

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 3.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-95-121

Интерполяция для системы концентрических сеток¹

А. В. Родионов, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Родионов Александр Валерьевич — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе дается обзор по результатам Тульской школы теории чисел по вопросам интерполяции периодических функций многих переменных, заданных в узлах обобщенной параллелепипедальной сетки целочисленной решетки, и по алгоритмам численного интегрирования с правилом остановки. Необходимые факты и обозначения приводятся во 2 разделе, который состоит из 6 подразделов: 2.1. Из геометрии чисел; 2.2. Тригонометрические суммы сеток и решёток; 2.3. Неравенства для перенормировок на пространстве E_s^α ; 2.4. Интерполяционные формулы для обобщенной параллелепипедальной сетки целочисленной решётки; 2.5. Свойства оператора интерполирования; 2.6. Оценки погрешности интерполирования. В этих подразделах наряду с известными фактами и определениями, полученными ранее в Тульской школе теории чисел, содержатся новые понятия и факты связанные с интерполированием по сдвинутым параллелепипедальным сеткам.

В следующем разделе 3. Алгоритмы приближенного интегрирования и интерполирования с правилом остановки содержит новые определения, связанные с переносом понятия концентрический алгоритм приближенного интегрирования на случай мультипликативно-го, концентрического алгоритма приближенного интерполирования.

В работе исследуются новые вопросы приближенного интерполирования с правилами остановки. В 4-ом разделе рассмотрен наиболее важный и интересный для практической реализации случай вложенных последовательностей параллелепипедальных сеток. Получена оценка нормы разности двух операторов интерполирования по решётке и подрешётке, что позволило в качестве правила остановки концентрического алгоритма приближенного интерполирования периодических функций взять величину максимума модуля разности этих операторов на точках большей параллелепипедальной сетки.

В заключении формулируются задача для дальнейшего исследования.

Ключевые слова: абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов.

Библиография: 18 названий.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение №073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г. тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

Для цитирования:

А. В. Родионов, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Интерполяция для системы концентрических сеток // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 3, С. 95–121.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 3.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-95-121

Interpolation for a system of concentric grids²

A. V. Rodionov, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Rodionov Alexander Valerievich — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: rodionovalexandr@mail.ru***Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich** — candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical Centre of RAS (Moscow).*e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru***Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich** — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com***Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: dobrovol@tspu.ru***Abstract**

The paper provides an overview of the results of the Tula School of Number Theory on the following issues interpolation of periodic functions of many variables defined in the nodes of a generalized parallelepipedal grid of an integer lattice, and by numerical integration algorithms with a stopping rule.

The necessary facts and notations are given in Section 2, which consists of 6 subsections: 2.1. From the geometry of numbers; 2.2. Trigonometric sums of grids and lattices; 2.3. Inequalities for renormalization on the space E_s^α ; 2.4. Interpolation formulas for the generalized parallelepipedal grid of an integer lattice; 2.5. Properties of the interpolation operator; 2.6. Estimates of the interpolation error. These subsections, along with the known facts and definitions obtained earlier at the Tula School of Number Theory, contain new concepts and facts related to interpolation on shifted parallelepipedal grids.

The following section 3. Algorithms of approximate integration and interpolation with the stopping rule contains new definitions related to the transfer of the concept of a concentric algorithm of approximate integration to the case of a multiplicative, concentric algorithm of approximate interpolation.

The paper investigates new issues of approximate interpolation with stopping rules. In the 4th section, the most important and interesting case of nested sequences of parallelepipedal grids is considered for practical implementation. An estimate of the norm of the difference between two interpolation operators on a lattice and a sublattice was obtained, which made it possible to take the maximum of the modulus of the difference of these operators at the points of a larger parallelepipedal grid as the stopping rule of the concentric algorithm for approximate interpolation of periodic functions.

²The study was carried out within the framework of state task No. 073-03-2022-117/7 on the topic "Number-theoretic methods in approximate analysis and their applications in mechanics and physics".

In conclusion, the task for further research is formulated.

Keywords: the minimum polynomial of the given algebraic irrationality, residual fractions, continued fractions, TDP-shape, the modules Tue, couple Tue, linear-fractional transformation of the second kind.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

A. V. Rodionov, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2023, "Interpolation for a system of concentric grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 95–121.

1. Введение

В работе [11] были изучены аналоги Фурье интерполяции для случая, когда периодическая функция многих переменных задана в узлах обобщенной параллелепипедальной сетки целочисленной решетки. Была построена теория интерполирования функций многих переменных для случая узлов интерполяции, образующих обобщенную параллелепипедальную сетку целочисленной решетки.

В работе [6] было изучено распределение значений погрешности приближенного интегрирования при модификациях сеток и применено это распределение для произведения некоторых типов сеток. В частности, были рассмотрены такие новые понятия как: алгоритмы приближенного интегрирования с правилом остановки; концентрический алгоритм приближенного интегрирования; линейный оператор $A_{M,\vec{p}}$ взвешенных сеточных средних на пространстве периодических функций E_s^α .

Цель данной работы перенести указанные понятия на теорию интерполирования функций многих переменных для случая узлов интерполяции, образующих обобщенную параллелепипедальную сетку целочисленной решетки, и рассмотреть концентрические алгоритмы приближенного интерполирования по обобщенным параллелепипедальным сеткам целочисленных решёток.

2. Обозначения и необходимые факты

В данном разделе приведены без доказательства необходимые факты из работ [11] и [6].

2.1. Из геометрии чисел

Под сеткой мы понимаем произвольное непустое конечное множество M из G_s , где $G_s = [0; 1)^s$ — полукоткрытый единичный s -мерный куб. Предварительно напомним некоторые определения и обозначения.

Пусть Λ — произвольная целочисленная решетка в $\mathbb{R}^s$, т.е. Λ — подрешетка фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$. Другими словами $\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \dots + m_s\vec{\lambda}_s | m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}\}$ и $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ — линейно независимая система целочисленных векторов. С алгебраической точки зрения все решетки как бесконечные абелевы группы с s образующими изоморфны $\mathbb{Z}^s$.

Параллелепипед $\Pi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) = \{\alpha_1\vec{\lambda}_1 + \dots + \alpha_s\vec{\lambda}_s | 0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_s < 1\}$ — фундаментальный параллелепипед решетки, объем которого обозначается через $\det \Lambda$, называется детерминантом, или определителем, решётки и является ее инвариантом, не зависящим от выбора базиса решётки.

Усеченной нормой называется величина $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_s$, где для вещественного x обозначаем $\bar{x} = \max(1, |x|)$. Гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решётки Λ определяется равенством

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x} \in \Lambda, \vec{x} \neq \vec{0}} q(\vec{x}).$$

Он имеет простой геометрический смысл: гиперболический крест $K(T)$ не содержит ненулевых точек решётки Λ при $T < q(\Lambda)$.

Гиперболическим крестом называется область

$$K(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T\},$$

а величина T — его параметром.

