ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 3.

УДК 512.772 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-122-138

Постоянные отношения для точек перегиба кубической кривой с узловой или изолированной точкой

Л. Н. Ромакина

Ромакина Людмила Николаевна — кандидат физико-математических наук, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (г. Саратов).
e-mail: romakinaln@mail.ru

Аннотация

В статье получены проективные инварианты кубических кривых с узловой или изолированной точкой. Доказано, что на проективной плоскости каждые две точки перегиба кубической кривой с узловой (изолированной) точкой находятся в эквиангармоническом отношении с расположенными на содержащей их прямой точками касательных данной кривой в ее узловой (изолированной) точке. А каждые три точки перегиба такой кривой находятся в квазиангармоническом отношении с расположенной на содержащей их прямой точкой касательной данной кривой в ее узловой (изолированной) точке.

Установлено, что на проективной плоскости любые две крунодальные (акнодальные) кубики проективно эквивалентны.

Доказано, что четыре прямые, содержащие узловую (изолированную) точку кубики, а именно: прямая точек перегиба, касательная и псевдокасательная к кривой в точке перегиба, касательная к кривой в точке, сопряженной с точкой перегиба, находятся в постоянном сложном отношении, равном -3. На основании этого факта обоснован ряд свойств кубических кривых с узловой (изолированной) точкой на евклидовой плоскости E_2. Приведем некоторые из доказанных свойств, обозначая кубическую кривую символом σ, а ее узловую или изолированную точку — символом I.

1. Если касательные к σ в изолированной точке I проходят через циклические точки плоскости E_2, то величина угла между любыми двумя прямыми, каждая из которых соединяет точку I с точкой перегиба данной кривой, равна $\pi/3$.
2. Псевдокасательная в точке I разделяет полосу между проходящими через I параллельными касательными к σ в отношении три к одному, считая от касательной к σ в сопряженной с I точке, тогда и только тогда, когда прямая точек перегиба линии σ совпадает с абсолютной прямой плоскости E_2.
3. Касательная линии σ в сопряженной с I точке разделяет полосу между взаимно параллельными псевдокасательной в точке I и прямой точек перегиба линии σ в отношении три к одному, считая от псевдокасательной, тогда и только тогда, когда касательная линии σ в точке I совпадает с абсолютной прямой плоскости E_2.
4. Прямая точек перегиба линии σ разделяет полосу между проходящими через I параллельными касательными к σ в отношении три к одному, считая от касательной линии σ в точке I, тогда и только тогда, когда псевдокасательная линии σ в точке I совпадает с абсолютной прямой плоскости E_2.
5. Касательная линии σ в точке I разделяет полосу между прямой точек перегиба и параллельной ей псевдокасательной в точке I в отношении три к одному, считая от прямой точек перегиба, тогда и только тогда, когда касательная линии σ в сопряженной с I точке совпадает с абсолютной прямой плоскости E_2.

Ключевые слова: кубическая кривая, точка перегиба, узловая точка кубической кривой, изолированная точка кубической кривой.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Л. Н. Ромакина. Постоянные отношения для точек перегиба кубической кривой с узловой или изолированной точкой // Чебышевский сборник, 2022, т. 24, вып. 3, с. 122–138.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 3.

UDC 512.772 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-122-138

Constant rations for inflection points of a cubic curve with a node or an acnode

L. N. Romakina

Romakina Lyudmila Nikolaevna — candidate of physical and mathematical sciences, Saratov N. G. Chernyshevsky State University (Saratov).
e-mail: romakinaln@mail.ru

Abstract

In this paper, projective invariants of cubic curves with a node or an acnode are obtained. It is proved that on the projective plane every two inflection points of a cubic curve with a node (acnode) are in an equianharmonic ratio with the points of tangents of the given curve at its node (acnode) located on the line containing these inflection points. And every three inflection points of such a curve are in a quasi-anharmonic ratio with the point on tangent of this curve at its node (acnode) located on the line containing these inflection points.

It is established that in the projective plane any two crunodal (acnodal) cubics are projectively equivalent.

It is proved that four lines containing the node (acnode) of a cubic, namely: the line of the inflection points, the tangent and pseudotangent to the curve at the inflection point, the tangent to the curve at the point conjugate to the inflection point, are in a constant cross ratio equal to -3. Based on this fact, a number of properties of cubic curves with a node (acnode) in the Euclidean plane E_2 are substantiated. Let us present some of the proved properties, denoting the cubic curve by the symbol σ, and its node or acnode by the symbol I.

1. If the tangents of σ at an acnode I pass through circle points of the plane E_2, then the angle between any two lines, each of which connects the point I with the inflection point of this curve, is equal to $\pi/3$.
2. The pseudotangent at the point I divides the strip between the parallel tangents of σ passing through I, in the ratio of three to one, counting from the tangent of σ at the conjugate point with I, if and only if, when the line of the inflection points of σ coincides with the absolute line of the plane E_2.
3. The tangent of σ at the conjugate point with I divides the strip between the mutually parallel pseudotangents at the point I and the line of the inflection points of σ in the ratio of three to one, counting from the pseudotangent, if and only if, when the tangent line of σ at the point I coincides with the absolute line of the plane E_2.
4. The line of the inflection points of the curve σ divides the strip between the parallel tangents to σ passing through I in the ratio of three to one, counting from the tangent line of σ at the point I, if and only if when the pseudotangent of the curve σ at the point I coincides with the absolute line of the plane E_2.

5. The tangent of the curve σ at the point I divides the strip between the line of inflection points and the parallel to it pseudotangent of σ at I in the ratio of three to one, counting from the line inflection points, if and only if the tangent of the curve σ at the conjugate point with I coincides with the absolute line of the plane E_2.

Keywords: cubic curve, inflection point, node of a cubic curve, acnode of a cubic curve.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
L. N. Romakina, 2023, "Constant rations for inflection points of a cubic curve with a node or an acnode", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 122–138.

1. Введение

При исследовании аналогов замечательных кривых в неевклидовых плоскостях в работах [6, 13, 14] была обнаружена тесная связь между кубическими кривыми с узловой точкой и кубическими кривыми с изолированной точкой, такие кривые будем называть соответственно *крунодальными* и *акнодальными кубиками*. Попытка уточнить классификацию алгебраических кривых третьего порядка, в частности, крунодальных и акнодальных кубик, и придать ей более наглядный (обозримый) вид, удобный для использования в различных неевклидовых геометриях, привела к интересным результатам [7]. Мы представляем их в данной работе, надеясь, что не только результаты, но и используемые в их обосновании методы найдут заинтересованного читателя.

Приведем известные свойства кубических кривых, доказательства которых можно найти по ссылкам в справочной литературе [8, с. 57], [9, с. 96, 111], [10, с. 88] или провести самостоятельно, используя, например, предложенное в данной работе аналитическое задание кубической кривой с узловой или изолированной точкой.

Каждая кубическая кривая имеет девять точек перегиба, три из которых вещественные, а шесть других составляют три пары мнимо сопряженных точек. В случае крунодальной кубики две вещественные и четыре мнимые точки перегиба совпадают с узловой точкой кривой. Отличными от узловой точки являются лишь три точки перегиба, две мнимо сопряженные и одна вещественная. Эти точки лежат на прямой, не содержащей узловую точку кубики. Акнодальная кубика имеет три вещественные точки перегиба. Содержащая их прямая не проходит через изолированную точку кубики.

