода $g = 1$, заданное над полем $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ с помощью многочлена

$$f = x^4 + 4x^3 - 16x^2 - 4\sqrt{5}x^2 - 120x - 24\sqrt{5}x - 40 + 8\sqrt{5}.$$

В поле $\mathcal{L}$ есть фундаментальная единица $\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{f}$ степени $m = 4$,

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= -\frac{x^4}{8} + \frac{\sqrt{5}x^4}{40} - \frac{x^3}{4} + \frac{\sqrt{5}x^3}{20} + 2x^2 + 6x - 10 - 2\sqrt{5}, \\ \Psi_2 &= -\frac{x^2}{8} + \frac{\sqrt{5}x^2}{40} + 1. \end{aligned}$$

Непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \sqrt{f} = & \left[x^2 + 2x - 10 - 2\sqrt{5}; \overline{\frac{x(-5+\sqrt{5})}{160}, 4x, \frac{-5x^2+\sqrt{5}x^2-10x+2\sqrt{5}x+40}{320},} \right. \\ & \left. \overline{4x, \frac{x(-5+\sqrt{5})}{160}, 2\left(x^2+2x-10-2\sqrt{5}\right)} \right]. \end{aligned}$$

Длина квазипериода равна 3, коэффициент квазипериода равен $-32(\sqrt{5} + 5)$, длина периода

равна 6. Непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/x$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{f}}{x} = & \left[x + 2; \frac{x-4}{2(\sqrt{5}+5)}, -\frac{\sqrt{5}x+5x+9\sqrt{5}+35}{8}, \frac{2(-10x+4\sqrt{5}x-5\sqrt{5}+15)}{25}, \right. \\ & \frac{5(2\sqrt{5}+5)(x+2)}{32}, -\frac{4(-15x+7\sqrt{5}x-70+30\sqrt{5})}{25}, -\frac{15x+7\sqrt{5}x+52\sqrt{5}+120}{64}, \\ & -\frac{8(-20x+9\sqrt{5}x-25+11\sqrt{5})}{5}, \frac{(4\sqrt{5}+9)(x+2)}{32}, \frac{4(-25x+11\sqrt{5}x-8\sqrt{5}+20)}{5}, \\ & \frac{5(x+8)}{16(-5+\sqrt{5})}, -\frac{4(\sqrt{5}x+5x-20)}{25}, -\frac{5(-5+2\sqrt{5})(x+2)}{32}, \\ & -\frac{8(2\sqrt{5}x+5x-35-15\sqrt{5})}{25}, \frac{-25x+11\sqrt{5}x-120+52\sqrt{5}}{64}, -\frac{4(11\sqrt{5}+25)(x-2)}{5}, \\ & -\frac{(-9+4\sqrt{5})(x+2)}{32}, -\frac{2(11\sqrt{5}x^2+25x^2-360-160\sqrt{5})}{5}, \\ & -\frac{-65x^3+29\sqrt{5}x^3-130x^2+58\sqrt{5}x^2-160\sqrt{5}x+360x-640\sqrt{5}+1440}{1280}, \\ & -\frac{2(11\sqrt{5}x^2+25x^2-360-160\sqrt{5})}{5}, -\frac{(-9+4\sqrt{5})(x+2)}{32}, -\frac{4(11\sqrt{5}+25)(x-2)}{5}, \\ & \frac{-25x+11\sqrt{5}x-120+52\sqrt{5}}{64}, -\frac{8(2\sqrt{5}x+5x-35-15\sqrt{5})}{25}, -\frac{5(-5+2\sqrt{5})(x+2)}{32}, \\ & -\frac{4(\sqrt{5}x+5x-20)}{25}, \frac{5(x+8)}{16(-5+\sqrt{5})}, \frac{4(-25x+11\sqrt{5}x-8\sqrt{5}+20)}{5}, \\ & \frac{(4\sqrt{5}+9)(x+2)}{32}, -\frac{8(-20x+9\sqrt{5}x-25+11\sqrt{5})}{5}, -\frac{15x+7\sqrt{5}x+52\sqrt{5}+120}{64}, \\ & \left. -\frac{4(-15x+7\sqrt{5}x-70+30\sqrt{5})}{25}, \frac{5(2\sqrt{5}+5)(x+2)}{32}, \frac{2(-10x+4\sqrt{5}x-5\sqrt{5}+15)}{25}, \right. \\ & \left. -\frac{\sqrt{5}x+5x+9\sqrt{5}+35}{8}, -\frac{x-4}{2(\sqrt{5}+5)}, 2(x+2) \right]. \end{aligned}$$