Назовем r -й компонентой гиперболического креста $K(T)$ подмножество

$$K_r(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T, \text{ ровно } r \text{ координат } \vec{x} \text{ отличны от } 0\}.$$

Ясно, что справедливо следующее разбиение гиперболического креста:

$$K(T) = \left(\bigcup_{r=1}^s K_r(T) \right) \cup \{\vec{0}\}.$$

Для решётки Λ рассмотрим ее взаимную решётку Λ^* . По определению взаимная решётка $\Lambda^* = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^s \mid \forall \vec{y} \in \Lambda \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Отсюда следует, что для любой решётки Λ справедливы равенства $(\Lambda^*)^* = \Lambda$, $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$. Нетрудно видеть, что фундаментальная решётка $\mathbb{Z}^s$ совпадает со своей взаимной решёткой и является подрешёткой взаимной решётки любой целочисленной решётки. Кроме того, если $\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^s$, то $\mathbb{Z}^s \subset \Lambda^* \subset \Lambda_1^*$. Для любого $C \neq 0$ $(C\Lambda)^* = \Lambda^*/C$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Ясно, что если $\Lambda_1 \subset \Lambda$, то $M(\Lambda) \subset M(\Lambda_1)$.

Если $M \subset \Lambda$ — подрешётка решётки Λ , то величина $D = \det M / \det \Lambda$ называется индексом подрешётки M решётки Λ . Два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ решётки Λ сравнимы по подрешётке M (находятся в одном классе относительно подрешётки M), если $\vec{x} - \vec{y} \in M$. В этом случае пишем $\vec{x} \equiv \vec{y} \pmod{M}$. Индекс D подрешётки M решётки Λ равен числу классов решётки Λ относительно M . Произвольное множество векторов решётки Λ по одному из каждого класса относительно подрешётки M называется полной системой вычетов решётки Λ относительно M . Каждая полная система вычетов решётки Λ относительно M имеет естественную структуру конечной абелевой группы, изоморфной Λ/M .

Отсюда следует, что для любой целочисленной решётки Λ обобщенная параллелепипедальная сетка $M(\Lambda)$ является полной системой вычетов взаимной решётки Λ^* относительно фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$, т.е. $M(\Lambda) = \Lambda^*/\mathbb{Z}^s$. Таким образом, на обобщенной параллелепипедальной сетке целочисленной решётки определена естественная операция сложения, относительно которой она является конечной абелевой группой.

Обычно, полную систему вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решётки Λ будем обозначать через $M^*(\Lambda)$, хотя она определена неоднозначно. Ниже будут сформулированы дополнительные условия для выбора $M^*(\Lambda)$.

В одномерном случае любая целочисленная решётка имеет вид $p\mathbb{Z}$ и множество чисел $\{-p_1, \dots, 0, \dots, p_2\}$, $p_1 = \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor$, $p_2 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ является наименьшей абсолютной полной системой вычетов одномерной фундаментальной решётки $\mathbb{Z}$ по подрешётке $p\mathbb{Z}$. Дадим многомерный аналог этому понятию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Полную систему вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решётки Λ назовем минимальной гиперболической полной системой вычетов, если минимальный гиперболический крест, содержащий эту полную систему вычетов, имеет минимальное значение своего параметра для всех полных систем вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решётки Λ .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Полную систему вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решётки Λ , состоящую из представителей классов вычетов с наименьшей усеченной нормой среди всех элементов класса вычетов, назовем абсолютно минимальной гиперболической полной системой вычетов.

Такую полную систему вычетов будем обозначать через $M_H^*(\Lambda)$. Вообще говоря, полная система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ определена неоднозначно. Это видно на примере решётки $N\mathbb{Z}^s$ при четном N . Действительно, $N_2 \equiv -N_2 \pmod{N}$. Уже в одномерном случае две полные системы вычетов $\{-N_1, \dots, 0, \dots, N_2\}$ и $\{-N_2, \dots, 0, \dots, N_1\}$ удовлетворяют определению 3. В s -мерном случае таких систем будет 2^s . Для однозначности выбора $M_H^*(\Lambda)$ можно еще ввести лексикографический линейный порядок на $\mathbb{Z}^s$. Тогда из нескольких возможных элементов с одинаковым значением усеченной нормы выберем наименьший в смысле лексикографического упорядочивания. Тем самым $M_H^*(\Lambda)$ будет определено однозначно.

ЛЕММА 1. Для любой целочисленной решётки Λ и подрешетки Λ_1 справедливо вложение

$$M_H^*(\Lambda) \subset M_H^*(\Lambda_1). \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11]. $\square$

Из доказательства леммы 1 следует, что если $M_H^*(\Lambda) = \{\vec{m}_1, \dots, \vec{m}_N\}$, то для абсолютно минимальной гиперболической полной системой вычетов $M_H^*(\Lambda_1)$ справедливо равенство

$$M_H^*(\Lambda_1) = \bigcup_{j=1}^N \{\vec{m}_j, \vec{m}_{j,1}, \dots, \vec{m}_{j,N_1-1}; \quad \vec{m}_j \equiv \vec{m}_{j,\nu} \pmod{\Lambda} \ (\nu = 1, \dots, N_1 - 1)\}, \quad (2)$$

где $N_1 = \frac{\det \Lambda_1}{\det \Lambda}$. Из этого представления следует, что с каждым вычетом $\vec{m}_j$ из $M_H^*(\Lambda)$ можно связать множество $R_{\Lambda, \Lambda_1}(\vec{m}_j) \subset \Lambda$, заданное равенством

$$R_{\Lambda, \Lambda_1}(\vec{m}_j) = \{\vec{m}_{j,\nu} - \vec{m}_j | \nu = 1, \dots, N_1 - 1\}.$$

Так как все $\vec{m}_{j,\nu}$ являются представителями различных классов вычетов по подрешётке Λ_1 , то элементы из $R_{\Lambda, \Lambda_1}(\vec{m}_j)$ не принадлежат решётке Λ_1 .

Для произвольной целочисленной решётки Λ определим второй и третий гиперболические параметры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Вторым гиперболическим параметром целочисленной решётки Λ называется наименьшее натуральное число $q_2(\Lambda)$, такое, что гиперболический крест $K(q_2(\Lambda))$ содержит полную систему вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решётки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Третьим гиперболическим параметром целочисленной решётки Λ называется наибольшее натуральное число $q_3(\Lambda)$, такое, что все целые точки гиперболического креста $K(q_3(\Lambda))$ содержатся в полной системе вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решётки Λ . Другими словами все целые точки этого креста не сравнимы по модулю Λ .

Пусть $N = \det \Lambda$. Множество всех целых точек принадлежащих гиперболическому кресту $K(T)$ обозначим через $K_Z(T)$.

Так как $|K_Z(1)| = 3^s$, то для любого $N \geq 3^s$ определим функцию $T_s(N)$ из условий $|K_Z(T_s(N))| \leq N$, $|K_Z(T_s(N) + 1)| > N$. Ясно, что

$$q_3(\Lambda) \leq T_s(N) \leq q_2(\Lambda). \quad (3)$$

Из (3) следует, что при $N < 3^s$ надо полагать $q_3(\Lambda) = 0$, так как минимальный крест $K(1)$ содержит больше элементов, чем полная система вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ , состоящая из N элементов.

