

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 3.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-139-161

Точное неравенство Джексона — Стечкина в L_{2,μ_α}

Т. Е. Тилеубаев

Тилеубаев Тилектес Ершович — Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева (г. Астана).

e-mail: Tileubaev@mail.ru

Аннотация

В работе решено несколько экстремальных задач о наилучшем средне квадратическом приближений функций f , на полуоси с степенным весом, которые может быть применены при решении различных задач. Получены точные неравенства типа Джексона–Стечкина на некоторых классах функций, в которых величины наилучших приближений оцениваются сверху через модули гладкости Ганкеля k -го порядка.

Ключевые слова: Неравенство Джексона, модули гладкости, наилучшее приближение, точные константы.

Библиография: 36 названий.

Для цитирования:

Т. Е. Тилеубаев. Точное неравенство Джексона — Стечкина в L_{2,μ_α} // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 3, с. 139–161.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 3.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-139-161

The exact Jackson–Stechkin inequality in L_{2,μ_α}

Т. Е. Tileubayev

Tileubayev Tilektes Ereshovich — Eurasian L. N. Gumilyov National University (Astana).

e-mail: Tileubaev@mail.ru

Abstract

Several extremal problems on the best mean-square approximation of the functions f , on a semiaxis with a power-law weight are solved in the paper, which can be applied in solving various problems. Exact Jackson–Stechkin-type inequalities are obtained for some classes of functions in which the values of the best approximations are estimated from above in terms of k -th order Hankel moduli of smoothness.

Keywords: Jackson inequality, moduli of smoothness, best approximation, exact constants.

Bibliography: 36 titles.

For citation:

Т. Е. Tileubayev, 2023, “The exact Jackson–Stechkin inequality in L_{2,μ_α} ”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 139–161.

1. Введение

Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – пространство интегрируемых с квадратом по Лебегу 2π -периодических функций f с нормой $\|f\| = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

Пусть $\mathbb{T}_{n-1}$ – подпространство всевозможных тригонометрических многочленов порядка $n-1$. Известно, что для произвольной функции $f \in L_2$ имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx,$$

величина ее наилучшего приближения элементами $T_{n-1} \in \mathbb{T}_{n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf \{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathbb{T}_{n-1}\} = \|f - S_n f\|,$$

где $S_n f(x)$ – частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$.

модуль непрерывности k -го порядка функции $f \in L_2$ равенством $\omega_k(f, t)_2 = \sup \{\|\Delta_h^k f(\cdot)\| : |h| \leq t\}$, где $\Delta_h^k f(x) = \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} \binom{k}{m} f(x+mh)$ – разность k -го порядка функции $f(x)$ с шагом h .

Задача нахождения точных констант в неравенствах Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq \Xi^* \omega_k(f, \frac{\gamma}{n}), \quad f \in L^2$$

является одна из важнейших задач теории приближений в L^2 .

Постановка задачи. Требуется определить значение следующей величины

$$\Xi^* = \Xi^*(n, k, \gamma) = \sup \left\{ \frac{E_{n-1}(f)}{\omega_k(f, \frac{\gamma}{n})} : f \in L^2 \right\}$$

при фиксированных n, k и $\gamma > 0$.

Первые точные константы в неравенствах Джексона получили Н.П. Корнейчук [1] в пространстве $C[0, 2\pi]$, Н.И. Черных [2] в пространстве $L_2[0, 2\pi]$. А именно в 1967 г. Н.И. Черных в работе [2] доказал следующие теоремы:

ТЕОРЕМА (ЧЕРНЫХ). Пусть $f \in L_2[0, 2\pi]$. Тогда для любого $n = 1, 2, \dots$

$$E_n(f) < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega\left(\frac{\pi}{n+1}, f\right).$$

Следствие теоремы 1 (Черных [3]). Пусть r, n – натуральные числа; тогда для любой функции f у которой $f^{(r)} \in L_2(0, 2\pi]$, справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n^r} \left\{ \frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_1^2(f^{(r)}, t) \sin ntdt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

которое обращается в равенство для функций $f^*(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos nx + \beta_1 \sin nx$ и только для них.

В обоих результатах Н.И. Черных константы точные и неулучшаемые.

В 1991г. обобщение результата Н.И. Черных получены В.В. Шалаевым [4].

Теорема (Шалаев). При любых $n, k \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)}, \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{r-\frac{k}{2}} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^{\pi/n} \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, t) \sin ntdt \right)^{k/2}} = \frac{1}{2^k}.$$

В теореме В.В. Шалаева константы точные и неулучшаемые. Из результата В.В. Шалаева при $k = 1$ следует полученная оценка Н.И. Черных (см. [3]).

Обобщение и развитие тематики нашло свое отражение в исследованиях И. И. Ибрагимова, Ф. Г. Насибова [5], В.В Аристова, В.Ю Попова [6], В.Ю. Попова [7]. Они распространили выше указанный результат для функции суммируемых с квадратом на всей оси.

В 1998 г. А. Г. Бабенко в [8] получил точное неравенство Джексона—Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ между наилучшим приближением функции целыми функциями заданного экспоненциального сферического типа и ее сферическим модулем гладкости порядка $k > 1$.

Неравенство Джексона в пространстве $L^p(\mathbb{R}^m)$, $p = 2$ на единичной сфере S^{m-1} , $m \geq 3$, с точной константой и оптимальным аргументом получил Д.В. Горбачев [14]. В пространстве $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < 2$ на полупрямой в [15] получена оценка снизу для константы в неравенстве Джексона, доказывающие его точность.

Многие авторы [9]–[18], [26], [30], [31] (см. приведенную там литературу) занимались получением точных констант в неравенствах типа Джексона — Стечкина.

Целью настоящей работы являются получить точные константы в неравенствах Джексона—Стечкина в пространстве L_{2,μ_α} .

2. Необходимые обозначения и утверждения

Пусть $\alpha > -\frac{1}{2}$. Через L_{2,μ_α} обозначим пространство состоящее из измеримых функций, f на $[0, \infty)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{2,\mu_\alpha} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^2 d\mu_\alpha(x) \right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$d\mu_\alpha(x) = \frac{x^{2\alpha+1}}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} dx.$$

Пусть $J_\alpha(z)$ - функция Бесселя первого рода, порядка $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, $\Gamma(x)$ – гамма - функция. Обозначим через $j_\alpha(\lambda t)$ нормированную функцию Бесселя [19]

$$j_\alpha(\lambda t) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1) J_\alpha(\lambda t)}{(\lambda t)^\alpha}.$$

Для функции $f \in L_{2,\mu_\alpha}$ справедливо разложение в интеграл Ганкеля [19]:

$$\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda) = \int_0^\infty f(x) j_\alpha(\lambda x) d\mu_\alpha(x),$$

и

$$f(x) = \int_0^\infty \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda) j_\alpha(\lambda x) d\mu_\alpha(\lambda).$$

Пусть $T > 0$ и обозначим символом $S_T(f, x)$ частичный интеграл Ганкеля функции $f \in L_{2,\mu_\alpha}$ т.е.

$$S_T(f, x) = \int_0^T \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda) j_\alpha(\lambda x) d\mu_\alpha(\lambda), x \in (0, \infty).$$

Для функций $f, g \in L_{2,\mu_\alpha}$ справедливо обобщенное равенство Парсеваля [14]

$$(f, g) = (\mathcal{H}_\alpha(f), \mathcal{H}_\alpha(g))$$

где $(f, g) = \int_0^\infty f(x) \overline{g(x)} d\mu_\alpha$ -скалярное произведение f и g .

В частности при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha = -\frac{1}{2}$ преобразования Ганкеля превращаются соответственно в синус-преобразование и косинус-преобразование Фурье:

$$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(\lambda x) dx,$$

$$F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(\lambda x) dx,$$

так как известны формулы $J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$ и $J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x$.

Пусть

$$B = B_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\alpha + 1}{t} \frac{d}{dt}$$

-дифференциальный оператор Бесселя второго порядка. Операторы высших порядков определим по интерации, полагая $B^r f = B(B^{(r-1)} f)$, $r = 2, 3, \dots$

Известно, что функции $j_\alpha(\sqrt{\lambda}t)$ являются решением задачи [20]

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2\alpha + 1}{t} \frac{dy}{dt} + \lambda y = 0,$$

при условии

$$y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Поэтому $Bj_\alpha(\lambda t) = -\lambda^2 j_\alpha(\lambda t), \dots, B^r j_\alpha(\lambda t) = (-1)^r (\lambda)^{2r} j_\alpha(\lambda t)$.

Пусть S — пространство основных функций на $\mathbb{R}$, т. е. множество всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$, убывающих как $|t| \mapsto \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|t|^{-1}$. Обычным образом пространство S снабжается топологией и становится локально выпуклым пространством (см. [21]). Пусть S' — множество линейных непрерывных функционалов на S , т. е. пространство обобщенных функций медленного роста. Обычным образом S' наделяется структурой топологического векторного пространства. Обозначим через S_+ подпространство в S , состоящее из четных функций. Пространство S_+ снабжено индуцированной из пространства S топологией. Пусть S'_+ — пространство четных обобщенных функций медленного роста, т. е. множество непрерывных линейных функционалов на S_+ . Для $f \in S'_+$ и $\varphi \in S_+$ обозначим через (f, φ) значение функционала f на функции φ . Пространства L_{p, μ_α} , $1 \leq p \leq \infty$ вложены в пространство S'_+ , если для $f(t) \in L_{p, \mu_\alpha}$ и $\varphi(t) \in S_+$ положить

$$(f, \varphi) = \int_0^\infty f(t) \varphi(t) t^{2\alpha+1} dt.$$

Поскольку дифференциальный оператор Бесселя удовлетворяет условию

$$(B\varphi, \phi) = (\varphi, B\phi), \quad \phi, \varphi \in S_+,$$

то действие оператора B естественным образом распространяется на обобщенные функции по формуле

$$(Bf, \varphi) = (f, B\varphi), \quad f \in S'_+, \quad \varphi \in S_+.$$

Известно, что подпространство S_+ плотно в пространстве L_{p, μ_α} (см. [21]).