Длина квазипериода равна $N = 36$ и совпадает с длиной периода. В данном примере при обозначениях теоремы 3 имеем $s = 1$, $n = 10$, $v_x(\Omega_2^{(1)}) = \dots = v_x(\Omega_2^{(9)}) = 0$, $v_x(\Omega_2^{(10)}) = 1$, $k = [K : \mathbb{Q}] = 2$ и $\phi(n) \mid 2k$. По следствию 6 имеем оценку на длину квазипериода $N \leq nt - 2g = 38$.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим гиперэллиптическое поле $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ рода $g = 1$, заданное над полем $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ с помощью многочлена

$$f = x^4 + 4x^3 - 8\sqrt{3}x^2 - 12x^2 - 96x - 48\sqrt{3}x - 16.$$

В поле $\mathcal{L}$ есть фундаментальная единица $\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{f}$ степени $m = 4$,

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= -\frac{x^4}{2} + \frac{\sqrt{3}x^4}{4} - x^3 + \frac{\sqrt{3}x^3}{2} + 2x^2 + 6x - 8 - 4\sqrt{3}, \\ \Psi_2 &= -\frac{x^2}{2} + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} + 1. \end{aligned}$$

Непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}$ имеет вид

$$\sqrt{f} = \left[x^2 + 2x - 8 - 4\sqrt{3}; \frac{x(-2 + \sqrt{3})}{16}, 4x, \frac{-2x^2 + \sqrt{3}x^2 - 4x + 2\sqrt{3}x + 4}{32}, \right. \\ \left. 4x, \frac{x(-2 + \sqrt{3})}{16}, 2(x^2 + 2x - 8 - 4\sqrt{3}) \right].$$

Длина квазипериода равна 3, коэффициент квазипериода равен $-64(\sqrt{3} + 2)$, длина периода равна 6. Непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/x$ имеет вид

$$\frac{\sqrt{f}}{x} = \left[x + 2; -\frac{x-4}{4(\sqrt{3}+2)}, -\frac{\sqrt{3}x+2x+8\sqrt{3}+15}{4}, 4(-26x+15\sqrt{3}x-4\sqrt{3}+7), \right. \\ \frac{(15\sqrt{3}+26)(x+2)}{32}, -\frac{8(-45x+26\sqrt{3}x-14+8\sqrt{3})}{3}, -\frac{3(3x+2\sqrt{3}x+14\sqrt{3}+26)}{32}, \\ -\frac{8(-3x+2\sqrt{3}x-12+6\sqrt{3})}{27}, \frac{27(x+2)}{32}, \frac{4(-3x+\sqrt{3}x+6)}{27}, \frac{3(-3x+\sqrt{3}x-10)}{16}, \\ -\frac{-3x+\sqrt{3}x+4}{3}, \frac{x+2}{4}, -\sqrt{3}x+x+4, -\frac{-x+\sqrt{3}x+6}{16}, -4(-x+\sqrt{3}x-2), \frac{x+2}{32}, \\ -8(x-4-2\sqrt{3}), \frac{-7x+4\sqrt{3}x-18+10\sqrt{3}}{32}, -8(4\sqrt{3}+7)(x-2), \\ -\frac{(-26+15\sqrt{3})(x+2)}{32}, -4(4\sqrt{3}x^2+7x^2-104-60\sqrt{3}), \\ -\frac{-97x^3+56\sqrt{3}x^3-194x^2+112\sqrt{3}x^2-60\sqrt{3}x+104x-240\sqrt{3}+416}{128}, \\ -4(4\sqrt{3}x^2+7x^2-104-60\sqrt{3}), -\frac{(-26+15\sqrt{3})(x+2)}{32}, -8(4\sqrt{3}+7)(x-2), \\ \frac{-7x+4\sqrt{3}x-18+10\sqrt{3}}{32}, -8(x-4-2\sqrt{3}), \frac{x+2}{32}, -4(-x+\sqrt{3}x-2), \\ -\frac{-x+\sqrt{3}x+6}{16}, -\sqrt{3}x+x+4, \frac{x+2}{4}, \frac{-3x+\sqrt{3}x+4}{3}, \frac{3(-3x+\sqrt{3}x-10)}{16}, \\ \frac{4(-3x+\sqrt{3}x+6)}{27}, \frac{27(x+2)}{32}, -\frac{8(-3x+2\sqrt{3}x-12+6\sqrt{3})}{27}, \\ \frac{3(3x+2\sqrt{3}x+14\sqrt{3}+26)}{32}, -\frac{8(-45x+26\sqrt{3}x-14+8\sqrt{3})}{3}, \frac{(15\sqrt{3}+26)(x+2)}{32}, \\ \left. 4(-26x+15\sqrt{3}x-4\sqrt{3}+7), -\frac{\sqrt{3}x+2x+8\sqrt{3}+15}{4}, -\frac{x-4}{4(\sqrt{3}+2)}, 2(x+2) \right].$$