В данной работе, в разделе 3, докажем связанные с точками перегиба проективные свойства кубических кривых с узловой или изолированной точкой. В частности, обоснуем тот факт, что взятые парами или тройками точки перегиба кубической кривой с узловой или изолированной точкой находятся в постоянном сложном отношении с точками пересечения содержащей их прямой с касательными кубики в ее двойной точке. Кроме того, найдем постоянное сложное отношение проходящих через вещественную точку перегиба крунодальной или акнодальной кубики четырех однозначно связанных с кубикой прямых. Все доказательства проведем аналитически, используемое каноническое задание кубик опишем в разделе 2. В разделе 4 как следствия доказанных в разделе 3 теорем представим некоторые метрические свойства кубик в евклидовой плоскости.

2. Аналитическое задание кубической кривой с узловой или изолированной точкой

2.1. Уравнение крунодальной кубики в полуканоническом репере

В работе [14] предложен алгоритм построения на проективной плоскости P_2 кубических кривых с узловой точкой, адаптированный также на евклидовой плоскости, в частности, для построения замечательных кривых. В обосновании алгоритма доказано, что при соответствующем выборе проективного репера крунодальная кубика проективной плоскости P_2 может быть задана уравнением

$$k^2x_1^3 + 2vk(p-q)x_1^2x_2 + (1+2vq)x_1x_2^2 + vk^2x_1^2x_3 - vx_2^2x_3 = 0, \tag{1}$$

$$kv \neq 0, \quad vp+1 \neq 0, \quad 2vq - vp + 1 \neq 0. \tag{2}$$

Условия (2) на коэффициенты уравнения (1) обеспечивают неприводимость [11, с. 6] кривой σ (см. [14, с. 65]).

Каждый репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ двухпараметрического семейства Φ проективных реперов плоскости P_2, в которых крунодальная кубика σ может быть задана уравнением (1) при фиксированных значениях k и v, названный *полуканоническим* репером кубики σ, обладает следующими позиционными по отношению к σ свойствами:

1) вершина A_2 принадлежит линии σ;

2) вершина A_3 совпадает с узловой точкой линии σ;

3) вершины A_1 и A_2 гармонически разделены касательными $\widetilde{k}_1$, $\widetilde{k}_2$ линии σ в ее узловой точке;

4) единичная точка E, где $E = A_1 + A_2 + A_3$, расположена таким образом, что выполняется равенство

$$\Big(\widetilde{k}_1(A_3E)(A_3A_1)(A_3A_2)\Big) = k, \ k \in \mathbb{R}_+;$$

5) для точек E_{13} и V, где $E_{13} = A_1 + A_3$, $V = \sigma \cap A_1A_3$, выполняется равенство

$$(E_{13}VA_1A_3) = -v, \ v \in \mathbb{R}, \ v \neq 0.$$

Последние два свойства однозначно определяют положение единичной точки E репера. Выбор наиболее подходящих чисел k и v зависит от специфики задачи.

Один из двух параметров, определяющих репер в указанном семействе Φ, характеризует положение вершины A_2 на кривой σ, а второй — положение вершины A_1 на прямой, гармонически разделяющей с прямой A_2A_3 пару касательных кубики σ в ее узловой точке A_3. Фиксация любого из этих параметров приводит к более плотному присоединению реперов к исследуемой кубике и сокращает число коэффициентов в уравнении (1), упрощая тем самым доказательство проективных свойств кубики, но усложняя, порой существенно, процесс адаптации результатов на евклидовой (или какой-либо неевклидовой) плоскости. Поэтому, стремясь к золотой середине, в каждой конкретной задаче следует оценивать необходимость каждого шага присоединения системы координат к исследуемому объекту и вести подсчет расходуемых параметров. В работе [14] мы остановились на двухпараметрическом семействе реперов[1], задавая крунодальную кубику уравнением, зависящим от двух параметров. В данной работе упростим уравнение (1), продолжая присоединение реперов к кубике.

[1] Схему присоединения реперов продемонстрируем в следующем разделе на примере акнодальной кубики.

2.2. Уравнение акнодальной кубики в полуканоническом репере

Получим аналог уравнения (1) для акнодальной кубики σ, последовательно присоединяя к σ проективные реперы плоскости P_2 согласно схеме доказательства теоремы 1 в работе [14].

Восьмипараметрическое семейство всех проективных реперов плоскости P_2 обозначим $U(8)$ и допустим, что $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ — текущий репер этого семейства. Кубическая кривая σ в репере R может быть задана следующим общим уравнением с действительными одновременно не равными нулю коэффициентами

$$\mathtt{A}x_1^3 + 3\mathtt{B}x_1^2x_2 + 3\mathtt{C}x_1x_2^2 + \mathtt{D}x_2^3 + 3\mathtt{E}x_1^2x_3 + 6\mathtt{F}x_1x_2x_3 + 3\mathtt{G}x_2^2x_3 + 3\mathtt{H}x_1x_3^2 + 3\mathtt{I}x_2x_3^2 + \mathtt{J}x_3^3 = 0. \tag{3}$$

Когда репер R пробегает все семейство $U(8)$, его вершины A_1, A_2, A_3 и единичная точка E могут быть произвольно расположены на плоскости P_2, но любые три из этих точек не принадлежат одной прямой. Ограничивая последовательно возможности для расположения точек A_1, A_2, A_3 и E относительно кубической кривой σ, получим цепочку семейств $U_4(2)$, $U_3(3)$, $U_2(4)$ и $U_1(6)$, состоящих из реперов семейства $U(8)$ и последовательно вложенных друг в друга, т. е. цепочку, подчиненную условиям

$$U_4(2) \subset U_3(3) \subset U_2(4) \subset U_1(6) \subset U(8).$$

Для обозначения произвольного репера любого из указанных семейств сохраним символ R и найдем отношения между коэффициентами уравнения (3) на каждом шаге сужения семейства $U(8)$, т. е. на каждом шаге присоединения репера R к кубике σ.

1. Помещая вершины $A_2(0:1:0)$ и $A_3(0:0:1)$ репера R из $U(8)$ на линию σ, зафиксируем два из восьми параметров и получим шестипараметрическое семейство реперов из $U(8)$. Обозначим его $U_1(6)$. В каждом репере семейства $U_1(6)$ линия σ может быть задана уравнением

$$\mathtt{A}x_1^3 + 3\mathtt{B}x_1^2x_2 + 3\mathtt{C}x_1x_2^2 + 3\mathtt{E}x_1^2x_3 + 6\mathtt{F}x_1x_2x_3 + 3\mathtt{G}x_2^2x_3 + 3\mathtt{H}x_1x_3^2 + 3\mathtt{I}x_2x_3^2 = 0. \tag{4}$$

2. Расходуя один параметр, зафиксируем вершину A_3 в изолированной точке кубики σ. После этого мнимо сопряженные касательные к линии σ в ее изолированной точке, обозначим их $\widetilde{k}_1$ и $\widetilde{k}_2$, можно задать уравнениями:

$$\widetilde{k}_1:\ x_2 = (a+ib)x_1, \tag{5}$$

$$\widetilde{k}_2:\ x_2 = (a-ib)x_1, \tag{6}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.