Поскольку S_+ — плотное линейное подмножество в банаховом пространстве L_{p, μ_α} при $p < \infty$, следует из неравенства

$$\|T_h f\|_{p, \mu_\alpha} \leq \|f\|_{p, \mu_\alpha}$$

что оператор T_h на S_+ продолжается по непрерывности до ограниченного оператора T_h в L_{p,μ_α} , где T_h — оператор обобщенного сдвига с шагом $h \in [0, \infty)$ в L_{p,μ_α} (см. [20]; [8]; [21] и формулу T_h ниже).

Если $g(t)$ — любая четная бесконечно дифференцируемая функция, любая производная которой растет при $t \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени t (будем называть такие функции бесконечно дифференцируемыми функциями полиномиального роста), то определено произведение функции $g(t)$ на обобщенную функцию $f \in S'_+$. По определению, $(gf, \varphi) := (f, g\varphi)$, $\varphi \in S_+$.

Для любой функции $f(x) \in S_+$ и любых положительных чисел $r > 0$, $\sigma > 0$ положим $D_\sigma^r f = \hat{H}_\alpha(\varphi_\sigma(t)\tilde{f}(t))$, где

$$\varphi_\sigma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^\sigma j_\alpha\left(\frac{\pi}{\sigma}kt\right)$$

непрерывна, четна, ограничена на $\mathbb{R}$ и совпадает с функцией x^{2r} при $|x| \leq \sigma$.

Поскольку $\tilde{f}(t) \in S_+$ и $\varphi_\sigma(t) \in S'_+$, то $\varphi_\sigma(t)\tilde{f}(t) \in S'_+$ и, следовательно, $D_\sigma^r f \in S'_+$.

ТЕОРЕМА 1 ([21, Theorem 3.3 (Platonov)]). *Если $f \in S_+$, $r > 0$, $\sigma > 0$, то функция $D_\sigma^r f$ принадлежит пространству L_{p,μ_α} для любого $1 \leq p \leq \infty$ и справедлива оценка*

$$\|D_\sigma^r f\|_{p,\mu_\alpha} \leq C\sigma^{2r}\|f\|_{p,\mu_\alpha}$$

где $C = C(\alpha, r) > 0$ — некоторая постоянная.

Мы предполагаем по определению

$$(-B)^r f = D_\sigma^r f.$$

В лемме 3.5 Платонов [21] доказывает корректность определения оператора $(-B)^r$. Кроме того, в [21, Theorem 1.1] аналог теоремы прямого приближения в пространстве L_{p,μ_α} , $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > -1/2$.

В пространстве L_{2,μ_α} рассмотрим оператор обобщенного сдвига $(T^h f)$ функции $f(x)$ [20]:

$$(T^h f)(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha + 1/2)} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + h^2 - 2xh \cos \varphi})(\sin \varphi)^{2\alpha} d\varphi.$$

Приведем некоторые свойства оператора обобщенного сдвига Бесселя [20], при $t, \lambda \in \mathbb{R}_+$.

1) Для любых $t, h, \lambda \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$T^h j_\alpha(\lambda t) = j_\alpha(\lambda h) j_\alpha(\lambda t).$$

2) Самосопряженность оператора:

$$\int_0^\infty (T^h f)(t) g(t) t^{2\alpha+1} dt = \int_0^\infty (T^h g)(t) f(t) t^{2\alpha+1} dt.$$

3) Для любых $t, s \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$(T^h f)(x) = (T^x f)(h).$$

4) Следующие соотношения связывают обобщенные сдвиги Бесселя и преобразование Ганкеля:

$$\mathcal{H}_\alpha(T^h f)(\lambda) = j_\alpha(\lambda h) \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda), \quad T^h(\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)) = (j_\alpha(h\lambda) \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)).$$

Для любой функции $f \in L_{2,\mu_\alpha}$ разности $\Delta_h^k f(x)$ порядка k с шагом $h > 0$ и модуля гладкости $\omega_k(f, \delta)_{2,\mu_\alpha}$ определяются соответственно формулами :

$$\Delta_h^1 f(x) = (I - T^h)(x), \Delta_h^k f(x) = (I - T^h)^k f(x), k > 1.$$

и

$$\omega_k(f, t)_{2, \mu_\alpha} = \sup_{0 \leq h \leq t} \|\Delta_h^k f(x)\|_{2, \mu_\alpha} = \sup_{0 \leq h \leq t} \left\{ \int_0^\infty (1 - j_\alpha(\lambda h))^{2k} |\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)|^2 d\mu_\alpha(\lambda) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $M(\sigma, 2, \alpha)$, $\sigma > 0$ множество всех функций $Q_\sigma(x)$ удовлетворяющих следующим условиям (см. [21]):

1. $Q_\sigma(x)$ – четная, целая функция экспоненциального типа σ ;
2. $Q_\sigma(x)$ принадлежит классу L_{2, μ_α} .

Наилучшее приближение функции $f \in L_{2, \mu_\alpha}$ функциями из $M(\sigma, 2, \alpha)$, $\nu > 0$ определяется следующим образом:

$$E_\sigma(f)_{2, \mu_\alpha} = \inf \{ \|f - Q_\sigma\| : Q_\sigma \in M(\sigma, 2, \alpha) \} = \left\{ \int_\sigma^\infty |\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)|^2 d\mu_\alpha(\lambda) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Введем класс функции. Пусть $W_{2, \mu_\alpha}^r(B)$, $r = 1, 2, \dots$ – пространство Соболева, построенное по дифференциальному оператору B , т.е.

$$W_{2, \mu_\alpha}^r(B) = \{ f \in L_{2, \mu_\alpha} : B^j f \in L_{2, \mu_\alpha}, j = 1, 2, \dots, r \}.$$

3. Вспомогательные результаты

Пусть $q_{\alpha, l}$ – положительный l -й корень функций Бесселя $J_\alpha(x)$, т.е. $J_\alpha(q_{\alpha, l}) = 0$, $l \in \mathbb{N}$, $0 < q_{\alpha, 1} < q_{\alpha, 2} < \dots < q_{\alpha, l} < \dots$. Очевидно, что $j_\alpha(x)$ имеет те же положительные корни, что и $J_\alpha(x)$ ([32]; 15 гл. 526 стр.) $j_\alpha(x)$ непрерывна на полуоси $[0, \infty)$. В оставшейся части статьи мы обозначаем сегмент $[q_{\alpha, k}, q_{\alpha, k+1}]$ через $I_k^{(\alpha)}$ при $k \in \mathbb{N}$, а сегмент $[0, q_{\alpha, 1}]$ через $I_0^{(\alpha)}$.

Поскольку $j_\alpha(x) = 1 + O(x^2)$ при $x \rightarrow 0$ все положительные корни функции $j_\alpha(x)$ различные, то можно получить, что

$$j_\alpha(x) \geq 0, \quad x \in I_{2k}^{(\alpha)}, \quad \text{при } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (1)$$

$$j_\alpha(x) \leq 0, \quad x \in I_{2k-1}^{(\alpha)}, \quad \text{при } k \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Из ([32]; 15 гл. 528 стр.) следует, что положительные корни $J_\alpha(x)$ чередуются с корнями $J_{\alpha+1}(x)$, т.е.

$$0 < q_{\alpha, 1} < q_{\alpha+1, 1} < q_{\alpha, 2} < q_{\alpha+1, 2} < \dots < q_{\alpha, l} < q_{\alpha+1, l} < \dots \quad (3)$$

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $q_{\alpha+1, 1}$ – наименьший положительный нуль функции $j_{\alpha+1}(t)$. Пусть $t \in (0, \frac{q_{\alpha+1, 1}}{\sigma}]$ и $\sigma > 0$. Тогда

$$\sup_{0 \leq h \leq t} (1 - j_\alpha(\sigma h)) = (1 - j_\alpha(\sigma t))$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $j'_\alpha(t) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) \frac{d}{dt} \left(\frac{J_\alpha(t)}{t^\alpha} \right) = -\frac{t}{2(\alpha+1)} j_{\alpha+1}(t)$, $t \in I_0^{(\alpha+1)}$ (см. [32]), то учитывая, что $j_{\alpha+1}(0) > 0$ и $j_{\alpha+1}(q_{\alpha+1, 1}) = 0$ из неравенства (1) и (3) для всех $t \in I_0^{(\alpha+1)}$ имеем $j_{\alpha+1}(t) \geq 0$. Откуда следует, что $(1 - j_\alpha(t))' = \frac{t}{2(\alpha+1)} j_{\alpha+1}(t) > 0$ на $I_0^{(\alpha+1)}$. Тогда функция $1 - j_\alpha(t)$ возрастает на $I_0^{(\alpha+1)}$. Следовательно, для всех $t \in (0, q_{\alpha+1, 1}]$ имеем

$$\sup_{0 < h \leq t} (1 - j_\alpha(h)) = 1 - j_\alpha(t).$$

Поэтому для всех $t \in (0, \frac{q_{\alpha+1,1}}{\sigma}]$ имеем

$$\sup_{0 < h \leq t} (1 - j_\alpha(\sigma h)) = 1 - j_\alpha(\sigma t). \quad (4)$$

Лемма 1 доказана.