В работе [7] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *При $N > e^{s \cdot e}$ справедливы неравенства:*

$$\begin{aligned} \frac{(s-1)!(N-1)}{2^s \left(\ln N + \frac{3s}{2}\right)^{s-1}} &\leq T_s(N) \leq \\ &\leq \frac{(s-1)!N}{2^s (\ln N + \ln((s-1)!) - s \ln 2 - (s-1) \ln(\ln N))^{s-1}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из определений 4 и 5 сразу следует, что

$$q_3(\Lambda) < q(\Lambda), \quad q_3(\Lambda) \leq q_2(\Lambda).$$

Общие нетривиальные соотношения между этими тремя гиперболическими параметрами, по-видимому, установить непросто. Априори даже неясно, всегда ли существует полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ такая, что выполнены соотношения

$$K(q_3(\Lambda)) \subset M^*(\Lambda) \subset K(q_2(\Lambda)) ? \quad (5)$$

Рассмотрим для примера случай решётки $\Lambda = N\mathbb{Z}^s$. Очевидно, что

$$M(N\mathbb{Z}^s) = \left\{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\right\}^s, \quad |M(N\mathbb{Z}^s)| = \det(N\mathbb{Z}^s) = N^s. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что в качестве минимальной гиперболической полной системы вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки $N\mathbb{Z}^s$ можно взять

$$M^*(N\mathbb{Z}^s) = \{-N_1, \dots, N_2\}^s. \quad (7)$$

Отсюда следует, что

$$q(\Lambda) = N, \quad q_2(\Lambda) = N_2^s \leq \frac{\det N\mathbb{Z}^s}{2^s} \quad \text{и} \quad q_3(\Lambda) = N_1. \quad (8)$$

ЛЕММА 2. *Для любой целочисленной решётки Λ найдется минимальная гиперболическая полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ такая, что выполнены соотношения (5).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11]. $\square$

ЛЕММА 3. *Абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ удовлетворяет соотношению (5).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11]. $\square$

Введем для произвольного вектора $\vec{x}$ понятие его индекса – количество ненулевых координат. Обозначим эту величину через $r(\vec{x})$. Таким образом наименьший индекс у нулевого вектора: $r(\vec{0}) = 0$, а максимальное значение индекса равно s . Для целого вектора $\vec{m}$ рассмотрим его индекс по модулю 2, т.е. количество его нечетных координат, которое обозначим через $r_2(\vec{m})$.

ЛЕММА 4. Если для целочисленной решётки Λ вектор $\vec{m} \neq \vec{0}$ и имеет минимальное значение усеченной нормы ($q(\vec{m}) = q(\Lambda)$), то для третьего гиперболического параметра решётки Λ справедлива оценка сверху:

$$q_3(\Lambda) \leq \frac{q(\Lambda)}{2^{r(\vec{m})-r_2(\vec{m})}}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11]. $\square$

Обозначим через J_s множество всех целочисленных векторов $\vec{j}_s$, каждый из которых имеет координаты, образующие перестановку чисел $1, 2, \dots, s$.

ЛЕММА 5. Пусть для заданного $\vec{j}_s \in J_s$ вектора $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,s}), \dots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s,1}, \dots, \lambda_{s,s})$ целочисленной решётки Λ определены из условий:

$$\lambda_{1,j_1} = \min_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} |x_{j_1}|, \quad (10)$$

$$\lambda_{\nu,1} = \dots = \lambda_{\nu,j_{\nu-1}} = 0, \quad \lambda_{\nu,j_{\nu}} = \min_{\vec{x} \in \Lambda^{(\nu)} \setminus \{\vec{0}\}} |x_{j_{\nu}}| \quad (\nu = 2, \dots, s), \quad (11)$$

где $\Lambda^{(\nu)} = \{\vec{x} \in \Lambda \mid x_{j_1} = \dots = x_{j_{\nu-1}} = 0\}$, тогда они образуют базис решётки Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11]. $\square$

Пусть числа $N_1(\vec{j}_s), \dots, N_s(\vec{j}_s)$ определены равенствами:

$$N_{\nu}(\vec{j}_s) = \lambda_{\nu,j_{\nu}} \quad (\nu = 1, \dots, s).$$

Заметим, что из доказательства леммы следует равенство

$$\det \Lambda = N_1(\vec{j}_s) \dots N_s(\vec{j}_s).$$

ТЕОРЕМА 2. Для любой целочисленной решётки Λ второй гиперболический параметр решётки удовлетворяет соотношению:

$$q_2(\Lambda) \leq \min_{\vec{j}_s \in J_s} \left[\frac{N_1(\vec{j}_s)}{2} \right] \dots \left[\frac{N_s(\vec{j}_s)}{2} \right]. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11]. $\square$

2.2. Тригонометрические суммы сеток и решёток

При изучении вопросов приближенного интегрирования и интерполирования периодических функций многих переменных естественным образом возникают тригонометрические суммы. Приведем несколько необходимых определений и результатов из работ [9] и [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Тригонометрической суммой сетки M и произвольного целочисленного вектора $\vec{m}$ называется величина

$$S(\vec{m}, M) = \sum_{\vec{x} \in M} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}.$$

Рассмотрим для произвольной целочисленной решётки Λ , целого вектора $\vec{m}$ и произвольного вектора $\vec{x}$ из взаимной решётки Λ^* величины:

$$\delta_{\Lambda}(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{m} \in \Lambda, \\ 0, & \text{если } \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda, \end{cases} \quad \delta_{\Lambda}^*(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{x} \in \mathbb{Z}^s, \\ 0, & \text{если } \vec{x} \in \Lambda^* \setminus \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

Символ $\delta_{\Lambda}(\vec{m})$ является многомерным обобщением известного теоретико-числового символа

$$\delta_N(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Полной линейной кратной тригонометрической суммой целочисленной решётки Λ будем называть выражение

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \sum_{\vec{x} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{\vec{x} \in \Lambda^* / \mathbb{Z}^s} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

где $\vec{m}$ — произвольный целочисленный вектор.

Ясно, что для обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ справедливо равенство $S(\vec{m}, M(\Lambda)) = s(\vec{m}, \Lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Полной линейной кратной тригонометрической суммой взаимной решётки Λ^* целочисленной решётки Λ будем называть выражение

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s / \Lambda} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i(\vec{m}_j, \vec{x})},$$

где $\vec{x}$ — произвольный вектор взаимной решётки Λ^* и $\vec{m}_0, \dots, \vec{m}_{N-1}$ — полная система вычетов решётки $\mathbb{Z}^s$ по подрешётке Λ .

Справедливы следующие двойственные утверждения.