Длина квазипериода равна $N = 44$ и совпадает с длиной периода. В данном примере при обозначениях теоремы 3 имеем $s = 1$, $n = 12$, $v_x(\Omega_2^{(1)}) = \dots = v_x(\Omega_2^{(11)}) = 0$, $v_x(\Omega_2^{(12)}) = 1$, $k = [K : \mathbb{Q}] = 2$ и $\phi(n) \mid 2k$. По следствию 6 имеем оценку на длину квазипериода $N \leq nt - 2g = 46$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Artin E. Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen. I // Math. Z. 1924. Vol. 19, № 1. P. 153-246.

2. Платонов В. П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Том 69, № 1(415). С. 3-38.
3. Adams W. W., Razar M. J. Multiples of points on elliptic curves and continued fractions // Proc. London Math. Soc. 1980. Vol. 41, № 2. P. 481-498.
4. Schmidt W. M. On continued fractions and diophantine approximation in power series fields // Acta arithmetica. 2000. Vol. 95, № 2. P. 139-166.
5. Беньаш-Кривец В. В., Платонов В. П. Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби // Матем. сб. 2009. Том 200, № 1. С. 15-44.
6. Платонов В. П., Федоров Г. В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Матем. сб. 2018. Том 209, № 4. С. 54-94.
7. Федоров Г. В. О проблеме описания элементов эллиптических полей с периодическим разложением в непрерывную дробь над квадратичными полями констант // ДАН. 2022. Том 505, № 4. С. 56-62.
8. Платонов В. П., Жгун В. С., Петрунин М. М. О проблеме периодичности разложений в непрерывную дробь $\sqrt{f}$ для кубических многочленов f над полями алгебраических чисел // Матем. сб. 2022. Том 213, № 3. С. 139-170.
9. Платонов В. П., Федоров Г. В. О проблеме классификации многочленов f с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в гиперэллиптических полях // Известия РАН. Серия математическая. 2021. Том 85, № 5. С. 152-189.
10. Платонов В. П., Федоров Г. В. О проблеме классификации периодических непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Успехи математических наук. 2020. Том 75, № 4. С. 211-212.
11. Платонов В. П., Жгун В. С., Федоров Г. В. О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях над квадратичным полем констант // ДАН. 2018. Том 482, № 2. С. 137-141.
12. Платонов В. П., Петрунин М. М. Группы S-единиц и проблема периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Тр. МИАН. 2018. Том 302. С. 354-376.
13. Платонов В. П., Федоров Г. В. S-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2015. Том 465, № 5. С. 537-541.
14. Hickerson D. Length of period simple continued fraction expansion of $\sqrt{d}$ // Pacific Journal of Mathematics. 1973. Vol. 46, № 2. P. 429-432.
15. Cohn J. The length of the period of the simple continued fraction of $d^{1/2}$ // Pacific Journal of Mathematics. 1977. Vol. 71, № 1. P. 21-32.
16. Mkaouar M. Fractions continues et series formelles algebriques reduites // Portugaliae Mathematica. 2001. Vol. 58, № 4. P. 439-448.
17. Hbaib M., Mkaouar M. and Tounsi K. Un critere de transcendence dans le corps des series formelles $\mathbb{F}_q((X^{-1}))$ // J. Number Theory. 2006. Vol. 116. P. 140-149.
18. Basma A. On the continued fraction period for a square root of polynomial in $\mathbb{F}_q[X]$ // Journal for Algebra and Number Theory Academia. 2015. Vol. 5, № 3. P. 81-89.