Как и при доказательстве леммы 1 легко можно увидеть, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\max_{x \in I_{2k+1}^{(\alpha)}} (1 - j_\alpha(x)) = (1 - j_\alpha(q_{\alpha+1,2k+1})).$$

На самом деле согласно неравенству (3), $q_{\alpha,k} \in I_{k-1}^{(\alpha+1)}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, для $x \in [q_{\alpha,2k+1}, q_{\alpha+1,2k+1}] \subset I_{2k}^{(\alpha+1)}$ из (1) имеем $j_{\alpha+1}(x) \geq 0$. Откуда следует, что

$$\frac{d}{dx}(1 - j_\alpha(x)) \geq 0.$$

Поэтому функция $1 - j_\alpha(x)$ не убывает на $[q_{\alpha,2k+1}, q_{\alpha+1,2k+1}]$. Тогда $1 - j_\alpha(x) \leq 1 - j_\alpha(q_{\alpha+1,2k+1})$.

Аналогично получить для любого $x \in [q_{\alpha+1,2k+1}, q_{\alpha,2k+2}] \subset I_{2k+1}^{(\alpha+1)}$ из (2) имеем

$j_{\alpha+1}(x) \leq 0$. Откуда следует, что

$$\frac{d}{dx}(1 - j_\alpha(x)) \leq 0.$$

Поэтому функция $1 - j_\alpha(x)$ не возрастает на $[q_{\alpha+1,2k+1}, q_{\alpha,2k+2}]$.

Тогда $1 - j_\alpha(x) \leq 1 - j_\alpha(q_{\alpha+1,2k+1})$. Следовательно имеем

$$\max_{x \in I_{2k+1}^{(\alpha)}} (1 - j_\alpha(x)) = (1 - j_\alpha(q_{\alpha+1,2k+1})).$$

По тому же алгоритму получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\min_{x \in I_{2k}^{(\alpha)}} (1 - j_\alpha(x)) = (1 - j_\alpha(q_{\alpha+1,2k})).$$

Как известно [32], что функция $j_\alpha(x)$ обладает следующими свойствами:

$$|j_\alpha(x)| \leq j_\alpha(0) = 1, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2}, \quad x \in [0, +\infty)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} j_\alpha(u) = 0, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2}.$$

Отсюда нетрудно заметить, что

$$\max_{x \geq q_{\alpha,1}} (1 - j_\alpha(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - j_\alpha(q_{\alpha+1,2k+1})) = 1 - j_\alpha(q_{\alpha+1,1}) > 1, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2}.$$

ЛЕММА 2. Пусть $q_{\alpha+1,1}$ — наименьший положительный нуль функции $j_{\alpha+1}(t)$, $h \in [0, \frac{q_{\alpha+1,1}}{\sigma}]$ и $\sigma > 0$. Пусть $\Psi(y) = y^{4r} \int_0^h (1 - j_\alpha(yt))^{2k} dt$, $y \in G$, где $G = \{y : \sigma \leq y < \infty\}$. Тогда

$$\min \{\Psi(y) : y \in G\} = \sigma^{4r} \int_0^h (1 - j_\alpha(\sigma t))^{2k} dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $j'_\alpha(t) = -\frac{t}{2(\alpha+1)}j_{\alpha+1}(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, то

$$\Psi'(y) = 4ry^{4r-1} \int_0^h (1 - j_\alpha(yt))^{2k} dt + y^{4r} \int_0^h \frac{\partial}{\partial y} \left((1 - j_\alpha(yt))^{2k} \right) dt. \quad (5)$$

Так как не трудно убедиться непосредственной проверкой, справедливо равенство

$$\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial t} \left((1 - j_\alpha(yt))^{2k} \right) = \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial y} \left((1 - j_\alpha(yt))^{2k} \right), \quad (6)$$

где t, y отличны от нуля, то из (5) в силу (6) имеем

$$\Psi'(y) = y^{4r-1} \left[4r \int_0^h (1 - j_\alpha(yt))^{2k} dt + \int_0^h t \frac{\partial}{\partial t} \left((1 - j_\alpha(yt))^{2k} \right) dt \right]. \quad (7)$$

Применяя при вычислении второго интеграла в правой части (7) метод интегрирования по частям, приходим к следующему заключению

$$\Psi'(y) = y^{4r-1} \left[(4r-1) \int_0^h (1 - j_\alpha(yt))^{2k} dt + h(1 - j_\alpha(yh))^{2k} \right]. \quad (8)$$

Так как $|j_\alpha(u)| \leq 1, \forall u \geq 0$ (см. [8], формула (21)), то в силу (8) имеем $\Psi'(y) > 0$ для всех $y \geq \sigma$. Леммы 2 доказано.

4. Основные результаты

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\sigma > 0, k \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, q_{\alpha+1,1}$ -наименьший положительный нуль функции $j_{\alpha+1}(t)$. Для любой функции $f \in W_{2,\mu_\alpha}^r$ при любом $h \in (0, \frac{q_{\alpha+1,1}}{\sigma})$ справедливы оценки

$$E_\sigma(f)_{2,\mu_\alpha} \leq \frac{\left(\int_0^h \omega_k^2(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha} dt \right)^{\frac{1}{2}}}{\sigma^{2r} \left(\int_0^h (1 - j_\alpha(\sigma t))^{2k} dt \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $f \in W_{2,\mu_\alpha}^r$. Тогда из равенства Парсеваля имеем

$$\omega_k^2(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha} \geq \int_\sigma^\infty (1 - j_\alpha(\lambda t))^{2k} \lambda^{4r} |\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)|^2 d\mu_\alpha(\lambda).$$

Обе части этого неравенства интегрируя по t от нуля до h , мы получим

$$\begin{aligned} \int_0^h \omega_k^2(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha} dt &\geq \int_0^h \left(\int_\sigma^\infty (1 - j_\alpha(\lambda t))^{2k} \lambda^{4r} |\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)|^2 d\mu_\alpha(\lambda) \right) dt = \\ &= \int_\sigma^\infty |\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)|^2 \left(\int_0^h \lambda^{4r} (1 - j_\alpha(\lambda t))^{2k} dt \right) d\mu_\alpha(\lambda). \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) в силу леммы 2 имеем

$$\int_0^h \omega_k^2(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha} dt \geq \sigma^{4r} \int_0^h (1 - j_\alpha(\sigma t))^{2k} dt \int_\sigma^\infty |\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)|^2 d\mu_\alpha(\lambda).$$

Отсюда следует, что

$$\int_{\sigma}^{\infty} |\mathcal{H}_{\alpha}(f)(\lambda)|^2 d\mu_{\alpha}(\lambda) \leq \frac{\int_0^h \omega_k^2(B^r f, t)_{2,\mu_{\alpha}} dt}{\sigma^{4r} \int_0^h (1 - j_{\alpha}(\sigma t))^{2k} dt}. \quad (10)$$

Далее, с учетом следующего равенства

$$\|f - S_{\sigma}(f, x)\|_{2,\mu_{\alpha}} = E_{\sigma}(f)_{2,\mu_{\alpha}}$$

из (10) имеем

$$E_{\sigma}^2(f)_{2,\mu_{\alpha}} \leq \frac{\int_0^h \omega_k^2(B^r f, t)_{2,\mu_{\alpha}} dt}{\sigma^{4r} \int_0^h (1 - j_{\alpha}(\sigma t))^{2k} dt}.$$

Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ранее в [18], с. 219 и в [16] были получены аналогичные результаты при $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\sigma = n$, $j_{-\frac{1}{2}}(nt) = \cos nt$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\sigma > 0, k \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$, $q_{\alpha+1,1}$ -наименьший положительный нуль функции $j_{\alpha+1}(t)$. Для любой функции $f \in W_{2,\mu_{\alpha}}^r(B)$ при любом $h \in (0, \frac{q_{\alpha+1,1}}{\sigma})$ справедливы оценки

$$\sup_{f \in W_{2,\mu_{\alpha}}^r(B)} \frac{\sigma^{2r} E_{\sigma}(f)_{2,\mu_{\alpha}}}{\left(\int_0^h \omega_k^2(B^r f, t)_{2,\mu_{\alpha}} dt \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left(\int_0^h (1 - j_{\alpha}(\sigma t))^{2k} dt \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Доказательство теоремы 3. Пусть $f \in W_{2,\mu_{\alpha}}^r$. Рассуждая так же как в теореме 2 для всех $f \in W_{2,\mu_{\alpha}}^r(B)$ имеем

$$\frac{\sigma^{2r} E_{\sigma}(f)_{2,\mu_{\alpha}}}{\left(\int_0^h \omega_k^2(B^r f, t)_{2,\mu_{\alpha}} dt \right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{\left(\int_0^h (1 - j_{\alpha}(\sigma t))^{2k} dt \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Переходя в этом неравенстве к супремуму получим

$$\sup_{f \in W_{2,\mu_{\alpha}}^r(B)} \frac{\sigma^{2r} E_{\sigma}(f)_{2,\mu_{\alpha}}}{\left(\int_0^h \omega_k^2(B^r f, t)_{2,\mu_{\alpha}} dt \right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{\left(\int_0^h (1 - j_{\alpha}(\sigma t))^{2k} dt \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (11)$$

Теперь мы докажем оценку снизу. Для этого построим функцию f_{ϵ} так чтобы имело место неравенство:

$$\sup_{f \in W_{2,\mu_{\alpha}}^r(B)} \frac{\sigma^{2r} E_{\sigma}(f)_{2,\mu_{\alpha}}}{\left(\int_0^h \omega_k^2(B^r f, t)_{2,\mu_{\alpha}} dt \right)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{\sigma^{2r} E_{\sigma}(f_{\epsilon})_{2,\mu_{\alpha}}}{\left(\int_0^h \omega_k^2(B^r f_{\epsilon}, t)_{2,\mu_{\alpha}} dt \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (12)$$

Перейдем к доказательству неравенства (12). Для этого воспользуемся функцией А. Г. Бабенко $f_{\epsilon}(x) \in W_{2,\mu_{\alpha}}^r(B)$ (см. [8]) и такой, что

$$\mathcal{H}_{\alpha}(f_{\epsilon})(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|^{-\alpha-\frac{1}{2}} & \text{if } \sigma < |\lambda| < \sigma + \epsilon, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