ТЕОРЕМА 3. Для $s(\vec{m}, \Lambda)$ справедливо равенство

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \delta_\Lambda(\vec{m}) \cdot \det \Lambda.$$

ТЕОРЕМА 4. Для любой целочисленной решетки Λ с $\det \Lambda = N$ и для произвольного $\vec{x} \in \Lambda^*$ справедливо равенство

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \delta_\Lambda^*(\vec{x}) \cdot \det \Lambda.$$

2.3. Неравенства для перенормировок на пространстве E_s^α

Так как переход к произвольной периодической функции многих переменных, заданной на прямоугольном s -мерном параллелепипеде $\prod_{j=1}^s [a_j, b_j]$, с периодом $b_j - a_j$ по каждой переменной x_j ($1 \leq j \leq s$), делается с помощью простой линейной замены переменных, то дальше для простоты изложения будет рассматриваться только случай единичного s -мерного куба и класса периодических функций E_s^α , у которых для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$c(\vec{m}) = O\left(\frac{1}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}\right).$$

Класс периодических функций E_s^α относительно нормы

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |c(\vec{m})(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha| \quad (13)$$

является несепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_0 — всех ограниченных последовательностей комплексных чисел.

Наряду с нормой (13) рассмотрим нормы

$$\|f(\vec{x})\|_C = \sup_{\vec{x} \in G_s} |f(\vec{x})| \quad (14)$$

и

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} = \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} |c(\vec{m})|, \quad \|f(\vec{x})\|_{l_2} = \left(\sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} |c(\vec{m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Относительно норм (14) и (15) класс E_s^α становится незамкнутым линейным подмножеством пространств непрерывных периодических функций и периодических функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье соответственно (см. [12]).

Нетрудно видеть, что справедливы следующие неравенства:

$$\|f(\vec{x})\|_{l_2} \leq \|f(\vec{x})\|_C, \quad \|f(\vec{x})\|_C \leq \|f(\vec{x})\|_{l_1}, \quad \|f(\vec{x})\|_{l_1} \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(\alpha))^s. \quad (16)$$

Последнее неравенство (16) можно уточнить при дополнительном ограничении, что $c(\vec{m}) = 0$ при $\vec{m} \in K(t)$. Предварительно сформулируем несколько лемм из работы [7].

Для натурального $t > 1$ положим, что

$$A_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j > t} \frac{1}{(m_1 \dots m_j)^\alpha} \quad (\alpha > 1), \quad (17)$$

$$B_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j \leq t} 1, \quad C_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j \leq t} \frac{1}{m_1 \dots m_j}, \quad (18)$$

суммирование проводится только по натуральным $m_1, \dots, m_j$.

Так как t – натуральное, то

$$A_1(t) = \sum_{m > t} \frac{1}{m^\alpha} < \int_t^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha - 1)t^{\alpha-1}}, \quad B_1(t) = t, \quad C_1(t) \leq \ln t + 1. \quad (19)$$

ЛЕММА 6. *Справедливо неравенство*

$$C_j(t) \leq \sum_{k=0}^j \frac{C_j^k \ln^k t}{k!}. \quad (20)$$

ЛЕММА 7. *Справедливо неравенство*

$$B_j(t) \leq t \sum_{k=0}^{j-1} \frac{C_{j-1}^k \ln^k t}{k!}. \quad (21)$$

ЛЕММА 8. *Справедливо неравенство*

$$A_j(t) \leq \frac{1}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{\ln^{j-1} t}{(\alpha-1)(j-1)!} + \sum_{m=0}^{j-2} \frac{\ln^m t}{m!} \left(\sum_{k=m}^{j-2} \zeta(\alpha)^{j-2-k} C_k^m \frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1} + \frac{C_{j-1}^m}{\alpha-1} \right) \right). \quad (22)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть натуральное $t > 1$ и разложение периодической функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ имеет вид:

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \notin K(t)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (23)$$

Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x})\|_{l_1} &\leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!(\alpha-1)} + \right. \\ &\left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m t}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^s C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^s C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Доказательство. См. [11]. $\square$

Рассмотрим для любого натурального t конечномерное подпространство $P^{(t)}$ всех тригонометрических полиномов вида:

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K(t)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (25)$$

Тригонометрический полином

$$f_0(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K(t)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (26)$$

очевидно, имеет следующие нормы:

$$\begin{aligned} \|f_0(\vec{x})\|_{l_0} &= \sup_{\vec{m} \in |K(t)|} |c(\vec{m})| = 1, \quad \|f_0(\vec{x})\|_C = |K_Z(t)|, \\ \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} &= |K_Z(t)|, \quad \|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = t^\alpha. \end{aligned} \quad (27)$$

В работе [7] доказаны следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 6. *Справедливо неравенство*

$$|K_Z(t)| \leq \frac{2^s}{(s-1)!} t \left(\ln t + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1. \quad (28)$$

ТЕОРЕМА 7. *Справедливо неравенство*

$$|K_Z(t)| \geq t \frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!} + t(1 - (-1)^s) + (-1)^s. \quad (29)$$

Из теоремы 6 и равенств (27) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|f_0(\vec{x})\|_{l_0} &= \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^\alpha}, \\ \|f_0(\vec{x})\|_C = \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} &\leq \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s}{(s-1)!} \left(\ln t + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1 \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Из оценки снизу (29) и равенства (27) следует оценка снизу для норм:

$$\|f_0(\vec{x})\|_C = \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} \geq \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s}{(s-1)!} \ln^{s-1} t + 1 + (-1)^{s-1} + \frac{(-1)^s}{t} \right). \quad (31)$$

Таким образом, оценка сверху (30) и оценка снизу (31) совпадают по порядку относительно t .

2.4. Интерполяционные формулы для обобщенной параллелепипедальной сетки целочисленной решётки

Теорема 4 позволяет доказать, что произвольную функцию $f(\vec{x})$ на обобщенной параллелепипедальной сетке $M(\Lambda)$ целочисленной решётки Λ с $\det \Lambda = N$ можно разложить в конечный ряд Фурье.

ТЕОРЕМА 8. *Для любой функции $f(\vec{x})$ на $M(\Lambda)$ справедливо равенство*

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{m}_j)},$$

где

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [12]. $\square$

Из этой теоремы сразу следует, что если известны значения периодической функции $f(\vec{x})$ в узлах обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ целочисленной решётки Λ и выбрана произвольная полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ решётки $\mathbb{Z}^s$ по подрешётке Λ , то следующий тригонометрический полином

$$S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (32)$$

где

$$c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}), \quad (33)$$

является интерполяционным для функции $f(\vec{x})$.

В другом контексте конечный ряд Фурье и интерполяционные формулы по обобщенной параллелепипедальной сетке целочисленной решётки встречаются в работе В. А. Быковско-го [3]. Впервые многомерные конечные ряды Фурье для равномерной сетки встречаются в работах Н. М. Коробова [16].

Тригонометрический полином (32) зависит от полной системы вычетов $M^*(\Lambda)$ решётки $\mathbb{Z}^s$ по подрешётке Λ . Возникает вопрос о том, как оптимально выбирать $M^*(\Lambda)$, чтобы погрешность интерполирования была наименьшей. Ответ на этот вопрос зависит от класса функций, для которого рассматривается данная задача. Мы остановимся на классе E_s^α .