В пучке прямых с центром A_3 существует единственная прямая $\widetilde{l}$ такая, что пара прямых $\widetilde{l}$, A_2A_3 гармонически разделяет пару касательных $\widetilde{k}_1$, $\widetilde{k}_2$. Прямая A_2A_3 вещественная, а прямые $\widetilde{k}_1$, $\widetilde{k}_2$ мнимо сопряженные, поэтому прямая $\widetilde{l}$ вещественная, следовательно содержит отличные от A_3 вещественные точки. Закрепляя еще один параметр, поместим точку A_1 на прямую $\widetilde{l}$. Для сложного отношения $\left(\widetilde{l}(A_2A_3)\widetilde{k}_1\widetilde{k}_2\right)$ гармонической четверки рассматриваемых прямых выполняется равенство $\left(\widetilde{l}(A_2A_3)\widetilde{k}_1\widetilde{k}_2\right) = -1$. Записывая это равенство в координатах и учитывая, что прямая $\widetilde{l}$ теперь совпадает с прямой A_1A_3, находим условие на параметр a в уравнениях (5), (6): $a = 0$.

На данном шаге присоединения реперов к кубике σ получаем четырехпараметрическое семейство $U_2(4)$ всех проективных реперов, в каждом из которых вершина A_2 лежит на кубике σ, вершина A_3 является изолированной точкой этой кривой, а пара координатных прямых A_1A_3 и A_2A_3 гармонически разделяет пару касательных линии σ в ее изолированной точке.

3. Расходуя один из четырех оставшихся параметров и учитывая, что прямая $\widetilde{k}_1$ мнимая, расположим единичную точку E репера R так, чтобы выполнялось равенство

$$\Big(\widetilde{k}_1(A_3E)(A_3A_1)(A_3A_2)\Big) = const = ik, \quad k \in \mathbb{R}_+. \tag{7}$$

Поскольку прямая $\widetilde{k}_1$, заданная уравнением (5), имеет в реперах семейства $U_2(4)$ координаты $(-ib:1:0)$, на основании условия (7) получаем равенство $b=k$, справедливое во всех присоединенных реперах нового трехпараметрического семейства $U_3(3)$. Найдем уравнение линии σ в этих реперах.

Прямые $\widetilde{k}_1$, $\widetilde{k}_2$, заданные уравнениями (5), (6) при условиях $a=0$, $b=k$, касаются линии σ в ее изолированной точке A_3. Поэтому каждая из систем уравнений (4), (5) и (4), (6) имеет единственное решение $(0:0:1)$. Из системы уравнений (4), (5) при условиях $a=0$, $b=k$ получаем

$$\mathtt{H} + ik\mathtt{I} = 0, \quad \mathtt{E} + 2ik\mathtt{F} - \mathtt{G}k^2 = 0, \tag{8}$$

а из системы уравнений (4), (6) при тех же условиях находим

$$\mathtt{H} - ik\mathtt{I} = 0, \quad \mathtt{E} - 2ik\mathtt{F} - \mathtt{G}k^2 = 0. \tag{9}$$

Связи (8) и (9) приводят к равенствам $\mathtt{F}=\mathtt{H}=\mathtt{I}=0$, $\mathtt{E}=\mathtt{G}k^2$, согласно которым уравнение (4) в реперах семейства $U_3(3)$ принимает вид

$$\mathtt{A}x_1^3 + 3\mathtt{B}x_1^2x_2 + 3\mathtt{C}x_1x_2^2 + 3\mathtt{G}k^2x_1^2x_3 + 3\mathtt{G}x_2^2x_3 = 0. \tag{10}$$

На этом шаге при фиксированном значении k единичная точка E репера допускает смещение по прямой, содержащей вершину A_3.

4. Предположим, что линия σ (10) пересекает прямую A_1A_3 в отличной от A_3 точке V. Тогда в реперах семейства $U_3(3)$ точка V имеет координаты $(-3\mathtt{G}k^2:0:\mathtt{A})$. Фиксируя еще один параметр, расположим точку E_{13}, где $E_{13}=A_1+A_3$, на прямой A_1A_3 так, чтобы выполнялось равентсво $(VE_{13}A_1A_3) = const = -1/v$, где $v\in\mathbb{R}$ и $v\neq 0$. Записывая это равенство в координатах, находим условие $\mathtt{A}=3\mathtt{G}k^2/v$, связывающее коэффициенты уравнения (10). Итак, получили двухпараметрическое семейство $U_4(2)$ проективных реперов, в каждом из которых линия σ задана уравнением

$$k^2x_1^3 + \frac{v\mathtt{B}}{\mathtt{G}}x_1^2x_2 + \frac{v\mathtt{C}}{\mathtt{G}}x_1x_2^2 + vk^2x_1^2x_3 + vx_2^2x_3 = 0. \tag{11}$$

Отметим, что закрепление точки E_{13} приводит к полной фиксации точки E. При решении конкретной задачи константы k и v можно подобрать наиболее подходящим образом. Уравнение (11) теперь зависит от двух параметров B/G и C/G. Чтобы в определении геометрического смысла коэффициентов уравнения акнодальной кубики σ сохранить аналогию с крунодальной кубикой, введем параметры p и q, при которых коэффициенты B/G и C/G уравнения (11) примут соответственно вид

$$\frac{B}{G} = 2k(p-q), \quad \frac{C}{G} = -\frac{1+2vq}{v}.$$

Подставляя эти коэффициенты в уравнение (11), получим уравнение акнодальной кубики σ в реперах семейства $U_4(2)$

$$k^2x_1^3 + 2vk(p-q)x_1^2x_2 - (1+2vq)x_1x_2^2 + vk^2x_1^2x_3 + vx_2^2x_3 = 0. \tag{12}$$

Невырожденность кривой, заданной уравнением (12), обеспечим системой условий

$$kv \neq 0, \quad (vq+1)^2 + (2vq - vp + 1)^2 \neq 0,$$

или равносильной ей системой

$$kv \neq 0, \quad (vq+1)^2 + (p-q)^2 \neq 0. \tag{13}$$

Отметим, что при одновременном выполнении условий $kv \neq 0$, $p = q$, $vq + 1 = 0$ уравнение (12) определяет кривую, распавшуюся на мнимо сопряженные прямые $\widetilde{k}_1\,(-ik : 1 : 0)$, $\widetilde{k}_2\,(ik : 1 : 0)$ и прямую $\widetilde{v}\,(1 : v : 0)$.

Итак, аналог уравнения (1) для акнодальной кубики имеет вид (12) при условиях (13) и фиксированных значениях k и v.

2.3. Каноническое уравнение кубической кривой с узловой или изолированной точкой

Пусть крунодальная (акнодальная) кубика σ в присоединенных полуканонических реперах семейства Φ задана уравнением (1) при условиях (2) (или соответственно уравнением (12) при условиях (13)) и фиксированных значениях k и v.

Чтобы упростить уравнение кубики, в каждом присоединенном полуканоническом репере для констант k и v примем условия $k = v = 1$. Этот шаг не ведет к дополнительной фиксации используемых реперов, их семейство остается двухпараметрическим. На следующих двух этапах сократим число параметров и максимально присоединим реперы к кубике.