19. Schinzel A. On some problems of the arithmetical theory of continued fractions // *Acta Arith.* 1960/1961. Vol. 6. P. 393-413.
20. Schinzel A. On some problems of the arithmetical theory of continued fractions. II // *Acta Arith.* 1961/1962. Vol. 7. P. 287-298.
21. Kubert D. S. Universal bounds on the torsion of elliptic curves // *Proc. London Math. Soc.* (3). 1976. Vol. 33, № 2. P. 193-237.
22. Van Der Poorten A. J., Tran X. C. Periodic continued fractions in elliptic function fields // *International Algorithmic Number Theory Symposium*. Springer, Berlin, Heidelberg. 2002. P. 390-404.
23. Scherr Z. L. Rational polynomial pell equations (thesis). // The University of Michigan, 2016.
24. Sadek M. Periodic continued fractions and elliptic curves over quadratic fields // *Journal of Symbolic Computation*. 2016. Vol. 76. P. 200-218.
25. Berry T. G. On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields // *Arch. Math.* 1990. Vol. 55. P. 259-266.
26. Платонов В. П., Жгун В. С., Федоров Г. В. Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях и многочлены Мамфорда // *ДАН*. 2016. Том 471, № 6. С. 640-644.
27. Платонов В. П., Федоров Г. В. Критерий периодичности непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей // *Чебышевский сборник*. 2019. Том 20, № 1. С. 246-258.
28. Федоров Г. В. Об ограниченности длин периодов непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей над полем рациональных чисел // *Чебышевский сборник*. 2019. Том 20, № 4. С. 321-334.
29. Федоров Г. В. О длине периода функциональной непрерывной дроби над числовым полем // *ДАН*. 2020. Том 495. С. 78-83.
30. Avanzi R. M., Zannier U. M. Genus one curves defined by separated variable polynomials and a polynomial Pell equation // *Acta Arithmetica*. 2001. Vol. 99. P. 227-256.
31. Van Der Poorten A. J. Some facts that should be better known, especially about rational functions // *Number theory and applications (Banff, AB, 1988)*. 1989. Vol. 265. P. 497-528.
32. Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Соболев Д. К., Соболева В. Н. Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей // *Чебышевский сборник*. 2017. Том 18, № 2. С. 98-128.
33. Rosenlicht M. Equivalence relations on algebraic curves // *Ann. of Math.* 1952. Vol. 56, № 3. P. 169-191.
34. Rosenlicht M. Generalized Jacobian varieties // *Ann. of Math.* 1954. Vol. 59, № 3. P. 505-530.
35. Serre Jean-Pierre Algebraic groups and class fields. — New York. Springer-Verlag, 1988.
36. Жгун В. С. Обобщенные якобианы и непрерывные дроби в гиперэллиптических полях // *Чебышевский сборник*. 2017. Том 18, № 4. С. 208-220.
37. Zannier U. Hyperelliptic continued fractions and generalized Jacobians // *American Journal of Mathematics*. 2019. Vol. 141, № 1. P. 1-40.

REFERENCES

1. Artin E. 1924. "Quadratische K'orper im Gebiete der h'oheren Kongruenzen. I", *Math. Z.*, vol. 19, no. 1, pp. 153-246.
2. Platonov V. P. 2014. "Number-theoretic properties of hyperelliptic fields and the torsion problem in Jacobians of hyperelliptic curves over the rational number field", *Russian Math. Surveys*, vol. 69, no. 1, pp. 1-34.
3. Adams W. W., Razar M. J. 1980. "Multiples of points on elliptic curves and continued fractions", *Proc. London Math. Soc.*, vol. 41, no. 2, pp. 481-498.
4. Schmidt W. M. 2000. "On continued fractions and diophantine approximation in power series fields", *Acta arithmetica*, vol. 95, no. 2, pp. 139-166.
5. Platonov V. P., Benyash-Krivets V. V. 2009. "Groups of S-units in hyperelliptic fields and continued fractions", *Sb. Math.*, vol. 200, no. 11, pp. 1587-1615.
6. Platonov V. P., Fedorov G. V. 2018. "On the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields", *Sb. Math.*, vol. 209, no. 4, pp. 519-559.
7. Fedorov G. V. 2022. "On the problem of describing elements of elliptic fields with a periodic expansion into a continued fraction over quadratic fields", *Dokl. Math.*, vol. 106, no. 1, pp. 259-264.
8. Platonov V. P., Zhgoon V. S., Petrunin M. M. 2022. "On the problem of periodicity of continued fraction expansions of $\sqrt{f}$ for cubic polynomials f over algebraic number fields", *Sb. Math.*, vol. 213, no. 3, pp. 412-442.
9. Platonov V. P., Fedorov G. V. 2021. "On the classification problem for polynomials f with a periodic continued fraction expansion of $\sqrt{f}$ in hyperelliptic fields", *Izv. Math.*, vol. 85, no. 5, pp. 972-1007.
10. Platonov V. P., Fedorov G. V. 2020. "On the problem of classification of periodic continued fractions in hyperelliptic fields", *Russian Math. Surveys*, vol. 75, no. 4, pp. 785-787.
11. Platonov V. P., Zhgoon V. S., Fedorov G. V. 2018. "On the Periodicity of Continued Fractions in Hyperelliptic Fields over Quadratic Constant Field", *Dokl. Math.*, vol. 98, no. 2, pp. 430-434.
12. Platonov V. P., Petrunin M. M. 2018. "Groups of S-units and the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 302, pp. 336-357.
13. Platonov V. P., Fedorov G. V. 2015. "S-units and periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields", *Dokl. Math.*, vol. 92, no. 3, pp. 752-756.
14. Hickerson D. 1973. "Length of period simple continued fraction expansion of $\sqrt{d}$ ", *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 46, no. 2, pp. 429-432.
15. Cohn J. 1977. "The length of the period of the simple continued fraction of $d^{1/2}$ ", *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 71, no. 1, pp. 21-32.
16. Mkaouar M. 2001. "Fractions continues et series formelles algebriques reduites", *Portugaliae Mathematica*, vol. 58, no. 4, pp. 439-448.
17. Hbaib M., Mkaouar M. and Tounsi K. 2006. "Un critere de transcendance dans le corps des series formelles $\mathbb{F}_q((X^{-1}))$ ", *J. Number Theory*, vol. 116, pp. 140-149.