Рассмотрим сначала решётку $N\mathbb{Z}^s$. Как известно, для любой целочисленной решётки Λ с $\det \Lambda = N$ справедливо включение: $N\mathbb{Z}^s \subset \Lambda$. В следующей теореме будем использовать обозначения (6) и (7).

ТЕОРЕМА 9. Для любой периодической функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ и интерполяционного полинома $S_{M(N\mathbb{Z}^s), M^*(N\mathbb{Z}^s)}(\vec{x})$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & |c(\vec{m}) - c_{M(N\mathbb{Z}^s), M^*(N\mathbb{Z}^s)}(\vec{m})| \leq \\ & \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \left(1 + \frac{2^\alpha + 2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}\right)^{s-1} \frac{s(2^\alpha + 2\zeta(\alpha))}{N^\alpha}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\|f(\vec{x}) - S_{M(N\mathbb{Z}^s), M^*(N\mathbb{Z}^s)}(\vec{x})\|_C \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \frac{4s\alpha(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1}2^\alpha}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}}. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11]. $\square$

Обозначим через $M(\Lambda, \vec{x})$ сдвинутую обобщенную параллелепипедальную сетку, которая задается равенством

$$M(\Lambda, \vec{x}) = \{\{\vec{y} + \vec{x}\} | \vec{y} \in M(\Lambda)\}.$$

Докажем аналог теоремы 8 для случая сдвинутой обобщенной параллелепипедальной сетки.

ТЕОРЕМА 10. Для любой функции $f(\vec{z})$ на $M(\Lambda, \vec{x})$ справедливо равенство

$$f(\vec{z}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m}_j)},$$

где

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda, \vec{x})} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)} = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{n} + \vec{m}_j) e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{n})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\vec{z} \in M(\Lambda, \vec{x})$, то $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}_0$, где $\vec{y}_0 \in M(\Lambda)$, и имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m}_j)} &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda, \vec{x})} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)} \right) e^{2\pi i((\vec{x} + \vec{y}_0), \vec{m}_j)} = \\ &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i((\vec{x} + \vec{y}_0 - \vec{x} - \vec{y}), \vec{m}_j)} \right). \end{aligned}$$

По теореме 4 имеем:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i((\vec{x} + \vec{y}_0 - \vec{x} - \vec{y}), \vec{m}_j)} = \frac{1}{N} s^*(\vec{y}_0 - \vec{y}, \Lambda) = \delta_\Lambda^*(\vec{y}_0 - \vec{y}).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m}_j)} = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) \delta_\Lambda^*(\vec{y}_0 - \vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}_0) = f(\vec{z}).$$

Воспользуемся рядом Фурье для функции $f(\vec{z})$, получим по теореме 3

$$\begin{aligned} c_j &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda, \vec{x})} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{n}) e^{2\pi i((\vec{x} + \vec{y}, \vec{n}) - (\vec{x} + \vec{y}, \vec{m}_j))} = \\ &= \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{n}) e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{n} - \vec{m}_j)} \frac{1}{N} s(\vec{n} - \vec{m}_j, \Lambda) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{n} + \vec{m}_j) e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{n})}. \end{aligned}$$

□

2.5. Свойства оператора интерполирования

Формула (32) задает оператор интерполирования I_Λ на пространстве E_s^α , который каждой функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ ставит в соответствие ее интерполяционный многочлен (32). Таким образом,

$$I_\Lambda f(\vec{x}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x} - \vec{y})} \right). \quad (36)$$

Теорема 10 позволяет задать целый класс операторов интерполирования $I_{\Lambda, \vec{x}}$ на пространстве E_s^α . Каждой функции $f(\vec{z}) \in E_s^\alpha$ поставим в соответствие ее интерполяционный многочлен

$$I_{\Lambda, \vec{x}} f(\vec{z}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y})} \right). \quad (37)$$

ЛЕММА 9. Для любой функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ справедливо неравенство

$$\|I_\Lambda f(\vec{x})\|_{l_1} \leq \|f(\vec{x})\|_{l_1}. \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11]. □

ЛЕММА 10. Для любой функции $f(\vec{z}) \in E_s^\alpha$ справедливо неравенство

$$\|I_{\Lambda, \vec{x}} f(\vec{z})\|_{l_1} \leq \|f(\vec{z})\|_{l_1}. \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по определению нормы $\|\cdot\|_{l_1}$ имеем:

$$\begin{aligned} \|I_{\Lambda, \vec{x}} f(\vec{z})\|_{l_1} &= \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \left| \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{n} + \vec{m}) e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{n})} \right| \leq \\ &\leq \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} |c(\vec{n} + \vec{m})| = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} |c(\vec{n})| = \|f(\vec{z})\|_{l_1}. \end{aligned} \quad (40)$$

□

ЛЕММА 11. Для любого тригонометрического полинома $f(\vec{x})$ вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (41)$$

справедливо равенство

$$I_{\Lambda} f(\vec{x}) = f(\vec{x}). \quad (42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11]. □

ЛЕММА 12. Для любого тригонометрического полинома $f(\vec{z})$ вида

$$f(\vec{z}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z})} \quad (43)$$

справедливо равенство

$$I_{\Lambda, \vec{x}} f(\vec{z}) = f(\vec{z}). \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по формуле (37)

$$\begin{aligned} I_{\Lambda, \vec{x}} f(\vec{z}) &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y})} \right) = \\ &= \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z})} \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) e^{2\pi i(\vec{m}, -\vec{x} - \vec{y})} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) e^{2\pi i(\vec{m}, -\vec{x} - \vec{y})} &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, -\vec{x} - \vec{y})} \sum_{\vec{k} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{k}) e^{2\pi i(\vec{k}, \vec{x} + \vec{y})} = \\ &= \sum_{\vec{k} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{k}) e^{2\pi i(\vec{k} - \vec{m}, \vec{x})} \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{k} - \vec{m}, \vec{y})} = \sum_{\vec{k} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{k}) e^{2\pi i(\vec{k} - \vec{m}, \vec{x})} \frac{1}{N} s(\vec{k} - \vec{m}, \Lambda) = c(\vec{m}), \end{aligned}$$

так как $s(\vec{k} - \vec{m}, \Lambda) \neq 0$ только при $\vec{k} = \vec{m}$ и лемма доказана. □

Множество тригонометрических полиномов вида (41) обозначим через P_{Λ} .

ТЕОРЕМА 11. Для любой целочисленной решётки Λ с $\det \Lambda \geq 3^s$ и $q_3(\Lambda) \geq 1$ на пространстве $P^{(q_3(\Lambda))}$ для абсолютно минимальной гиперболической полной система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешётки Λ справедливо равенство (42).