1. Вершину A_2 текущего репера семейства Φ в случае крунодальной кубики совместим с вещественной отличной от узловой точкой перегиба кривой σ, учитывая, что такая точка существует и притом только одна. В случае акнодальной кубики вершину A_2 поместим в одну из трех вещественных отличных от изолированной точек перегиба линии σ, учитывая, что указанные три точки равноправны. Закреплением вершины A_2 мы фиксируем один из двух свободных параметров, выделяя из семейства реперов Φ его однопараметрическое подсемейство Φ_1. Найдем уравнение линии σ в реперах семейства Φ_1.

Непосредственный поиск координат точек перегиба линии σ, заданной уравнением (1) или (12), приводит к громоздким вычислениям и даже с использованием средств компьютерной алгебры значительно усложняет решение поставленной задачи. Попробуем обойти возникающие препятствия, зная, что точка перегиба кубической кривой совпадает со своей тангенциальной точкой (см., например, [9, с. 100]). Напомним, что вторая точка пересечения кубической кривой с касательной к ней в точке M называется *тангенциальной* по отношению к точке M (см., например, [9, с. 46]).

Определим условия на коэффициенты уравнения кубики σ, при которых ее точка A_2 совпадает со своей тангенциальной точкой. Для этого получим уравнение касательной к σ в точке A_2 (см., например, [8, с. 57]). Обозначим функцию, стоящую в левой части уравнения (1) (или соответственно (12)) при $k = v = 1$, через $F(x_1, x_2, x_3)$ и найдем ее частные производные в точке $A_2(0 : 1 : 0)$.

Для линии σ с узловой точкой получаем:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_{A_2} &= \left.\big(3x_1^2 + 4(p-q)x_1x_2 + (1+2q)x_2^2 + 2x_1x_3\big)\right|_{A_2} = 1 + 2q,\\
\left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_{A_2} &= \left.\big(2(p-q)x_1^2 + 2(1+2q)x_1x_2 - 2x_2x_3\big)\right|_{A_2} = 0,\\
\left.\frac{\partial F}{\partial x_3}\right|_{A_2} &= \left.\big(x_1^2 - x_2^2\big)\right|_{A_2} = -1.
\end{aligned} \tag{14}$$

Для линии σ с изолированной точкой находим следующие значения:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_{A_2} = \left(3x_1^2 + 4(p-q)x_1x_2 - (1+2q)x_2^2 + 2x_1x_3\right)\big|_{A_2} = -(1+2q),$$
$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_{A_2} = \left(2(p-q)x_1^2 - 2(1+2q)x_1x_2 + 2x_2x_3\right)\big|_{A_2} = 0,$$
$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_3}\right|_{A_2} = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\big|_{A_2} = 1. \tag{15}$$

Согласно выражениям (14), (15), уравнение касательной к линии σ в точке A_2 имеет вид

$$(1+2q)x_1 - x_3 = 0. \tag{16}$$

Из системы уравнений (1), (16) (или соответственно (12), (16)) находим проективные координаты тангенциальной по отношению к A_2 точки T линии σ:

$$\left(q-p : 1+q : (1+2q)(q-p)\right). \tag{17}$$

Заметим, что при ограничениях (2) (или (13)) на коэффициенты уравнения (1) (или соответственно (12)) вершина A_2 совпадает со своей тангенциальной точкой T, заданной координатами (17), тогда и только тогда, когда $p = q$. Таким образом, при условии $p = q$ из уравнения (1) (или соответственно (12)) получаем уравнение

$$x_1^3 + (1+2q)x_1x_2^2 + x_1^2x_3 - x_2^2x_3 = 0$$
$$\left(x_1^3 - (1+2q)x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 = 0\right),$$
$$q+1 \neq 0, \tag{18}$$

крунодальной (или соответственно акнодальной) кубики σ в реперах однопараметрического семейства Φ_1, вершина A_3 которых находится в двойной точке, а вершина A_2 — в вещественной точке перегиба кубики σ.

2. Последний свободный параметр семейства Φ_1 характеризует движение вершины A_1 по прямой $\widetilde{l}$, гармонически разделяющей с прямой A_2A_3 касательные к σ в ее двойной точке. Зафиксируем этот параметр, помещая вершину A_1 в точку пересечения прямой $\widetilde{l}$ с прямой $\widetilde{p}$, содержащей отличные от точек A_2 и A_3 точки перегиба I_1, I_2 линии σ.

В результате проведенной фиксации в случае крунодальной кубики из семейства Φ_1 выбран единственный репер, однозначно связанный с линией σ. В случае акнодальной кубики соответственно положению вершины A_2 в одной из трех вещественных точек перегиба линии, отличных от изолированной точки, выбраны три различных репера, однозначно связанных с σ. Каждый из выбранных реперов назовем *каноническим* репером линии σ и обозначим R^*.

Найдем уравнение кубики σ в каноническом репере R^*.

Чтобы упростить поиск координат точек I_1, I_2, будем рассматривать σ как линию евклидовой плоскости E_2, абсолютная прямая l_∞ которой совпадает с координатной прямой A_1A_3 текущего репера R семейства Φ_1. Циклические точки J_1, J_2 на прямой l_∞ выберем так, чтобы они гармонически разделяли вершины A_1, A_3. К реперу R присоединим декартову прямоугольную систему координат Oxy с началом в точке A_2 и осями абсцисс и ординат, направленными соответственно по прямым A_2A_1 и A_2A_3. В репере R прямая A_1A_3 задана уравнением $x_2 = 0$, поэтому проективные координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$ произвольной точки M плоскости P_2 в репере R и ее неоднородные координаты (x, y) в системе Oxy связаны выражениями

$$\frac{x_1}{x_2} = x, \quad \frac{x_3}{x_2} = y. \tag{19}$$

Переходя в первом (втором) уравнении из (18) к координатам x, y по формулам (19), запишем явное уравнение крунодальной (акнодальной) кубики σ в системе координат Oxy:

$$y=\frac{x^3+(1+2q)x}{1-x^2}\quad\left(y=\frac{-x^3+(1+2q)x}{1+x^2}\right),\quad q\neq -1. \tag{20}$$

Из соответствующего уравнения (20) получаем

$$y''=\frac{4(1+q)x\left(x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)^3}\quad\left(y''=\frac{4(1+q)x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}\right),$$

$$y'''=\frac{12(1+q)\left(x^4+6x^2+1\right)}{\left(1-x^2\right)^4}\quad\left(y'''=-\frac{12(1+q)\left(x^4-6x^2+1\right)}{\left(1+x^2\right)^4}\right). \tag{21}$$

Используя выражения из (21), находим координаты точек перегиба I_1, I_2 крунодальной (акнодальной) кубики σ в системе координат Oxy

$$\left(\varepsilon_1 i\sqrt{3},\, \varepsilon_1 i\frac{\sqrt{3}}{2}(q-1)\right),\ \varepsilon_1=\pm1\quad\left(\left(\varepsilon_2\sqrt{3},\varepsilon_2\frac{\sqrt{3}}{2}(q-1)\right),\ \varepsilon_2=\pm1\right).$$