и вычислим значения $E_{\sigma}(f_{\epsilon})_{2,\mu_{\alpha}}$ и $\omega_k(B^r f_{\epsilon}, t)_{2,\mu_{\alpha}}$. Поскольку

$$E_{\sigma}(f_{\epsilon})_{2,\mu_{\alpha}} = \sqrt{\epsilon} \quad (13)$$

Используя свойства преобразования Ганкеля

$$\mathcal{H}_\alpha(B^r f_\epsilon)(\lambda) = \lambda^{2r} \mathcal{H}_\alpha(f_\epsilon)(\lambda)$$

и силу равенства Парсеваля мы имеем

$$\begin{aligned} \omega_k^2(B^r f_\epsilon, t)_{2, \mu_\alpha} &= \int_\sigma^{\sigma+\epsilon} \lambda^{4r} (1 - j_\alpha(\lambda t))^{2k} |\mathcal{H}_\alpha(f_\epsilon)(\lambda)|^2 \mu_\alpha(\lambda) \leq \\ &\leq (\sigma + \epsilon)^{4r} (1 - j_\alpha((\sigma + \epsilon)t))^{2k} \int_\sigma^{\sigma+\epsilon} |\mathcal{H}_\alpha(f_\epsilon)(\lambda)|^2 \mu_\alpha(\lambda) \leq (\sigma + \epsilon)^{4r} (1 - j_\alpha((\sigma + \epsilon)t))^{2k} \epsilon. \end{aligned} \quad (14)$$

Проинтегрировав левую и правую части неравенства (14) по t в пределах от 0 до h получим

$$\int_0^h \omega_k^2(B^r f_\epsilon, t)_{2, \mu_\alpha} dt \leq (\sigma + \epsilon)^{4r} \epsilon \int_0^h (1 - j_\alpha((\sigma + \epsilon)t))^{2k} dt. \quad (15)$$

Используя формулы (15) и (13) запишем

$$\begin{aligned} \sup_{f \in W_{2, \mu_\alpha}^r(B)} \frac{\sigma^{2r} E_\sigma(f)_{2, \mu_\alpha}}{\left(\int_0^h \omega_k^2(B^r f, t)_{2, \mu_\alpha} dt \right)^{\frac{1}{2}}} &\geq \frac{\sigma^{2r} E_\sigma(f_\epsilon)_{2, \mu_\alpha}}{\left(\int_0^h \omega_k^2(B^r f_\epsilon, t)_{2, \mu_\alpha} dt \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &\geq \frac{\sigma^{2r}}{(\sigma + \epsilon)^{2r} \left(\int_0^h (1 - j_\alpha((\sigma + \epsilon)t))^{2k} dt \right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как левая часть неравенства (16) не зависит от ϵ , то переходя к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\sup_{f \in W_{2, \mu_\alpha}^r(B)} \frac{\sigma^{2r} E_\sigma(f_\epsilon)_{2, \mu_\alpha}}{\left(\int_0^h \omega_k^2(B^r f_\epsilon, t)_{2, \mu_\alpha} dt \right)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{\left(\int_0^h (1 - j_\alpha(\sigma t))^{2k} dt \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (17)$$

Сравнивая оценку сверху (11) с оценкой снизу (17) получаем требуемое равенство. Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ранее в [17], [9] были получены аналогичные результаты при $\alpha = -\frac{1}{2}$.

В случае аппроксимации 2π - периодических функций тригонометрическими многочленами $(n-1)$ -го порядка в [33], было получено равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}[0, 2\pi]} \frac{2^m n^r E_n(f)}{\left\{ \int_0^h (\omega_m(f^{(r)}, t))^p dt \right\}^{\frac{1}{2}}} = \left\{ \int_0^h \sin^{mp} \left(\frac{nt}{2} \right) dt \right\}^{-\frac{1}{p}},$$

где $m, n, r \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{r} < p \leq 2$, $0 < h < \frac{\pi}{n}$, $L_2^{(r)}[0, 2\pi]$ – множество 2π - периодических функций $f \in L_2[0, 2\pi]$ у которых производные $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка $f^{(r)}$ принадлежит пространству $L_2[0, 2\pi]$.

С.Б. Вакарчук в [34] распространил данный результат на случай приближения в среднем функций, заданных на всей вещественной прямой, целыми функциями экспоненциального типа. Продолжая данную тематику, покажем, что имеет место

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\sigma > 0, k \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, \alpha \geq -\frac{1}{2}, q_{\alpha+1,1}$ — наименьший положительный нуль функции $j_{\alpha+1}(t)$. Пусть $0 < p \leq 2, h \in (0, \frac{q_{\alpha+1,1}}{\sigma})$. Тогда справедливы оценки

$$\sup_{f \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)} \frac{\sigma^{2r} E_\sigma(f)_{2,\mu_\alpha}}{\left(\int_0^h \omega_k^p(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha} dt \right)^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{\left\{ \int_0^h (1 - j_\alpha(\sigma t))^{kp} dt \right\}^{\frac{1}{p}}}.$$

Доказательство теоремы 4. Оценка сверху. Пусть $0 < p \leq 2$, тогда рассуждая как в предыдущей теореме 3 имеем

$$\|\Delta_h^k B^r f\|_{2,\mu_\alpha}^2 \geq \int_\sigma^\infty \lambda^{4r} (1 - j_\alpha(\lambda h))^{2k} |\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)|^2 d\mu_\alpha(\lambda).$$

Обе части этого неравенства возводя в степень $p/2$ и их интегрируя по t от нуля до h , имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^h (\omega_k(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha}^2)^{\frac{p}{2}} dt \right)^{\frac{1}{p}} \geq \\ & \geq \left\{ \int_0^h \left(\int_\sigma^\infty \lambda^{4r} (1 - j_\alpha(\lambda t))^{2k} |\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)|^2 d\mu_\alpha(\lambda) \right)^{\frac{p}{2}} dt \right\}^{\frac{1}{p}} = I. \end{aligned} \quad (18)$$

Применяя обратное неравенство Минковского при $\frac{p}{2} \leq 1$ и в силу леммы 2 получим

$$\begin{aligned} I & \geq \left\{ \int_\sigma^\infty |\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)|^2 \left(\int_0^h \lambda^{2rp} (1 - j_\alpha(\lambda t))^{kp} dt \right)^{\frac{2}{p}} d\mu_\alpha(\lambda) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \geq \sigma^{2r} E_\sigma(f) \left(\int_0^h (1 - j_\alpha(\sigma t))^{kp} dt \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом объединив (18) и (19) имеем

$$\left(\int_0^h (\omega_k(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha}^2)^{\frac{p}{2}} dt \right)^{\frac{1}{p}} \geq \sigma^{2r} E_\sigma(f) \left(\int_0^h (1 - j_\alpha(\sigma t))^{kp} dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда следует, что для всех $f \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)$ имеет место неравенство

$$\frac{\sigma^{2r} E_\sigma(f)}{\left(\int_0^h (\omega_k(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha}^2)^{\frac{p}{2}} dt \right)^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{1}{\left(\int_0^h (1 - j_\alpha(\sigma t))^{kp} dt \right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Переходя в этом неравенстве к супремуму по всем $f \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)$, имеем

$$\sup_{f \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)} \frac{\sigma^{2r} E_\sigma(f)_{2,\mu_\alpha}}{\left\{ \int_0^h \omega_k^p(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha} dt \right\}^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{1}{\left\{ \int_0^h (1 - j_\alpha(\sigma t))^{kp} dt \right\}^{\frac{1}{p}}}, \quad (20)$$

т.е. мы установили оценку сверху.

Для получения оценки снизу построим функцию $f_\epsilon \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)$ так чтобы выполнялось неравенство:

$$\sup_{f \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)} \frac{\sigma^{2r} E_\sigma(f)_{2,\mu_\alpha}}{\left\{ \int_0^h \omega_k^p(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha} dt \right\}^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{\sigma^{2r} E_\sigma(f_\epsilon)_{2,\mu_\alpha}}{\left\{ \int_0^h \omega_k^p(B^r f_\epsilon, t)_{2,\mu_\alpha} dt \right\}^{\frac{1}{p}}}. \quad (21)$$

Перейдем к доказательству соотношения (21). Для этого воспользуемся функцией А. Г. Бабенко $f_\epsilon(x) \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)$ (см. [8]) и такой, что

$$\mathcal{H}_\alpha(f_\epsilon)(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|^{-\alpha-\frac{1}{2}} & \text{if } \sigma < |\lambda| < \sigma + \epsilon, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поскольку выполнены (14) и (13) для f_ϵ , то имеем

$$\omega_k^2(B^r f_\epsilon, t)_{2,\mu_\alpha} \leq (\sigma + \epsilon)^{4r} (1 - j_\alpha((\sigma + \epsilon)t))^{2k} \epsilon. \quad (22)$$

Возводя левую и правую части неравенства (22) в степень $p/2$ и интегрируя имеем

$$\int_0^h \omega_k^p(B^r f_\epsilon, t)_{2,\mu_\alpha} dt \leq \int_0^h (\sigma + \epsilon)^{2rp} (1 - j_\alpha((\sigma + \epsilon)t))^{kp} \epsilon^{\frac{p}{2}} dt. \quad (23)$$

Используя (22), (23) запишем

$$\frac{\sigma^{2r} E_\sigma(f_\epsilon)_{2,\mu_\alpha}}{\left(\int_0^h \omega_k^p(B^r f_\epsilon, t)_{2,\mu_\alpha} dt\right)^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{\sigma^{2r} \sqrt{\epsilon}}{(\sigma + \epsilon)^{2r} \sqrt{\epsilon} \left(\int_0^h (1 - j_\alpha((\sigma + \epsilon)t))^{kp} dt\right)^{\frac{1}{p}}} \quad (24)$$