При $t > q_3(\Lambda)$ найдется тригонометрический полином $f(\vec{x}) \in P^{(t)}$ такой, что равенство (42) нарушается. В частности,

$$P^{(t)} \cap \ker I_{\Lambda} \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11]. $\square$

Для любого $\vec{m} \in M^*(\Lambda)$ обозначим через $E_{s,\vec{m}}^\alpha$ банахово подпространство пространства E_s^α , состоящее из функций вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}) e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}. \quad (45)$$

Ясно, что имеет место разложение E_s^α в прямую сумму $E_{s,\vec{m}}^\alpha$:

$$E_s^\alpha = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \oplus E_{s,\vec{m}}^\alpha.$$

Отсюда следует, что произвольная функция $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ представима в виде сумм

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} f_{\vec{m}}(\vec{x}),$$

где

$$f_{\vec{m}}(\vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}) e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}.$$

В работе [12] показано, что для проектора $A_{\vec{m}} : f(\vec{x}) \rightarrow f_{\vec{m}}(\vec{x})$ имеется конечное представление:

$$A_{\vec{m}}(f(\vec{x})) = f_{\vec{m}}(\vec{x}) = \frac{1}{\det \Lambda} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\{\vec{x} + \vec{y}\}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m})} \quad (\vec{m} \in M^*(\Lambda)).$$

Здесь для произвольного вектора $\vec{x}$ под его дробной частью подразумевается вектор $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_s\})$.

ТЕОРЕМА 12. На пространстве E_s^α операторы $A_{\vec{m}}$ и I_Λ коммутируют:

$$I_\Lambda(A_{\vec{m}}(f(\vec{x}))) = A_{\vec{m}}(I_\Lambda(f(\vec{x}))) = \left(\sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}) \right) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11]. $\square$

ТЕОРЕМА 13. На пространстве E_s^α ядро $\ker I_\Lambda$ оператора интерполирования I_Λ имеет нормированный базис:

$$f_{\vec{m}, \vec{n}}(\vec{x}) = \frac{1}{(q(\vec{m} + \vec{n}))^\alpha} \left(e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} - e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})} \right) \quad (\vec{m} \in M_H^*(\Lambda), \vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}). \quad (47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11]. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пространство E_s^α разлагается в прямую сумму ядра $\ker I_\Lambda$ оператора интерполирования I_Λ и пространства тригонометрических полиномов P_Λ :

$$E_s^\alpha = \ker I_\Lambda \oplus P_\Lambda.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11]. $\square$

Понятие проектора $A_{\vec{m}} : f(\vec{x}) \rightarrow f_{\vec{m}}(\vec{x})$ является частным случаем оператора взвешенных сеточных средних из работы [6].

Для любой сетки M с весами $\vec{\rho}$ рассмотрим на пространстве периодических функций E_s^α линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних заданный равенством

$$g(\vec{x}) = A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho_k f[x_1 + \xi_1(k), \dots, x_s + \xi_s(k)]. \quad (48)$$

Обозначим через $A_{M,\vec{\rho}}C(\vec{m})$ действие линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ на коэффициенты Фурье функции $f(\vec{x})$.

ЛЕММА 13. *Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье*

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (49)$$

справедливо равенство

$$A_{M,\vec{\rho}}C(\vec{m}) = \frac{S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})}{N} C(\vec{m}) = S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m}) C(\vec{m}) \quad (50)$$

где $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрическая сумма сетки с весами, а $S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})$ — нормированная тригонометрическая сумма сетки с весами.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\|A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \leq \frac{\rho(M)}{N} \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}. \quad (51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [6]. $\square$

Отсюда непосредственно следует, что проектор $A_{\vec{m}} : f(\vec{x}) \rightarrow f_{\vec{m}}(\vec{x})$ получается из оператора взвешенных сеточных средних при $\rho_{\vec{m}}(\vec{y}) = e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m})}$, $\vec{y} \in M(\Lambda)$. Кроме этого, отметим, что все проекторы относятся к числу нормальных операторов, так как не увеличивают норму функции.

2.6. Оценки погрешности интерполирования

Простейшую оценку снизу погрешности интерполирования мы получим с помощью третьего гиперболического параметра решётки.

ТЕОРЕМА 14. *Для любой целочисленной решётки Λ найдется функция $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ такая, что справедлива оценка снизу погрешности интерполирования:*

$$\|f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))\|_C \geq \frac{2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda) + 1)^\alpha}. \quad (52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11]. $\square$

ТЕОРЕМА 15. *Для любой целочисленной решётки Λ и абсолютно минимальной гиперболической полной системы вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешётки Λ для любой функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ справедлива оценка сверху погрешности интерполирования:*

$$\|f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))\|_C \leq \frac{2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda))) \right). \quad (53)$$

Доказательство. См. [11]. $\square$

Если ввести оператор приближенного интерполирования $R_\Lambda[f]$ с помощью обобщённой параллелепипедальной сетки целочисленной решётки равенством $R_\Lambda[f] = f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))$, то справедлива оценка для нормы

$$\|R_\Lambda[f]\|_C \leq \frac{2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda))) \right).$$

Теорема 15 можно обобщить на случай произвольного оператора интерполирования $I_{\Lambda, \vec{x}}$.

ТЕОРЕМА 16. *Для любой целочисленной решётки Λ и абсолютно минимальной гиперболической полной системы вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешётки Λ для любой функции $f(\vec{z}) \in E_s^\alpha$ справедлива оценка сверху погрешности интерполирования:*

$$\|f(\vec{z}) - I_{\Lambda, \vec{x}}(f(\vec{z}))\|_C \leq \frac{2\|f(\vec{z})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda))) \right). \quad (54)$$

Доказательство. Действительно, для любой полной системы вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$, относительно подрешетки Λ имеем:

$$f(\vec{z}) - I_{\Lambda, \vec{x}}(f(\vec{z})) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} c(\vec{m} + \vec{n}) \left(e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{z})} - e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z})} e^{2\pi i(\vec{n}, \vec{x})} \right). \quad (55)$$

Отсюда следует, что

$$\|f(\vec{z}) - I_{\Lambda, \vec{x}}(f(\vec{z}))\|_C \leq 2\|f(\vec{z})\|_{E_s^\alpha} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{1}{(\overline{m_1 + n_1} \dots \overline{m_s + n_s})^\alpha}. \quad (56)$$

Теперь воспользуемся включением $K(q_3(\Lambda)) \subset M_H^*(\Lambda)$. Правая часть (56) только увеличится, если суммирование провести по всем целым точкам, не попавшим в гиперболический крест $K(q_3(\Lambda))$. Получим

$$\|f(\vec{z}) - I_{\Lambda, \vec{x}}(f(\vec{z}))\|_C \leq 2\|f(\vec{z})\|_{E_s^\alpha} \sum_{\vec{m} \notin K(q_3(\Lambda))} \frac{1}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha}. \quad (57)$$

Применяя к правой части (57) соотношения (16) и (24) при $t = q_3(\Lambda)$, получим утверждение теоремы. $\square$

3. Алгоритмы приближенного интегрирования и интерполирования с правилом останковки