В репере R точки I_1, I_2, согласно формулам (19), определены следующим образом:

$$I_{1,2}\ \left(\varepsilon_1 2i\sqrt{3}:2:\varepsilon_1 i\sqrt{3}(q-1)\right),\ \varepsilon_1=\pm1$$
$$\left(I_{1,2}\ \left(\varepsilon_2 2\sqrt{3}:2:\varepsilon_2\sqrt{3}(q-1)\right),\ \varepsilon_2=\pm1\right). \tag{22}$$

Прямая $\widetilde{p}$, содержащая точки I_1, I_2, задана в репере R уравнением

$$x_1(1-q)+2x_3=0. \tag{23}$$

Поскольку в каноническом репере R^* линии σ точка A_1 принадлежит прямой $\widetilde{p}$, уравнение (23) определяет прямую $\widetilde{p}$ в этом репере тогда и только тогда, когда $q=1$. Накладывая условие $q=1$ на первое (второе) уравнение из (18), получим уравнение крунодальной (акнодальной) кубики σ в ее каноническом репере R^*.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть σ — произвольная крунодальная (акнодальная) кубика проективной плоскости P_2. Существует проективный репер плоскости P_2, уравнение линии σ в котором имеет вид*

$$x_1^3+3x_1x_2^2+x_1^2x_3-x_2^2x_3=0\quad\left(x_1^3-3x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_2^2x_3=0\right). \tag{24}$$

Первое (второе) уравнение из (24) назовем *каноническим* уравнением крунодальной (акнодальной) кубики проективной плоскости P_2.

Согласно основной теореме о проективных преобразованиях (см., например, [1, с. 35]) непосредственно из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *На проективной плоскости P_2 любые две кубические кривые с узловой (изолированной) точкой проективно эквивалентны.*

Согласно теореме 2 семейство всех крунодальных (акнодальных) кубик плоскости P_2 состоит из единственной кубики, определенной с точностью до проективного преобразования.

Отметим, что в замечании 1 работы [14] по техническим причинам было неверно сформулировано утверждение о семействе всех крунодальных кубик проективной плоскости.

3. Проективные свойства кубических кривых с узловой или изолированной точкой

Докажем связанные с точками перегиба проективные свойства крунодальных и акнодальных кубик проективной плоскости P_2. Предварительно введем следующие понятия.

Напомним, что *эквиангармоническим отношением* четырех точек прямой называют (см. [9, с. 104]) их сложное (в других терминах, двойное или ангармоническое) отношение α в том случае, когда α является корнем уравнения

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

т. е. в том случае, когда $\alpha = \left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)/2$.

Учитывая, что противоположные числам $\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)/2$ комплексные числа $\left(1 \mp i\sqrt{3}\right)/2$ являются корнями уравнения

$$x^2 - x + 1 = 0, \tag{25}$$

квазиангармоническим отношением четырех точек прямой назовем их сложное отношение α в том случае, когда α является корнем уравнения (25).

С эквиангармоническим отношением связано известное свойство кубических кривых (см., например, [9, с. 108]): *двойное отношение четырех прямых, проходящих через точку перегиба и содержащих еще по две точки перегиба, есть эквиангармоническое отношение.* В следующих рассуждениях приведем пример проявления эквиангармонического отношения для точек перегиба кубических кривых с узловой или изолированной точкой.

Пусть σ — крунодальная (акнодальная) кубика проективной плоскости P_2. Зададим линию σ в ее каноническом репере R^* соответствующим уравнением из (24). Тогда узловая (изолированная) точка линии σ совпадет с вершиной A_3 репера R^*, а вещественная точка перегиба — с вершиной A_2 (см. вывод теоремы 1). Координаты (22) отличных от точек A_2 и A_3 точек перегиба I_1, I_2 линии σ принимают в репере R^*, при $q = 1$, вид

$$I_1\left(i\sqrt{3} : 1 : 0\right),\ I_2\left(-i\sqrt{3} : 1 : 0\right) \qquad \left(I_1\left(\sqrt{3} : 1 : 0\right),\ I_2\left(-\sqrt{3} : 1 : 0\right)\right). \tag{26}$$

Точки перегиба A_2, I_1, I_2 принадлежат прямой $\widetilde{p}$, заданной в репере R^* уравнением $x_3 = 0$. Касательные $\widetilde{k}_1\,(-1 : 1 : 0)$, $\widetilde{k}_2\,(1 : 1 : 0)$ $\left(\widetilde{k}_1\,(-i : 1 : 0), \widetilde{k}_2\,(i : 1 : 0)\right)$ крунодальной (акнодальной) кубики σ в ее узловой (изолированной) точке пересекают прямую $\widetilde{p}$ соответственно в точках

$$T_1\,(1 : 1 : 0),\ T_2\,(1 : -1 : 0) \qquad (T_1\,(1 : i : 0),\ T_2\,(1 : -i : 0)). \tag{27}$$

В координатах точек (26), (27) вычислим следующие сложные отношения четверок точек на прямой $\widetilde{p}$:

$$(I_1I_2T_1T_2) = (A_2I_1T_1T_2) = (I_2A_2T_1T_2) = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \tag{28}$$

$$(I_1I_2A_2T_1) = (I_2A_2I_1T_1) = (A_2I_1I_2T_1) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \tag{29}$$

$$(I_1I_2A_2T_2) = (I_2A_2I_1T_2) = (A_2I_1I_2T_2) = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}. \tag{30}$$

По свойству сложного отношения четырех точек прямой (см., например, [1, с. 30]) из равенств (28) находим

$$(I_2I_1T_1T_2) = (I_1A_2T_1T_2) = (A_2I_2T_1T_2) = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}. \tag{31}$$

В силу выражений (28) – (31) и свойств сложного отношения четырех точек прямой справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Каждые две точки перегиба крунодальной (акнодальной) кубики проективной плоскости P_2, отличные от ее узловой (изолированной) точки, находятся в эквиангармоническом отношении с расположенными на содержащей их прямой точками касательных данной кубики в ее узловой (изолированной) точке.*

Теорема 4. *Каждые три точки перегиба крунодальной (акнодальной) кубики проективной плоскости P_2, отличные от ее узловой (изолированной) точки, находятся в квазиангармоническом отношении с расположенной на содержащей их прямой точкой касательной данной кубики в ее узловой (изолированной) точке.*

На основании свойств, сформулированных в теоремах 3, 4, унимодулярные комплексные числа $\left(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2\sqrt{3}\right)/2$, где $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, корни уравнений $x^2 - \varepsilon_1 x + 1 = 0$, назовем *константами перегиба* кубической кривой с узловой или изолированной точкой.

Чтобы сократить формулировки следующих теорем, прямую, содержащую точки перегиба крунодальной (акнодальной) кубики, отличные от ее двойной точки, назовем *прямой точек перегиба*, а прямую, соединяющую некоторую точку M кубики с ее двойной точкой, — *псевдокасательной* данной кубики в точке M (см., например, [9, с. 105]).