18. Basma A. 2015. "On the continued fraction period for a square root of polynomial in $\mathbb{F}_q[X]$ ", *Journal for Algebra and Number Theory Academia*, vol. 5, no. 3, pp. 81-89.
19. Schinzel A. 1960/1961. "On some problems of the arithmetical theory of continued fractions", *Acta Arith.*, vol. 6, pp. 393-413.
20. Schinzel A. 1961/1962. "On some problems of the arithmetical theory of continued fractions. II", *Acta Arith.*, vol. 7, pp. 287-298.
21. Kubert D.S. 1976. "Universal bounds on the torsion of elliptic curves", *Proc. London Math. Soc. (3)*, vol. 33, no. 2, pp. 193-237.
22. Van Der Poorten A.J., Tran X.C. "Periodic continued fractions in elliptic function fields", *International Algorithmic Number Theory Symposium. Springer, Berlin, Heidelberg*, pp. 390-404.
23. Scherr Z.L. Rational polynomial pell equations (thesis). , The University of Michigan, 2016.
24. Sadek M. 2016. "Periodic continued fractions and elliptic curves over quadratic fields", *Journal of Symbolic Computation*, vol. 76, pp. 200-218.
25. Berry T. G. 1990. "On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields", *Arch. Math.*, vol. 55, pp. 259-266.
26. Platonov V.P., Zhgoon V.S., Fedorov G.V. 2016. "Continued Rational Fractions in Hyperelliptic Fields and the Mumford Representation", *Dokl. Math.*, vol. 94, no. 3, pp. 692-696.
27. Platonov V.P., Fedorov G.V. 2019. "The criterion of periodicity of continued fractions of key elements in hyperelliptic fields", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 246-258. (In Russ.)
28. Fedorov G.V. 2019. "On boundedness of period lengths of continued fractions of key elements hyperelliptic fields over the field of rational numbers", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 357-370. (In Russ.)
29. Fedorov G.V. 2020. "On the period length of a functional continued fraction over a number field", *Dokl. Math.*, vol. 102, no. 3, pp. 513-517.
30. Avanzi R.M., Zannier U.M. 2001. "Genus one curves defined by separated variable polynomials and a polynomial Pell equation", *Acta Arithmetica*, vol. 99, pp. 227-256.
31. Van Der Poorten A. J. 1989. "Some facts that should be better known, especially about rational functions", *Number theory and applications* (Banff, AB, 1988), vol. 265, pp. 497-528.
32. Dobrovol'skii N.M., Dobrovol'skii N.N., Sobolev D.K., Soboleva V.Ñ. 2017. "Classification purely real algebraic irrationalities", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 2, pp. 98-128. (In Russ.)
33. Rosenlicht M. 1952. "Equivalence relations on algebraic curves", *Ann. of Math.*, vol. 56, no. 3, pp. 169-191.
34. Rosenlicht M. 1954. "Generalized Jacobian varieties", *Ann. of Math.*, vol. 59, no. 3, pp. 505-530.
35. Serre Jean-Pierre Algebraic groups and class fields. — New York. Springer-Verlag, 1988.
36. Zhgoon V. S. 2017. "On generalized jacobians and rational continued fractions in the hyperelliptic fields", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 208-220. (In Russ.)

-
37. Zannier U. 2019. “Hyperelliptic continued fractions and generalized Jacobians”, *American Journal of Mathematics*, vol. 141, no. 1, pp. 1-40.

Получено: 26.04.2023

Принято в печать: 12.09.2023