Сделаем ещё несколько замечаний по поводу приближенного интегрирования периодических функций многих переменных (см. также [10]). Известно, что для погрешности приближенного интегрирования справедлива оценка

$$|R_N[f]| \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot \left(\left| S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right| + \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}) \right),$$

но норма функции $\|f\|_{E_s^\alpha}$, как правило, неизвестна и задача её вычисления более сложная чем задача вычисления интеграла, который является значением только одного коэффициента Фурье $C(\vec{0})$. Более того, относительно параметра гладкости α для конкретной функции может быть известна только некоторая оценка, вытекающая из дифференциальных свойств функции, что приводит ещё к большей неопределенности для решения вопроса о достигнутой точности вычисления по конкретной квадратурной формуле для этой конкретной функции. Дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Будем говорить, что задан алгоритм приближенного интегрирования

$$\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle \quad (j = 1, 2, \dots)$$

периодической функции $f(\vec{x})$ из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ с правилом останковки $\Delta(f(\vec{x}))$, если задана бесконечная возрастающая последовательность натуральных N_j с $\lim_{j \rightarrow \infty} N_j = \infty$ и сеток с весами $M(j), \vec{\rho}(j)$ из N_j взвешенных узлов равномерно распределенных в единичном s -мерном кубе такая, что для правила останковки $\Delta(f(\vec{x})) < \varepsilon$ величина

$$\Delta(f(\vec{x})) = \Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j))$$

и выполняется равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)) = 0. \quad (58)$$

В этом определении предполагается, что величина $\Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j))$ алгоритмически выражается через веса и значения функции в узлах сетки. Кроме того предполагается, что для любого N_j из данной последовательности сетка с весами $M(j), \vec{\rho}(j)$ алгоритмически вычисляется. В данной работе будет предложена в качестве правила останковки величины дискретной дисперсии и сеточного размаха, определение которых будет дано ниже. Таким образом, вычисление приближенного значения интеграла продолжается до тех пор, пока для заданного $\varepsilon > 0$ не будет выполнено правило останковки $\Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)) < \varepsilon$.

Следуя К. И. Бабенко [1] и О. В. Локуциевскому [18], дадим следующее определение ненасыщаемого алгоритма приближенного интегрирования на классе $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Будем говорить, что периодическая функция $f(\vec{x})$ из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ принадлежит конечному показателю $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$, если $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ и $f(\vec{x}) \notin E_s^\beta$ для любого $\beta > \alpha$. В противном случае будем говорить, что периодическая функция из класса E_s принадлежит бесконечному показателю.

Ясно, что бесконечному показателю принадлежит любой конечный тригонометрический полином. Если периодическая функция $f(\vec{x}) \in E_s$ не является конечным тригонометрическим полиномом и принадлежит бесконечному показателю, то она будет бесконечно дифференцируемой функцией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Будем говорить, что алгоритм приближенного интегрирования $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) периодических функций из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ ненасыщаемый типа (γ, λ) , если для любой периодической функции $f(\vec{x})$ конечного показателя $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$ и погрешности приближенного интегрирования выполняется равенство

$$R_{N_j}[f(\vec{x})] = O\left(\frac{\ln^\gamma N_j}{N_j^{\lambda-\alpha}}\right). \quad (59)$$

Как известно (см. [17]), методом оптимальных коэффициентов Коробова можно построить ненасыщаемые алгоритмы типа $((s-1)\alpha, 1)$, а модифицированным методом Фролова — $((s-1), 1)$. Для случая равномерных сеток имеем тип $(0, \frac{1}{s})$.

С точки зрения трудоемкости вычислений разумно выделить класс алгоритмов приближенного интегрирования, в которых j -ая квадратурная формула полностью использует результаты вычислений по $j-1$ -ой квадратурной формуле. Дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Будем говорить, что задан концентрический алгоритм приближенного интегрирования $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) периодических функций из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$, если для любого $j \geq 1$ выполняются условия

$$M(j) \subset M(j+1), \quad \exists \rho : \forall \vec{x} \in M(j) : \rho_{j+1}(\vec{x}) = \rho \cdot \rho_j(\vec{x}). \quad (60)$$

Наиболее простой пример концентрических алгоритмов приближенного интегрирования дают квадратурные формулы с равными весами, построенными из первых членов бесконечной равномерно распределенной по модулю 1 бесконечной последовательности точек из единичного s -мерного куба. Другой класс концентрических алгоритмов приближенного интегрирования связан с понятием произведения сеток с весами.

Пусть даны две сетки с весами $\langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle$ и $\langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle$. Напомним определение произведения сеток с весами из работы [13], которое здесь несколько отличается для случая $|M_3| \neq |M_1| \cdot |M_2|$ появлением нормировочного множителя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Произведением двух сеток с весами $\langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle$ и $\langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle$ называется третья сетка

$$\langle M_3, \vec{\rho}_3 \rangle = \langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle \cdot \langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle, \quad (61)$$

где

$$M_3 = \{ \{ \vec{x} + \vec{y} \} | \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2 \}, \quad (62)$$

$$\rho_3(\vec{z}) = \frac{|M_3|}{|M_1| \cdot |M_2|} \sum_{\substack{\vec{z} = \{ \vec{x} + \vec{y} \}, \\ \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2}} \rho_1(\vec{x}) \cdot \rho_2(\vec{y}), \quad (63)$$

и для любого вектора $\vec{z} = (z_1, \dots, z_s)$ дробной частью вектора называется вектор $\{ \vec{z} \} = (\{z_1\}, \dots, \{z_s\})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Будем говорить, что задан мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования $\langle M^*(j), \vec{\rho}^*(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots, n, \dots$) периодических функций из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$, порожденный бесконечной последовательностью $\langle M(j), \vec{\rho}(j) \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$), если $M^*(1) = M(1)$, $\vec{\rho}^*(1) = \vec{\rho}(1)$ и для любого $j \geq 1$ выполняются условия

$$\langle M^*(j+1), \vec{\rho}^*(j+1) \rangle = \langle M^*(j), \vec{\rho}^*(j) \rangle \cdot \langle M(j+1), \vec{\rho}(j+1) \rangle. \quad (64)$$

Нетрудно видеть, что если для каждой сетки $\vec{0} \in M(j)$ ($j = 1, 2, \dots$), то мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования будет концентрическим, так как в этом случае всегда $M^*(j) \subset M^*(j+1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования

$$\langle M^*(j), \vec{\rho}^*(j), \Delta \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, n, \dots)$$

периодических функций из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$, порожденный бесконечной последовательностью

$$\langle M(j), \vec{\rho}(j) \rangle \quad (j = 1, 2, \dots)$$

с дополнительным условием

$$\vec{0} \in M(j) \quad (j = 1, 2, \dots),$$

будем называть мультипликативным, концентрическим алгоритмом приближенного интегрирования.