Теорема 5. *Пусть σ — крунодальная (акнодальная) кубика проективной плоскости P_2, $\widetilde{p}$ — прямая точек перегиба кубики σ, $\widetilde{a}$ и $\widetilde{m}$ — соответственно касательная и псевдокасательная σ в ее точке перегиба I, а $\widetilde{v}$ — касательная линии σ в сопряженной с I точке. Тогда для сложного отношения $(\widetilde{v}\widetilde{a}\widetilde{m}\widetilde{p})$ четырех прямых пучка выполняется равенство*

$$(\widetilde{v}\widetilde{a}\widetilde{m}\widetilde{p}) = -3. \tag{32}$$

Доказательство. Зададим крунодальную (акнодальную) кубику σ в ее каноническом репере R^* первым (вторым) уравнением из (24). Тогда вершина A_2 репера R^* совпадет с вещественной точкой перегиба линии σ, а вершина A_3 — с ее узловой (изолированной) точкой. Поскольку в репере R^* вершина A_1 лежит на прямой $\widetilde{p}$ точек перегиба, $\widetilde{p}$ задана в R^* координатами $(0:0:1)$.

Согласно условию теоремы точка перегиба I кубики σ принадлежит прямой $\widetilde{p}$, следовательно не совпадает с ее узловой (изолированной) точкой. Если σ — акнодальная кубика, то I — одна из трех равноправных вещественных точек перегиба этой линии, принадлежащих прямой $\widetilde{p}$. Значит, точку I можно отождествить с вершиной A_2 репера R^*. Если σ — крунодальная кубика, I может быть как вещественной, так и мнимой точкой перегиба на прямой $\widetilde{p}$. Продолжим доказательство теоремы, рассматривая точку I сначала вещественной, а затем мнимой.

Когда точка I вещественная, условимся, что она совпадает с $A_2(0:1:0)$. Тогда псевдокасательная $\widetilde{m}$ линии σ в точке I совпадает с прямой A_2A_3 и имеет в репере R^* координаты $(1:0:0)$.

Частные производные функции $F(x_1, x_2, x_3)$, стоящей в левой части первого (второго) уравнения из (24), имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial F}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 3\varepsilon x_2^2 + 2x_1x_3,\\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2\varepsilon(3x_1x_2 - x_2x_3), \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = x_1^2 - \varepsilon x_2^2,\end{gathered} \tag{33}$$

где $\varepsilon = 1$ (или соответственно $\varepsilon = -1$).

Значения выражений из (33) в точке $I(0:1:0)$ определяют в репере R^* координаты $(-3:0:1)$ прямой $\widetilde{a}$, касательной к линии σ в точке I.

Касательная к линии σ прямая $\widetilde{v}$ проходит через точку $I(0:1:0)$, поэтому в репере R^* ее можно задать уравнением

$$x_3 = tx_1, \; t \in \mathbb{R}. \tag{34}$$

Из условия единственности решения системы, состоящей из уравнения (34) и первого (второго) уравнения в (24), получаем координаты отличной от $\widetilde{a}$ прямой $\widetilde{v}$: $(1:0:1)$.

Применяя координаты прямых $\widetilde{v}$, $\widetilde{a}$, $\widetilde{m}$, $\widetilde{p}$ в репере R^*, непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенства (32).

Для акнодальной кубики теорема доказана полностью. Для крунодальной кубики остается рассмотреть случай, когда I — мнимая точка перегиба линии σ. В этом случае условимся, что I совпадает, например, с точкой I_1 $\left(i\sqrt{3}:1:0\right)$ (см. (26)). Псевдокасательная $\widetilde{m}$, проходящая через точки I_1 и A_3, задана в R^* координатами $\left(1:-i\sqrt{3}:0\right)$. Найдем в репере R^* координаты касательных к σ прямых $\widetilde{a}$ и $\widetilde{v}$.

Выражения из (33) при $\varepsilon = 1$, вычисленные в точке I_1 $\left(i\sqrt{3}:1:0\right)$, определяют координаты $\left(3:-3i\sqrt{3}:2\right)$ прямой $\widetilde{a}$, касательной к линии σ в точке I_1. Проходящую через I_1 прямую $\widetilde{v}$ зададим уравнением

$$tx_1 - i\sqrt{3}\,tx_2 + x_3 = 0, \; t \in \mathbb{C}. \tag{35}$$

Система, состоящая из уравнения (35) и первого уравнения в (24), имеет единственное решение при $t = 3/2; -1/2$. При $t = 3/2$ уравнение (35) определяет прямую $\widetilde{a}$. Значит, прямая $\widetilde{v}$ определена этим уравнением при $t = -1/2$. Таким образом, $\left(-1:i\sqrt{3}:2\right)$ — координаты прямой $\widetilde{v}$.

Записывая в координатах сложное отношение прямых $\widetilde{v}$, $\widetilde{a}$, $\widetilde{m}$, $\widetilde{p}$, приходим к равенству (32). Теорема доказана. $\square$

4. Свойства крунодальных и акнодальных кубик на евклидовой плоскости

Докажем некоторые следствия теорем раздела 3 в евклидовой геометрии. Предварительно сформулируем используемое в дальнейшем свойство системы точек на проективной прямой (см. [5, с. 94]).

Лемма 1. *Если для точек Q, K_1, K_2, H_1, H_2 проективной прямой выполняется условие*

$$(QK_1H_1H_2) = (K_2QH_1H_2)\,,$$

то на этой прямой существует единственная точка T такая, что

$$(TK_1H_1H_2) = (K_2TH_1H_2)\,,$$

а пара точек Q, T гармонически разделяет пары точек K_1, K_2 и H_1, H_2.

Теорема 6. *Пусть на евклидовой плоскости E_2 у кубической кривой с конечной узловой точкой каждая прямая, соединяющая узловую точку с одной из мнимо сопряженных точек перегиба, содержит циклическую точку плоскости E_2. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Величина угла между прямой, соединяющей узловую точку с вещественной точкой перегиба линии σ, и касательной этой линии в узловой точке, равна $\pi/6$.*

2. *Величина угла между касательными линии σ в ее узловой точке, содержащего петлю этой линии, равна $2\pi/3$.*

Доказательство. Пусть линия σ евклидовой плоскости E_2 удовлетворяет условиям теоремы. Узловую точку линии σ обозначим O, вещественную точку перегиба — I, а мнимо сопряженные точки перегиба — I_1, I_2. По условию каждая из прямых OI_1, OI_2 содержит одну из цикличеких точек J_1, J_2 плоскости E_2. Примем для определенности $J_j \in OI_j$, $j = 1, 2$. Касательные кубики σ в точке O обозначим $\widetilde{k}_1$, $\widetilde{k}_2$. Положим также, что $T_j = \widetilde{k}_j \cap I_1I_2$. Тогда для сложных отношений четырех прямых пучка с центром O и четырех точек на прямой точек перегиба линии σ выполняются условия

$$\Big((OJ_1)(OJ_2)(OI)\widetilde{k}_j\Big) = \Big((OI_1)(OI_2)(OI)\widetilde{k}_j\Big) = (I_1I_2IT_j)\,,$$

согласно которым в силу теоремы 4 справедливы равенства

$$\Big((OJ_1)(OJ_2)(OI)\widetilde{k}_j\Big) = \frac{1 + i\varepsilon\sqrt{3}}{2},\ \varepsilon = \pm 1. \tag{36}$$

Мера φ угла между прямыми OI и $\widetilde{k}_j$ в проективной интерпретации евклидовой плоскости определена (см., например, [2], [3], [4], [5]) равенством

$$\varphi = \frac{1}{2}\left|\ln\Big((OI)\widetilde{k}_j(OJ_1)(OJ_2)\Big)\right|, \tag{37}$$

где $f(z) = \ln z$ — логарифмическая функция комплексного аргумента z.