Так как $f_\epsilon \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)$, то из (22), (24) получим

$$\sup_{f \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)} \frac{\sigma^{2r} E_\sigma(f)_{2,\mu_\alpha}}{\left(\int_0^h \omega_k^p(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha} dt\right)^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{\sigma^{2r}}{(\sigma + \epsilon)^{2r} \left(\int_0^h (1 - j_\alpha((\sigma + \epsilon)t))^{kp} dt\right)^{\frac{1}{p}}}. \quad (25)$$

Очевидно, что левая часть (25) не зависит от ϵ , а выражение, расположенное в правой части является функцией от ϵ (при фиксированных значениях остальных параметров). Вычисляя верхнюю грань по ϵ от правой части неравенства (25) имеем

$$\sup_{f \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)} \frac{\sigma^{2r} E_\sigma(f)_{2,\mu_\alpha}}{\left(\int_0^h \omega_k^p(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha} dt\right)^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{1}{\left\{\int_0^h (1 - j_\alpha(\sigma t))^{kp} dt\right\}^{\frac{1}{p}}}. \quad (26)$$

Сравнивая оценку сверху (20) и оценку снизу (26), получаем требуемое равенство. Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Ранее в [17] были получены аналогичные результаты при $\alpha = 0$ и в [34] при $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\sigma = n$, $j_{-\frac{1}{2}}(nt) = \cos nt$, а так же в [35] при $\alpha = \frac{1}{2}$, $0 < p \leq 2$, $j_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{\sin t}{t}$ и в [9] при $\alpha = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{r} < p \leq 2$, $j_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Введем в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\Xi_{\sigma,k,r,p,s}(\varphi, h) = \sup_{f \in W_{2,\mu_\alpha}^r} \left\{ \frac{E_\sigma(f)_{2,\mu_\alpha}}{\left(\int_0^h \omega_k^p(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha} \varphi(t) dt\right)^{\frac{1}{s}}}, f \neq \text{const} \right\}, \quad (27)$$

где $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, p, s — действительные числа; $0 < h < \frac{q_{\alpha+1,1}}{\sigma}$; $\varphi(t) \geq 0$ суммируемая на интервале $(0, h)$ не эквивалентная нулю функция.

Величины вида (27) изучали Н. И. Черных [3] ($\Xi_{n,1,r,2,\frac{1}{2}}(\varphi, \frac{\pi}{n})$, где $\varphi(x) = \sin nx$), ($\Xi_{n,m,0,2,1/2}(\varphi, \frac{2\pi}{n})$, где $\varphi(x) = \sin(\frac{nt}{2}) + (\sin nt)/2$), Л. В. Тайков [18] ($\Xi_{n,1,r,2,1}(\varphi, \frac{\pi}{n})$, где $\varphi(x) = 1$), В. В. Шалаев [4] ($\Xi_{n,k,r,2,\frac{2}{k}}(\varphi, \frac{\pi}{n})$, где $\varphi(x) = \sin nx$), М. Г. Есмаганбетов [16] ($\Xi_{n,k,r,p,1/p}(\varphi, \frac{\pi}{n})$, где $\varphi(x) = \sin^\gamma(\beta x/t)$, $0 < p \leq 2$, $0 < \gamma < rp - 1$, $0 < \beta \leq \pi$, $0 < t < \pi/n$),

Лигун [36] ($\Xi_{n,k,r,2,1/2}(\varphi, \frac{\pi}{n})$, где $\varphi(x) \geq 0$) и многие другие авторы (см.[9], [17], [33]-[35] и приведенную там литературу).

Следующая теорема является распространением результата Лигуна на случай обобщенного модуля гладкости $\omega_k(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha}$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $q_{\alpha+1,1}$ — наименьший положительный нуль функции $j_{\alpha+1}(t)$, $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $h \in (0, \frac{q_{\alpha+1,1}}{\sigma})$ и $\varphi(t)$ — не отрицательная, суммируемая на интервале $(0, h)$ не эквивалентная нулю функция. Тогда справедливы оценки

$$\frac{1}{\gamma_{\sigma,k,r,p}(\varphi, h)} \leq \Xi_{\sigma,k,r,p,\frac{1}{p}}(\varphi, h) \leq \frac{1}{\inf \{ \gamma_{\lambda,k,r,p}(\varphi, h) : \sigma \leq \lambda < \infty \}},$$

где

$$\gamma_{\lambda,k,r,p}(\varphi, h) = \left\{ \lambda^{2rp} \int_0^h (1 - j_\alpha(\lambda t))^{kp} \varphi(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

При этом если

$$\inf \{ \gamma_{\lambda,k,r,p}(\varphi, h) : \sigma \leq \lambda < \infty \} = \gamma_{\sigma,k,r,p}(\varphi, h),$$

то имеет место равенство

$$\Xi_{\sigma,k,r,p,\frac{1}{p}}(\varphi, h) = \left(\sigma^{2pr} \int_0^h (1 - j_\alpha(\sigma t))^{kp} \varphi(t) dt \right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Доказательство теоремы 5. Оценка сверху. Пусть $0 < p \leq 2$, тогда рассуждая аналогично как в предыдущей теореме 4 получим

$$\|\Delta_h^k B^r f\|_{2,\mu_\alpha}^2 \geq \int_\sigma^\infty \lambda^{4r} (1 - j_\alpha(\lambda h))^{2k} |\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)|^2 d\mu_\alpha(\lambda).$$

Возводя обе части этого неравенства в степень $p/2$ и умножая их на $\varphi(t)$, интегрируя по t от нуля до h имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^h (\omega_k(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha}^2)^{\frac{p}{2}} \varphi(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \geq \left\{ \int_0^h \left(\int_\sigma^\infty \lambda^{4r} (1 - j_\alpha(\lambda t))^{2k} |\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)|^2 d\mu_\alpha(\lambda) \right)^{\frac{p}{2}} \varphi(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}} = I. \end{aligned} \quad (28)$$

Применяя обратное неравенство Минковского при $\frac{p}{2} \leq 1$ и лемму 2 получим

$$\begin{aligned} I & \geq \left\{ \int_\sigma^\infty |\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)|^2 d\mu_\alpha(\lambda) \left(\int_0^h \lambda^{2rp} (1 - j_\alpha(\lambda t))^{kp} \varphi(t) dt \right)^{\frac{p}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \geq E_\sigma(f) \inf_{\sigma \leq \lambda < \infty} \left(\lambda^{2pr} \int_0^h (1 - j_\alpha(\lambda t))^{kp} \varphi(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом объединив (28) и (29) имеем

$$\left(\int_0^h (\omega_k(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha}^2)^{\frac{p}{2}} \varphi(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \geq E_\sigma(f) \inf_{\sigma \leq \lambda < \infty} \gamma_{\lambda,k,r,p}(\varphi, h).$$

Отсюда следует, что для всех $f \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)$ имеет место неравенство

$$\frac{E_\sigma(f)}{\left(\int_0^h \left(\omega_k(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha}^2\right)^{\frac{p}{2}} \varphi(t) dt\right)^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{1}{\inf \{\gamma_{\lambda,k,r,p}(\varphi, h) : \sigma \leq \lambda < \infty\}}.$$

Переходя к супремуму в этом неравенстве получим

$$\Xi_{\sigma,k,r,p,\frac{1}{p}}(\varphi, h) = \sup_{f \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)} \frac{E_\sigma(f)_{2,\mu_\alpha}}{\left\{\int_0^h \omega_k^p(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha} \varphi(t) dt\right\}^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{1}{\inf \{\gamma_{\lambda,k,r,p}(\varphi, h) : \sigma \leq \lambda < \infty\}}, \quad (30)$$

т.е. мы установили оценку сверху.

Для получения оценки снизу построим функцию $f_\epsilon \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)$ так, чтобы имело место неравенство:

$$\sup_{f \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)} \frac{E_\sigma(f)_{2,\mu_\alpha}}{\left\{\int_0^h \omega_k^p(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha} \varphi(t) dt\right\}^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{E_\sigma(f_\epsilon)_{2,\mu_\alpha}}{\left\{\int_0^h \omega_k^p(B^r f_\epsilon, t)_{2,\mu_\alpha} \varphi(t) dt\right\}^{\frac{1}{p}}}. \quad (31)$$

Перейдем к доказательству неравенства (31). Возьмем функцию $f_\epsilon(x) \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)$ построенный Бабенко в [8] и такой, что

$$\mathcal{H}_\alpha(f_\epsilon)(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|^{-\alpha-\frac{1}{2}} & \text{if } \sigma < |\lambda| < \sigma + \epsilon \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда, используя (22) и (13) запишем

$$\frac{E_\sigma(f_\epsilon)_{2,\mu_\alpha}}{\left(\int_0^h \omega_k^p(B^r f_\epsilon, t)_{2,\mu_\alpha} \varphi(t) dt\right)^{1/p}} \geq \frac{1}{\left[(\sigma + \epsilon)^{2pr} \int_0^h (1 - j_\alpha((\sigma + \epsilon)t))^{kp} \varphi(t) dt\right]^{1/p}}. \quad (32)$$

Поэтому в силу неравенства (32) и определения (27) получаем

$$\sup_{f \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)} \frac{E_\sigma(f)_{2,\mu_\alpha}}{\left(\int_0^h \omega_k^p(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha} \varphi(t) dt\right)^{1/p}} \geq \frac{1}{\left[(\sigma + \epsilon)^{2pr} \int_0^h (1 - j_\alpha((\sigma + \epsilon)t))^{kp} \varphi(t) dt\right]^{1/p}}. \quad (33)$$

Очевидно, что левая часть неравенства (33) не зависит от ϵ , а выражение, стоящее в его правой части, является функцией от ϵ (при фиксированных значениях других параметров). Поскольку левая часть неравенства (33) не зависит от ϵ , то, вычисляя супремум по ϵ из его правой части, запишем

$$\sup_{f \in W_{2,\mu_\alpha}^r(B)} \frac{E_\sigma(f)_{2,\mu_\alpha}}{\left(\int_0^h \omega_k^p(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha} \varphi(t) dt\right)^{1/p}} \geq \frac{1}{\left(\sigma^{2pr} \int_0^h (1 - j_\alpha(\sigma t))^{kp} \varphi(t) dt\right)^{1/p}}. \quad (34)$$

Сравнивая оценку сверху (30) и оценку снизу (34), получаем требуемое двойное неравенство. Теорема 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Ранее в [17] были получены аналогичные результаты при $\alpha = 0$ и в [34] при $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\sigma = n$, $j_{-\frac{1}{2}}(nt) = \cos nt$, а так же в [35] при $\alpha = \frac{1}{2}$, $0 < p \leq 2$, $j_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Из доказанной теоремы вытекает ряд следствий.