Полагая, что $\varphi \in (0, 2\pi)$, из равенств (36), (37) при $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$) находим $\varphi = \pi/6$ ($\varphi = 5\pi/6$). Выбирая наименьшую из мер смежных углов между прямыми OI и $\widetilde{k}_j$, приходим к первому утверждению теоремы.

Поскольку прямая OI образует с каждой из касательных k_1, k_2 равные углы величиной $\pi/6$, мера содержащего точку I угла между прямыми k_1, k_2 равна $\pi/3$. Но точка перегиба принадлежит тому углу между касательными k_1, k_2, который не содержит петлю линии σ. Значит, величина угла между прямыми k_1, k_2, содержащего петлю линии σ, равна $2\pi/3$. Второе утверждение теоремы доказано.

Теорема доказана. □

Отметим, что крунодальные кубики, удовлетворяющие условиям теоремы 6, могут, в частности, быть циркулярными, т. е. содержать циклические точки плоскости E_2. В качестве примера циркуляных кривых, удовлетворяющих условиям теоремы 6, приведем семейство трисектрис Маклорена (см, например, [8, с. 85], [9, с. 206], [12], [15]).

Теорема 7. *Если на евклидовой плоскости E_2 каждая касательная кубической кривой в ее изолированной точке проходит через циклическую точку плоскости E_2, то величина угла между любыми двумя прямыми, каждая из которых соединяет изолированную точку с точкой перегиба данной кривой, равна $\pi/3$.*

Доказательство. Пусть линия σ евклидовой плоскости E_2 удовлетворяет условиям теоремы. Изолированную точку линии σ обозначим O, а ее вещественные точки перегиба — A, B, C. По условию каждая из касательных прямых $\widetilde{k}_1$, $\widetilde{k}_2$ линии σ в точке O содержит одну из цикличеких точек J_1, J_2 плоскости E_2. Пусть, например, $J_j \in \widetilde{k}_j$, $j = 1, 2$. Положим также, что $T_j = \widetilde{k}_j \cap AB$. Точки перегиба A, B, C линии σ равноправны, поэтому доказательство достаточно провести для любых двух из них. Выберем, например, точки A и B.

Для сложных отношений четырех прямых пучка с центром O и четырех точек на прямой точек перегиба линии σ выполняются условия

$$((OA)(OB)(OJ_1)(OJ_2)) = \Big((OA)(OB)\widetilde{k}_1\widetilde{k}_2\Big) = (ABT_1T_2)\,,$$

согласно которым в силу теоремы 3 справедливы равенства

$$((OA)(OB)(OJ_1)(OJ_2)) = \frac{-1+i\varepsilon\sqrt{3}}{2},\ \varepsilon = \pm 1. \tag{38}$$

Мера φ угла между прямыми OA и OB в проективной интерпретации плоскости E_2 определена равенством

$$\varphi = \frac{1}{2}\left|\ln\left((OA)(OB)(OJ_1)(OJ_2)\right)\right|. \tag{39}$$

Используя выражения (38), (39) и полагая, что $\varphi \in (0, 2\pi)$, при $\varepsilon = 1$ $(\varepsilon = -1)$ получаем $\varphi = \pi/3$ $(\varphi = 2\pi/3)$. Выбирая наименьшую из мер смежных углов между прямыми OA и OB, приходим к утверждению теоремы. □

Теорема 8. *На евклидовой плоскости E_2 для крунодальной (акнодальной) кубики σ с вещественной точкой перегиба I справедливы следующие утверждения.*

1. *Псевдокасательная в точке I разделяет полосу между проходящими через I параллельными касательными к σ в отношении три к одному, считая от касательной к σ в сопряженной с I точке, тогда и только тогда, когда прямая точек перегиба линии σ совпадает с абсолютной прямой плоскости E_2.*

2. *Касательная линии σ в сопряженной с I точке разделяет полосу между взаимно параллельными псевдокасательной в точке I и прямой точек перегиба линии σ в отношении три к одному, считая от псевдокасательной, тогда и только тогда, когда касательная линии σ в точке I совпадает с абсолютной прямой плоскости E_2.*

3. *Прямая точек перегиба линии σ разделяет полосу между проходящими через I параллельными касательными к σ в отношении три к одному, считая от касательной линии σ в точке I, тогда и только тогда, когда псевдокасательная линии σ в точке I совпадает с абсолютной прямой плоскости E_2.*

4. *Касательная линии σ в точке I разделяет полосу между параллельными прямой точек перегиба линии σ и псевдокасательной в точке I в отношении три к одному, считая от прямой точек перегиба, тогда и только тогда, когда касательная линии σ в сопряженной с I точке совпадает с абсолютной прямой плоскости E_2.*

Доказательство. Сохраняя обозначения теоремы 5, касательные крунодальной (акнодальной) кубики σ в вещественной точке перегиба I и в сопряженной с I точке V обозначим соответственно $\widetilde{a}$ и $\widetilde{v}$, прямую точек перегиба линии σ обозначим $\widetilde{p}$, а псевдокасательную, соединяющую точку I с узловой (или соответственно изолированной) точкой O данной линии, — $\widetilde{m}$. Пусть, кроме того, $VO \cap \widetilde{a} = A$ и $VO \cap \widetilde{p} = P$.

Докажем первое утверждение теоремы.

I. Предположим, что прямые $\widetilde{a}$, $\widetilde{v}$ и $\widetilde{m}$ параллельны, и $\widetilde{m}$ разделяет полосу между $\widetilde{a}$ и $\widetilde{v}$ в отношении три к одному, считая от прямой $\widetilde{v}$. Докажем, что прямая $\widetilde{p}$ совпадает с абсолютной прямой l_∞ плоскости E_2.

Поскольку прямые $\widetilde{a}$, $\widetilde{v}$ и $\widetilde{m}$ параллельны, их общая точка I принадлежит прямой l_∞, а для заключенных между данными прямыми отрезков $[VO]$ и $[OA]$ выполняется равенство $|VO| : |OA| = 3 : 1$, согласно которому справедливо условие $(VA, O) = 3$.

Пусть L_∞ — бесконечно удаленная точка прямой VO, т. е. $L_\infty = VO \cap l_\infty$. Тогда простое отношение трех точек (VA, O) и сложное отношение четырех точек $(VQOL_\infty)$ связаны равенством $(VAOL_\infty) = -(VA, O)$ (см., например, [1, §22]). Поскольку $(VAOL_\infty) = (\widetilde{v}\widetilde{a}\widetilde{m}l_\infty)$, получаем

$$(\widetilde{v}\widetilde{a}\widetilde{m}l_\infty) = -3. \tag{40}$$

Но согласно теореме 5 для прямых $\widetilde{a}$, $\widetilde{v}$, $\widetilde{m}$ и $\widetilde{p}$ выполняется условие (32). На основании равенств (32) и (40) прямые $\widetilde{p}$ и l_∞ совпадают. Что и требовалось доказать.