Выясним, какими дифференциальными свойствами должна обладать весовая функция $\varphi(t)$, чтобы имело место следующее равенство

$$\Xi_{\sigma,k,r,p,\frac{1}{p}}(\varphi, h) = (\gamma_{\sigma,k,r,p}(\varphi, h))^{-1}. \quad (35)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть весовая функция $\varphi(t)$ заданная на отрезке $[0, h]$, является неотрицательной и непрерывно дифференцируемой на нем. Если при всех $t \in [0, h]$ и $p \in [\frac{1}{2r}, 2]$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ выполнено неравенство

$$(2rp - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geq 0, \quad (36)$$

то справедливо равенство

$$\inf \{ \gamma_{\lambda,k,r,p}(\varphi, h) : \sigma \leq \lambda < \infty \} = \gamma_{\sigma,k,r,p}(\varphi, h) \quad (37)$$

и имеет место соотношение

$$\Xi_{\sigma,k,r,p,\frac{1}{p}}(\varphi, h) = (\gamma_{\sigma,k,r,p}(\varphi, h))^{-1}. \quad (38)$$

Доказательство следствие 1. Исходя из величины $\gamma_{\lambda,k,r,p}(\varphi, h)$ для $\lambda \geq \sigma$ достаточно доказать, при выполнении условия следствия 1 теоремы 4 функция

$$\zeta(y) = y^{2rp} \int_0^h (1 - j_\alpha(yt))^{kp} \varphi(t) dt$$

является возрастающей при $y \geq \sigma$. Так как

$$\zeta'(y) = 2rpy^{2rp-1} \int_0^h (1 - j_\alpha(yt))^{kp} \varphi(t) dt + y^{2rp} \int_0^h \frac{d}{dy} (1 - j_\alpha(yt))^{kp} \varphi(t) dt, \quad (39)$$

то, пользуясь легко проверяемым тождеством

$$\frac{d}{dy} (1 - j_\alpha(yt))^{kp} = \frac{t}{y} \frac{d}{dt} (1 - j_\alpha(yt))^{kp} \quad (40)$$

из (39) и с учетом (40) имеем

$$\zeta'(y) = 2rpy^{2rp-1} \int_0^h (1 - j_\alpha(yt))^{kp} \varphi(t) dt + y^{2rp-1} \int_0^h \frac{d}{dt} (1 - j_\alpha(yt))^{kp} (t\varphi(t)) dt.$$

Применяя при вычислении второго интеграла метод интегрирования по частям приходим к заключению

$$\zeta'(y) = y^{2rp-1} \left((1 - j_\alpha(yh))^{kp} h\varphi(h) + \int_0^h (1 - j_\alpha(yt))^{kp} [(2rp - 1)\varphi(t) + t\varphi'(t)] dt \right). \quad (41)$$

Так как $|j_\alpha(y)| \leq 1$ для всех $y \in [0, \infty)$, то в силу (36) с учетом условий $p \in [\frac{1}{2r}, 2]$, $r \in \mathbb{N}$ из (41) имеем $\zeta'(y) \geq 0$ для $y \geq \sigma$. Откуда следует $\inf \{ \zeta(y) : \sigma \leq y < \infty \} = \zeta(\sigma)$, что равносильно равенству

$$\inf \{ \gamma_{\lambda,k,r,p}(\varphi, h) : \sigma \leq \lambda < \infty \} = \gamma_{\sigma,k,r,p}(\varphi, h).$$

Тогда в силу двойного неравенства из теоремы 4 получим требуемое равенство. Следствие 1 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $q_{\alpha+1,1}$ — наименьший положительный нуль функции $j_{\alpha+1}(t)$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $h \in (0, \frac{q_{\alpha+1,1}}{\sigma})$, $\alpha \geq -\frac{1}{2}$. Тогда справедливы оценки

$$\sup_{f \in W_{2,\mu_\alpha}^r} \frac{\sigma^{2r} E_\sigma(f)_{2,\mu_\alpha}}{\left(\int_0^h \omega_k^p(B^r f, t)_{2,\mu_\alpha} \frac{t}{2(\alpha+1)} j_{\alpha+1}(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}} = \frac{(1 - j_\alpha(\sigma h))^{kp+1}}{kp+1}.$$

Доказательство данного утверждения не приводится, поскольку повторяет рассуждения, имевшие место при получении теоремы 4.

5. Приближение в $L^2(\mathbb{R}^m)$

Точное неравенство Джексона – Стечкина и его различные обобщения в последние 50 лет стали предметом исследования для многих специалистов. Некоторые исторические сведения по неравенствам Джексона – Стечкина в $L^2(\mathbb{R}^m)$ содержатся в работах [8], [12]-[15], [25]-[29], [31].

Пусть $L^2 = L^2(\mathbb{R}^m)$ есть гильбертово пространство комплексных функций на $\mathbb{R}^m$ с скалярным произведением и нормой

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)g(x)dx, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Преобразование Фурье функции $f \in L^2$ определим его формулой

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} f(x)e^{-ix \cdot y} dx,$$

где $x \cdot y = \sum_{l=1}^m x_l \cdot y_l$ – скалярное произведение векторов x и y из $\mathbb{R}^m$.

Функцию f можно разложить через ее преобразование Фурье $\hat{f}$ в виде:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(y)e^{ix \cdot y} dy. \quad (42)$$

Для преобразование Фурье в пространстве L^2 имеет место формула Планшереля

$$(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}), \quad f, g \in L^2.$$

Обозначим через W_σ класс целых функций экспоненциального сферического типа $\sigma > 0$ принадлежащих пространству. Класс W_σ целых функций состоит из целых функций $g \in L^2$ носитель $\text{supp } \hat{g}$ преобразование Фурье которых лежит в евклидовом шаре $B_\sigma^m = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : |x| = \sqrt{(x, x)} \leq \sigma \right\}$ радиуса $\sigma > 0$ и с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$.

Наилучшим приближением функции f из L^2 классом W_σ называется величина

$$A_\sigma f = \inf \{ \|f - g\| : g \in W_\sigma \}.$$

Сферический сдвиг с шагом h есть оператор S_h действующий по правилу (см.[8])

$$S_h f(x) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} f(x + h\xi) d\xi,$$

где $\mathbb{S}^{m-1}$ – единичная евклидова сфера в $\mathbb{R}^m$, $|\mathbb{S}^{m-1}|$ – площадь ее поверхности.

Пусть I есть тождественный оператор, k – положительное число. Следуя Х.П. Рустамова [28] оператор $(I - S_h f)^{\frac{k}{2}}$, будем называть разностным оператором порядка k с шагом h и будем обозначать через Δ_h^k :

$$\Delta_h^k = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{\frac{k}{2}}{l} S_h^l,$$

а модулем непрерывности k -го порядка функции $f \in L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ назовем функцию переменного $\tau > 0$:

$$\omega_k(f, \tau) = \sup \left\{ \|\Delta_h^k f\| : 0 < h \leq \tau \right\}.$$

Обозначим через $K_\sigma(\tau, k, m)$, $\tau > 0, k \geq 1, m = 2, 3, \dots$ точную константу K в неравенстве Джексона — Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$

$$A_\sigma(f) \leq K\omega_k(f, \tau), f \in L^2(\mathbb{S}^{m-1}),$$

положим

$$K_\sigma(\tau, k, m) = \sup \left\{ \frac{A_\sigma(f)}{\omega_k(f, \tau)} : f \in L^2(\mathbb{S}^{m-1}) \right\}.$$

С помощью формулы Планшерелля легко убедиться, что величина наилучшего приближения функции $f \in L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ выражается через

$$A_\sigma^2 f = \int_{|y|>\sigma} |\hat{f}(y)|^2 dy.$$

Известно ([25], с.176, [32]), что оператор S_h сферического сдвига с шагом $h > 0$ действует на функцию $e_y(x) = e^{ix \cdot y}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} S_h e_y(x) &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} e^{i(x+h\xi) \cdot y} d\xi \\ &= \frac{e^{ix \cdot y}}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} e^{ih\xi \cdot y} d\xi = j_{\frac{m-2}{2}}(h|y|) e_y(x). \end{aligned} \quad (43)$$

Применив k раз к обеим частям равенство (37) оператор сферического сдвига и воспользовавшись соотношением (38) имеем

$$S_h^k f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} (j_{\frac{m-2}{2}}(h|y|))^k \hat{f}(y) e^{ix \cdot y} dy. \quad (44)$$

Исходя из определения разностного оператора в силу (39) получим

$$\Delta_h^k f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} (1 - j_{\frac{m-2}{2}}(h|y|))^{\frac{k}{2}} \hat{f}(y) e^{ix \cdot y} dy. \quad (45)$$

Отсюда в силу формулы Планшерелля имеем

$$\|\Delta_h^k f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^m} (1 - j_{\frac{m-2}{2}}(h|y|))^k |\hat{f}(y)|^2 dy.$$

6. Теорема Джексона — Стечкина в $L^2(\mathbb{R}^m)$

В работе [3] Черных заметил, что поскольку функционал

$$J_k(f, h) = \left(\frac{n}{2} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \omega_k^2(f, t) \sin ntdt \right)^{\frac{1}{2}}$$

меньше джексоновского функционала $\omega_k(f, \frac{\pi}{n})(f(x) \neq \text{const})$ и, по-видимому, он более естественен для характеристики наилучших приближений $E_{n-1}(f)$ периодических функций в L_2 . Для рассматриваемой нами модуля гладкости $\omega_k(f, h)_{2,\mu_\alpha}$ наблюдается аналогичная ситуация. Мы это покажем в доказательстве следствия 4 теоремы 7.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $k \geq 1, \sigma > 0$. Тогда для любой функции $f \in L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ имеет место:

$$A_\sigma(f) \leq \frac{\left(\int_0^{q_{\alpha,1}} \omega_k^{\frac{2}{k}}(f, t) j_{\frac{m-2}{2}}(t) t^{m-1} dt \right)^{\frac{k}{2}}}{\left(\int_0^{q_{\alpha,1}} j_{\frac{m-2}{2}}(t) t^{m-1} dt \right)^{\frac{k}{2}}},$$

где $q_{\frac{m-2}{2},1}$ — наименьшим положительным нулем функции $j_{\frac{m-2}{2}}(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$ с учетом равенство

$$A_\sigma(f) = \left\{ \int_{|y|>\sigma} |\hat{f}(y)|^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}}$$

и в силу неравенства Гельдера имеем

$$\begin{aligned} A_\sigma^2(f) - \int_\sigma^\infty |\hat{f}(y)|^2 j_{\frac{m-2}{2}}(t|y|) dy &= \int_\sigma^\infty |\hat{f}(y)|^2 (1 - j_{\frac{m-2}{2}}(t|y|)) dy \\ &= \int_\sigma^\infty |\hat{f}(y)|^{2-\frac{2}{k}} |\hat{f}(y)|^{\frac{2}{k}} (1 - j_{\frac{m-2}{2}}(t|y|)) dy = \end{aligned}$$

□

$$\leq A_\sigma^{2-\frac{2}{k}}(f) \left(\int_\sigma^\infty |\hat{f}(y)|^2 (1 - j_{\frac{m-2}{2}}(t|y|))^k dy \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (46)$$

Так как

$$\omega_k^2(f, t) = \int_0^\infty |\hat{f}(y)|^2 (1 - j_{\frac{m-2}{2}}(t|y|))^k dy$$

то из (46) следует

$$A_\sigma^2(f) - \int_\sigma^\infty |\hat{f}(y)|^2 j_{\frac{m-2}{2}}(t|y|) dy \leq A_\sigma^{2-\frac{2}{k}}(f) \omega_k^{\frac{2}{k}}(f, t). \quad (47)$$

Умножая обе части неравенства (47) на весовую функцию Бабенко (см. [8])

$$v(t) = t^{2\alpha+1} T_{q_{\alpha,1}} V(t), \quad t \in R_+, \quad \alpha > \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{m-2}{2},$$

где

$$\begin{aligned} V(t) &= \begin{cases} j_{\frac{m-2}{2}}(t), & 0 < t < q_{\alpha,1} \\ 0, & t > q_{\alpha,1}, \end{cases} \\ T_h f(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1/2)} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2+h^2-2xh \cos \varphi}) (\sin \varphi)^{2\alpha} d\varphi \end{aligned}$$

и интегрируя их по t от нуля до $q_{\alpha,1} = q_{\frac{m-2}{2},1}$ получим

$$\begin{aligned} \int_0^{q_{\alpha,1}} A_\sigma^2(f) v(t) dt - \int_0^{q_{\alpha,1}} \int_\sigma^\infty |\hat{f}(y)|^2 j_{\frac{m-2}{2}}(t|y|) dy v(t) dt &\leq \\ &\leq \int_0^{q_{\alpha,1}} A_\sigma^{2-\frac{2}{k}}(f) \omega_k^{\frac{2}{k}}(f, t) v(t) dt, \end{aligned} \quad (48)$$

где $q_{\frac{m-2}{2},1}$ является наименьшим положительным нулем функции $j_{\frac{m-2}{2}}(t)$.

Поскольку в [8] неравенство

$$\int_0^{q_{\alpha,1}} j_{\frac{m-2}{2}}(t|y|)v(t)dt \leq 0, \text{ для всех } |y| > 1 \quad (49)$$

было доказано, поэтому из (48) и (49), получим

$$A_\sigma^2(f) \int_0^{q_{\alpha,1}} v(t)dt \leq A_\sigma^{2-\frac{2}{k}}(f) \int_0^{q_{\alpha,1}} \omega_k^{\frac{2}{k}}(f, t)v(t)dt.$$

Далее, применяя свойства оператора обобщенного сдвига $T_h f$ (см. [20], [8], [21]) имеем

$$A_\sigma^{\frac{2}{k}}(f) \leq \frac{\int_0^{q_{\alpha,1}} \omega_k^{\frac{2}{k}}(f, t)j_{\frac{m-2}{2}}(t)t^{m-1}dt}{\int_0^{q_{\alpha,1}} j_{\frac{m-2}{2}}(t)t^{m-1}dt}.$$

Отсюда следует, что

$$A_\sigma(f) \leq \frac{\left(\int_0^{q_{\alpha,1}} \omega_k^{\frac{2}{k}}(f, t)j_{\frac{m-2}{2}}(t)t^{m-1}dt \right)^{\frac{k}{2}}}{\left(\int_0^{q_{\alpha,1}} j_{\frac{m-2}{2}}(t)t^{m-1}dt \right)^{\frac{k}{2}}}.$$

Теорема 6 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $k \in \mathbb{R}_+, k \geq 1, q_{\alpha,1} > 0, \sigma > 0, \alpha = \frac{m-2}{2}$. Тогда для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$ имеет место неравенство

$$A_\sigma(f) \leq \omega_k(f, q_{\alpha,1}),$$

где $q_{\alpha,1}$ — является наименьшим положительным нулем функции $j_\alpha(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что функционал

$$J_k(f, q_{\alpha,1}) = \frac{\left(\int_0^{q_{\alpha,1}} \omega_k^{\frac{2}{k}}(f, t)j_{\frac{m-2}{2}}(t)t^{m-1}dt \right)^{\frac{k}{2}}}{\left(\int_0^{q_{\alpha,1}} j_{\frac{m-2}{2}}(t)t^{m-1}dt \right)^{\frac{k}{2}}}$$

меньше, чем $\omega_k(f, q_{\alpha,1})$. Действительно, из монотонности $\omega_k(f, t)$ следует, что

$$J_k(f, q_{\alpha,1}) = \frac{\left(\int_0^{q_{\alpha,1}} \omega_k^{\frac{2}{k}}(f, t)j_{\frac{m-2}{2}}(t)t^{m-1}dt \right)^{\frac{k}{2}}}{\left(\int_0^{q_{\alpha,1}} j_{\frac{m-2}{2}}(t)t^{m-1}dt \right)^{\frac{k}{2}}} \leq \omega_k(f, q_{\alpha,1}). \quad (50)$$

Из теоремы 7 в силу (50) имеем

$$A_\sigma(f) \leq \frac{\left(\int_0^{q_{\alpha,1}} \omega_k^{\frac{2}{k}}(f, t)j_{\frac{m-2}{2}}(t)t^{m-1}dt \right)^{\frac{k}{2}}}{\left(\int_0^{q_{\alpha,1}} j_{\frac{m-2}{2}}(t)t^{m-1}dt \right)^{\frac{k}{2}}} = J_k(f, q_{\alpha,1}) \leq \omega_k(f, q_{\alpha,1}).$$

Следствие 4 доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Ранее в [8], [15], [13], [31] были получены точные константы в неравенстве Джексона–Стечкина. В следствия 4 теоремы 7 полученная точная константа в неравенстве Джексона – Стечкина, совпадает с точным результатом А. Г. Бабенко [8] при $k \geq 1$. Данное здесь доказательство следствия 4 теоремы 7 отличается от доказательства теоремы А. Г. Бабенко [8], А. В. Московский [13], Д.В. Горбачева [14], [31], В. И. Иванова [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения – М.: Наука. 1987.
2. Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L^2 // Тр. МИАН СССР, 88 (1967), 71–74.
3. Черных Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L^2 // Матем. заметки, 2:5 (1967), 513–522.
4. Шалаев В. В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций // Укр. матем. журнал., 1991 3 № 1 104–107.
5. Ибрагимов И. И., Насибов Ф. Г. Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // Докл. АН СССР., 194:5 (1970), 1013–1016.
6. Попов В. Ю. О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Матем., 1972, 6, 65–73.
7. Арестов В. В., Попов В. Ю. Неравенства Джексона на сфере в L^2 // Изв. вузов. Матем., 1995, 8, 13–20.
8. Бабенко А. Г. Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере // Матем. заметки, 60:3 (1996), 333–355.
9. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшие полиномиальные приближения в L^2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки, 90:5 (2011), 764–775.
10. J. Li, Liu Y. P. The Jackson inequality for the best L^2 -approximation of functions on $[0, 1]$ with the weight x // Numer. Math. Theory Methods Appl. 2008 Vol. 1, № 3 P.340–356.
11. J. Li, Y. P. Liu, Chun-Mei Su. Jackson inequality and widths of function classes in $L^2([0, 1], x^{2\nu+1})$ // Journal of Complexity 2012 Vol. 28, P.582–596.
12. Бердышева Е. Е. Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных // Матем. заметки, 66:3 (1999), 336–350.
13. Московский А. В. Теоремы Джексона в пространствах $L_p(R_n)$ и $L_{p, \lambda}(R_+)$ // Изв. ТулГУ. сер. матем., мех., информатика 1997 Вып. 194, № 3 44–70.
14. Горбачев Д. В. Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Матем. заметки, 68:2 (2000), 179–187.
15. Иванов В. И. О точности неравенства Джексона в пространствах L_p на полупрямой со степенным весом // Матем. заметки, 98:5 (2015), 684–694.
16. Есмаганбетов М. Г. Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Матем. заметки, 65:6 (1999), 816–820.
17. Шабозов М. Ш., Тухлиев К., Муродов К. Н. Точные оценки скорости сходимости рангов Фурье–Бесселя и значений n -поперечников некоторых классов функций // Вопросы вычислительной и прикладной математики 2015 № 2 40–47.
18. Тайков Л. В. Неравенство, содержащее наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки, 1976 Т. 20, № 3 433–438.