II. Обратно. Предположим, что прямая $\widetilde{p}$ точек перегиба линии σ совпадает с абсолютной прямой l_∞, и докажем, что прямые $\widetilde{a}$, $\widetilde{v}$ и $\widetilde{m}$ параллельны, причем псевдокасательная $\widetilde{m}$ разделяет полосу между касательными $\widetilde{a}$ и $\widetilde{v}$ линии σ в отношении три к одному, считая от прямой $\widetilde{v}$.

Поскольку общая точка I прямых $\widetilde{a}$, $\widetilde{v}$ и $\widetilde{m}$ принадлежит прямой $\widetilde{p}$ и $\widetilde{p} = l_\infty$, прямые $\widetilde{a}$, $\widetilde{v}$ и $\widetilde{m}$ параллельны. Руководствуясь теоремой 5, получаем $(\widetilde{v}\widetilde{a}\widetilde{m}l_\infty) = (\widetilde{v}\widetilde{a}\widetilde{m}\widetilde{p}) = -3$. Учитывая, что при этом $(VA, O) = -(VAOL_\infty)$ и $(VAOL_\infty) = (\widetilde{v}\widetilde{a}\widetilde{m}l_\infty)$, приходим к равенству $(VA, O) = 3$, согласно которому для отрезков $[VO]$ и $[OA]$, заключенных между параллельными прямыми $\widetilde{a}$, $\widetilde{v}$ и $\widetilde{m}$, выполняется равенство $|VO| : |OA| = 3 : 1$. Следовательно, прямая $\widetilde{m}$ разделяет полосу между параллельными прямыми $\widetilde{a}$ и $\widetilde{v}$ в отношении три к одному. Первое утверждение теоремы доказано.

Применяя к равенству (32) свойства сложного отношения четырех прямых пучка, найдем следующие отношения:

$$(\widetilde{m}\widetilde{p}\widetilde{v}\widetilde{a}) = -3, \qquad (\widetilde{a}\widetilde{v}\widetilde{p}\widetilde{m}) = -3, \qquad (\widetilde{p}\widetilde{m}\widetilde{a}\widetilde{v}) = -3. \tag{41}$$

Принимая за основу первое, второе или третье равенство из (41) и заменяя должным образом в доказательстве первого утверждения теоремы порядок следования рассматриваемых прямых, придем ко второму, третьему или соответственно четвертому утверждению теоремы.

Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. В 2 ч. Ч. 2. — М. : Просвещение, 1987. 352 с.

2. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. М. ; Л. : ОНТИ НКТП СССР, 1936. 356 с.

3. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М. : Наука, 1969. 548 с.

4. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4-х ч. Ч. 1 : Тригонометрия. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. 244 с.

   https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25909102

5. Ромакина Л. Н. Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей. — Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2008. 279 с.

   https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19457426

6. Ромакина Л. Н., Котова Н. В. Исследование замечательных кривых псевдоевклидовой плоскости в системе подготовки учителей математики // Учитель – ученик : проблемы, поиски, находки : сб. науч.-метод. тр. Саратов : ИЦ «Наука», 2010. Вып. 8. С. 61–64.

   https://textarchive.ru/c-1447426-p8.html

7. Ромакина Л. Н. Отношения для точек перегиба кубической кривой с узловой или изолированной точкой // Материалы XVII Междунар. конф., посв. столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина : Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия : современные проблемы, приложения и проблемы истории, Тульский гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2020. С. 427–429.

   https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44367989

8. Савелов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство). — М. : Физматгиз, 1960. 294 с.

9. Смогоржевский А. С., Столова Е. С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. М. : Физматгиз, 1961. 263 с.

10. Уокер Р. Алгебраические кривые. — М. : ИИЛ, 1952. 236 с.

11. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии // УМН, 1969. Т. 24, вып. 6(150). С. 3–184.

    https://doi.org/10.1070/RM1969v024n06ABEH001361

12. Lawrence J. D. A Catalog of Special Plane Curves. Dover, New York, 2014.

13. Romakina L. N., Bessonov L.V., Chernyshkova A.A. Modeling of curls of Agnesi in non-Euclidean planes // AIP Conference Proceedings. American Institute of Physics. 2018. Vol 2037. P. 020022-1 – 020022-6.

    https://doi.org/10.1063/1.5078477

14. Romakina L. N. Construction of cubic curves with a node // Beitr Algebra Geom. 2019. Vol 60, № 4. P. 761-781.

    https://doi.org/10.1007/s13366-019-00449-8

    https://rdcu.be/buOiI

15. Weisstein E. W. Maclaurin Trisectrix. MathWorld—a wolfram web resource.

    http://mathworld.wolfram.com/MaclaurinTrisectrix.html

REFERENCES

1. Atanasyan L. S., Bazylev V. T. Geometry. Textbook for students of physical and mathematical faculties of pedagogical institutes. In 2 p. P. 2. — M. : Education, 1987. 352 p.

2. Klein F. Non-Euclidean geometry. M. ; L. : ONTI NKTP USSR, 1936. 356 p.

3. Rosenfeld B. A. Non-Euclidean spaces. M. : Science, 1969. 548 p.

4. Romakina L. N. Geometry of a hyperbolic plane of positive curvature : in 4 party. P. 1 : Trigonometry. Saratov : Publishing House Sarat. university, 2013. 244 p.

5. Romakina L. N. Geometry of co-Euclidean and copseudo-Euclidean planes. — Saratov : Publishing house «Scientific book», 2008. 279 p.

6. Romakina L. N. The study of remarkable curves of the pseudo-Euclidean plane in the system of training teachers of mathematics // Teacher – student : problems, searches, finds : Collection of scientific papers. Saratov : IC «Science», 2010. Issue. 8. P. 61–64.

7. Romakina L. N. Rations for the inflection points of a cubic curve with a node or acnode // Proceedings of the XVII Intern. conf., dedicated centenary of the birth of professors B. M. Bredikhin, V. I. Nechaev and S. B. Stechkin : Algebra, number theory and discrete geometry : modern problems, applications and problems of history, Tula state. ped. univ. of L. N. Tolstoy, 2020. P. 427–429.

8. Savelov A. A. Plane curves. Systematics, properties, applications (reference guide). — M. : State publishing house of physical and mathematical literature, 1960. 294 p.

9. Smogorgevsky A. S., Stolova E. S. Handbook of third order plane curve theory. M. : State publishing house of physical and mathematical literature, 1961. 263 p.

10. Walker R. Algebraic curves. — M. : Foreign Languages Publishing House, 1952. 236 p.

11. Shafarevich I.R. Foundations of algebraic geometry // Uspekhi Mat. Nauk, 1969. V. 24, issue 6(150). P. 3–184.

12. Lawrence J. D. A Catalog of Special Plane Curves. Dover, New York, 2014.

13. Romakina L. N., Bessonov L.V., Chernyshkova A.A. Modeling of curls of Agnesi in non-Euclidean planes // AIP Conference Proceedings. American Institute of Physics. 2018. Vol 2037. P. 020022-1 – 020022-6.

14. Romakina L. N. Construction of cubic curves with a node // Beitr Algebra Geom. 2019. Vol 60, № 4. P. 761-781.

15. Weisstein E. W. Maclaurin Trisectrix. MathWorld—a wolfram web resource. http://mathworld.wolfram.com/MaclaurinTrisectrix.html

Получено: 27.10.2022
Принято в печать: 12.09.2023