19. Бейтман Г., Эрдейи А. 1966 Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены – М.: Наука.
20. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН, 6:2(42) (1951), 102–143.
21. Платонов С.С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. матем., 71:5 (2007), 149–196.
22. Абилов В.А., Абилов М.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье–Бесселя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 55:6 (2015), 917–927.
23. Абилов В.А., Абилов М.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по классическим ортогональным многочленам // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 55:7 (2015), 1109–1117.
24. Платонов С.С. Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений функций в метрике L_2 . I // Труды ПГУ. Математика, 2000, № 7, 70–83.
25. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах –М.: Мир. 1974.
26. В. А. Юдин Экстремальные свойства функций и дизайны на торе // Матем. заметки 1997 Vol. 61, № 4 637–640.
27. Lizorkin P. I., Nikol'skii S. M. A theorem concerning approximation on the sphere // Anal. Math. 1983 Vol. 9, 207–221.
28. Рустамов Х.П. О приближении функций на сфере // Изв.РАН. Сер. матем., 1993 57, № 5 127–148.
29. Никольский С.М., Лизоркин П. И. 1987 Аппроксимация функций на сфере // Изв.РАН. Сер. матем., 1987 Vol. 51, № 3 635–651.
30. Vakarchuk S. B., Shabozov M. Sh., and V. I. Zabutnaya. Structural characteristics of functions from L^2 and the exact values of widths of some functional classes // Journal of Mathematical Sciences, 2015 Vol. 206, № 1 97–114.
31. Горбачев Д.В. Оценка оптимального аргумента в точном многомерном L^2 -неравенстве Джексона–Стечкина // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН., 2014, том 20, № 1, 83–91.
32. Ватсон Н.Г. Теория функций Бесселя – М.: Изд. иностранные лит-ры. 1949.
33. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических функций в пространстве $L^2[0, 2\pi]$ // L^2 Мат. заметки., 2010, Vol. 87, № 4, 616–623.
34. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа в $L^2(R)$ и средних ν -поперечниках некоторых функциональных классов // Известия вузов. Математика 2014, № 7, 30–48.
35. Vakarchuk S. B. Jackson - type inequalities for the special moduli of continuity on the entire real axis and the exact values of mean ν -widths for the classes of functions in the space $L^2(R)$ // Ukrainian Mathematical Journal. 2014. Vol. 66, № 6, 827–856.
36. Лигун А. А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки., 1978, 24, № 6, 785–792.

REFERENCES

1. Korneichuk N.P., 1987, "Exact constants in approximation theory" Moskow, Nauka, [in Russian].
2. Chernykh N.I., "On the Jackson inequality in L_2 ", Tr.MIAN SSSR.1967 Vol. 88, P.71-74.
3. Chernykh N.I., 1967, "On the best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in L_2 ", Math. notes., Vol.2 № 5. P. 513-522.
4. Shalaev B.B., 1991, "Widths in L_2 of Classes of Differentiable Functions Defined by Continuity of Higher Order Modules", Ukr. Mat. jour. Vol. 3 № 1. P. 104-107.
5. Ibragimov I.I., Nasibov V.I., 1970, "Estimate of the best approximation of an integrable function on the real axis using entire functions of finite degree", Dokl. acad. USSR Academy of Sciences, Vol. 194, № 5. P. 1013-1016.
6. Popov V. Yu., 1970, "On Exact Constants in Jackson's Inequalities for the Best Spherical Root-Mean-Square Approximations", Russian Math.(Iz. VUZ) 1970, Vol. 12,235 P. 67-80.
7. Arestov V.V., Popov V.Yu., 1981, "Jackson's inequalities on the sphere in L_2 ", Russian Math.jour., Vol.39, № 8. P.11-18.
8. Babenko A.G., 1998, "Exact Jackson-Stechkin inequality for $L_2(R^m)$ ", Tr. IMM UB RAS. Vol.5, № 3. P. 183-198.
9. M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov, "Best Polynomial Approximations in L_2 of Classes of 2π -Periodic Functions and Exact Values of Their Widths", Math. Notes, 90:5 (2011), 748–757
10. Li J., Liu Y.P., 2008, "The Jackson inequality for the best L^2 -approximation of functions on $[0, 1]$ with the weight x " Numer. Math. Theory Methods Appl. Vol. 1, № 3 P.340-356
11. Li J., Liu Y.P., Chun-Mei Su., 2012, "Jackson inequality and widths of function classes in $L^2([0, 1], x^{2\nu+1})$ ", Journal of Complexity. Vol. 28, P.582-596
12. E. E. Berdysheva, "Two related extremal problems for entire functions of several variables", Math. Notes, 66:3 (1999), 271–282
13. Moskovsky A. V., 1997, "Jackson's theorems in the spaces $L_p(R_n)$ and $L_p, \lambda(R_+)$ ", Izv. TulGU. ser. mathematics, mechanics, informatics. Volume. 194, № 3 S. 44-70
14. D.V. Gorbachev, "Extremum problems for entire functions of exponential spherical type", Math. Notes, 68:2 (2000), 159–166
15. V.I. Ivanov, "On the Sharpness of Jackson's Inequality in the Spaces L_p on the Half-Line with Power Weight", Math. Notes, 98:5 (2015), 742–751
16. M. G. Esmaganbetov, "Widths of classes from $L_2[0, 2\pi]$ and the minimization of exact constants in Jackson-type inequalities", Math. Notes, 65:6 (1999), 689–693
17. Shabozov M. Sh., Tukhliev K., Murodov K.N. "Exact estimates of the rate of convergence of Fourier-Bessel ranks and values of n -widths of some classes of functions", Questions of Computational and Applied Mathematics 2015 No. 2 40-47.
18. Taikov L.V., 1976, "An inequality containing the best approximations and the modulus of continuity of functions from L_2 ", Math. notes, Vol 20, № 3 P. 433–438

19. G. Bateman G., Erdelyi A., 1966, Higher transcendental functions. Bessel functions, parabolic cylinder functions, orthogonal polynomials M. Nauka
20. Levitan V.M., 1951, “Expansion in Bessel functions in Fourier series and integrals“, Uspekhi Mat. Vol 42, № 6:2 P. 102-143.
21. Platonov S. S., 2007 “Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line“, Izv. Math., 71:5 (2007), 1001–1048
22. Abilov V. A., Abilova F. V., Kerimov M. K., “Sharp estimates for the convergence rate of Fourier–Bessel series“, Comput. Math. Math. Phys., 55:6 (2015), 907–916
23. Abilov V. A., Abilova F. V., Kerimov M. K., “Sharp estimates for the rate of convergence of double Fourier series in classical orthogonal polynomials“, Comput. Math. Math. Phys., 55:7 (2015), 1094–1102
24. Platonov S. S., 2000, “Generalized Bessel shifts and some problems in the theory of approximations of functions in the L_2 metric. I“, Proceedings of PSU. Vol.7, P. 70-83
25. Stein I. M , Weiss G. 1974 Introduction to harmonic analysis on Euclidean spaces M. Mir
26. Yudin V. A., 1997, “Extremal properties of functions and designs on a torus“, Mat. Notes Vol. 61, No. 4 P. 637–640
27. Lizorkin P.I., Nikol’skii S.M. 1983 “A theorem concerning approximation on the sphere“, Anal. Math. Vol. 9, P.207–221
28. Rustamov Kh.P., 1993 “On the approximation of functions on a sphere“, Izv.RAN. Ser. Mat., 1993 Vol. 57, 5 P. 127–148
29. Nikol’skii S. M., Lizorkin P. I. 1987 “Approximation of functions on a sphere“Izv.RAN. Ser. math. Vol. 51, 3 P.635-651
30. Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh., and Zabutnaya V.I. 2015 “ Structural characteristics of functions from L^2 and the exact values of widths of some functional classes“ Journal of Mathematical Sciences, Vol. 206, № 1 P.97-114
31. Gorbachev D. V. 2015 “An estimate of an optimal argument in the sharp multidimensional Jackson–Stechkin L_2 -inequality“, Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), 288, suppl. 1 , 70–78
32. Watson N. G., 1949, Theory of Bessel functions M. Izd. foreign liters
33. Shabozov M.Sh.2010, “Widths of some classes of periodic functions in the space $L^2[0, 2\pi]$, L^2 “, Mat. notes., Vol. 87, No. 4, P.616–623.
34. Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh., and Langarshoev M.R. 2014, “On the best mean square approximations by entire functions of exponential type in $L^2(R)$ and mean ν -widths of some functional classes“, Russian Math.(Iz. VUZ). № 7, p. 30–48.
35. Vakarchuk S.B. 2014 “Jackson - type inequalities for the special moduli of continuity on the entire real axis and the exact values of mean ν -widths for the classes of functions in the space $L^2(R)$ “ Ukrainian Mathematical Journal. Vol. 66, No. 6, 827–856.
36. Ligun A.A. 1978 “Some inequalities between best approximations and moduli of continuity in the space L^2 “ Mat. notes., Vol 24, No. 6, 785–792.

Получено: 10.09.2022

Принято в печать: 12.09.2023