Пусть величины m_f, M_f — минимальное и максимальное значение функции $f(\vec{x})$ определены, соответственно, равенствами

$$m_f = \min_{\vec{x} \in [0;1]^s} f(\vec{x}), \quad M_f = \max_{\vec{x} \in [0;1]^s} f(\vec{x}), \quad (65)$$

а размах функции $v_f = M_f - m_f$, тогда справедливо неравенство

$$v_f \leq \|f\|_{E_s} 2((1 + 2\zeta(\alpha))^s - 1). \quad (66)$$

Очевидно, что для любого алгоритма приближенного интегрирования $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) можно определить две числовые последовательности

$$m_f(j) = \min_{\vec{x} \in M(j)} f(\vec{x}), \quad M_f(j) = \max_{\vec{x} \in M(j)} f(\vec{x}), \quad (67)$$

для которых справедливы соотношения

$$m_f(j) \geq m_f, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} m_f(j) = m_f, \quad M_f(j) \leq M_f, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} M_f(j) = M_f. \quad (68)$$

Для любого концентрического алгоритма приближенного интегрирования $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) будут выполнены дополнительные соотношения монотонности:

$$\begin{aligned} m_f &\leq \dots \leq m_f(j) \leq \dots \leq m_f(2) \leq m_f(1) \leq \\ &\leq M_f(1) \leq M_f(2) \leq \dots \leq M_f(j) \leq \dots \leq M_f. \end{aligned} \quad (69)$$

Так как для "сеточного" размаха $v_f(j) = M_f(j) - m_f(j)$ функции $f(\vec{x})$ отличной от константы выполняется равенство $\lim_{j \rightarrow \infty} v_f(j) = v_f > 0$, то величину сеточного размаха нельзя использовать как правило остановки, но в качестве правила остановки можно использовать величину приращения сеточного размаха $dv_f(j) = v_f(j) - v_f(j-1)$, которая стремится к нулю, но с оговоркой, что если приращение сеточного размаха нулевое, то останавливаться можно только при $\frac{1}{N_j} < \varepsilon$.

Таким образом, простейшее правило остановки для концентрического алгоритма можно определить как

$$\begin{aligned} &\Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)) = \\ &= \max \left(\frac{1}{|M(j)|}, \max_{\vec{x} \in M(j)} f(\vec{x}) + \min_{\vec{x} \in M(j-1)} f(\vec{x}) - \max_{\vec{x} \in M(j-1)} f(\vec{x}) - \min_{\vec{x} \in M(j)} f(\vec{x}) \right) \quad (j = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (70)$$

Всё выше изложенное перенесём на случай интерполяции периодических функций по узлам, образующим обобщённую параллелепипедальную сетку целочисленной решётки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Будем говорить, что задан алгоритм приближенного интерполирования

$$\langle M(j), \Delta_I \rangle \quad (j = 1, 2, \dots)$$

периодической функции $f(\vec{x})$ из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ с правилом остановки $\Delta_I(f(\vec{x}))$, если задана бесконечная возрастающая последовательность натуральных N_j с $\lim_{j \rightarrow \infty} N_j = \infty$ и обобщённых параллелепипедальных сеток целочисленных решёток $M(j)$ из N_j узлов равномерно распределённых в единичном s -мерном кубе такая, что для правила остановки $\Delta_I(f(\vec{x})) < \varepsilon$ величина

$$\Delta_I(f(\vec{x})) = \Delta_I(f(\vec{x}), M(j))$$

и выполняется равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta_I(f(\vec{x}), M(j)) = 0. \quad (71)$$

Теперь можем дать новое определение ненасыщаемого алгоритма интерполирования с помощью обобщённых параллелепипедальных сеток целочисленных решёток.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Будем говорить, что алгоритм приближенного интерполирования $\langle M(j), \Delta_I \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) с помощью обобщённых параллелепипедальных сеток целочисленных решёток периодических функций из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ ненасыщаемый типа (γ, λ) , если для любой периодической функции $f(\vec{x})$ конечного показателя $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$ и погрешности интерполирования выполняется равенство

$$\|R_{\Lambda_j}[f(\vec{x})]\|_C = O\left(\frac{\ln^\gamma N_j}{N_j^{\lambda \cdot (\alpha - 1)}}\right). \quad (72)$$

Вопрос о типе ненасыщаемого алгоритма интерполирования с помощью обобщённых параллелепипедальных сеток целочисленных решёток остается открытым, так как в настоящее время нет оценок для третьего гиперболического параметра через детерминант решётки, а теорема 15 сформулирована в терминах третьего гиперболического параметра решётки.

Все определения с 12 по 15 преобразуются в соответствующие определения относительно интерполирования, если в них заменить слово интегрирование на интерполирование и удалить весовые функции.

Естественный вопрос, который возникает при рассмотрении мультипликативного, концентрического алгоритма приближенного интерполирования, это сходимость последовательности интерполирующих функций к интерполируемой в той или иной метрике. Этот вопрос рассмотрим в следующих разделах.

4. Вложенные последовательности параллелепипедальных сеток

Рассмотрим линейное сравнение

$$m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s \equiv 0 \pmod{N}, \quad (a_j, N) = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, s-1).$$

Решётку решений этого сравнения обозначим через $\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)$. Её базисная матрица будет иметь вид

$$A(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \begin{pmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{s-1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Базисная матрица взаимной решётки будет иметь вид

$$A^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & \frac{a_1}{N} & \dots & \frac{a_{s-1}}{N} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая параллелепипедальная сетка задается равенством

$$M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \left\{ \left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) \mid k = 0, 1, \dots, N-1 \right\}.$$

Каждая параллелепипедальная сетка обладает важным свойством, что её проекция на любую координатную ось будет множеством точек $\{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\}$.

Очевидно, что если $b_j \equiv a_j \pmod{N}$ ($j = 1, \dots, s-1$), то

$$\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N) = \Lambda(1, b_1, \dots, b_{s-1}; N), \quad M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = M(\Lambda(1, b_1, \dots, b_{s-1}; N)).$$

Кроме этого, отметим, что для любого целого c взаимно простого с N справедливы равенства

$$\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N) = \Lambda(c, ca_1, \dots, ca_{s-1}; N), \quad M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = M(\Lambda(c, ca_1, \dots, ca_{s-1}; N)).$$

Нетрудно, указать полную систему вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ по целочисленной подрешётки $\Lambda(a_1, \dots, a_{s-1}; N)$. А именно, такой полной системой вычетов будет множество

$$M_1^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \{(0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (N-1, 0, \dots, 0)\}.$$

Аналогичные полные системы вычетов $M_j^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$ можно выписать для любой координаты $j = 2, \dots, s$, если j -ая координата изменяется от 0 до $N-1$, а все остальные координаты нулевые.

Заметим, что указанные полные системы вычетов в некотором смысле самые плохие, так как для них третий гиперболический параметр $q_3(M_j^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))) = 0$. Действительно, точка $(0, 1, 0, \dots, 0)$ имеет единичную усеченную норму, но не принадлежит полной системе вычетов $M_1^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$.

Рассмотрим периодическую функцию $f(\vec{x}) = e^{2\pi i x_2}$. Для любой точки $\vec{x} = \left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{N}\right\}\right)$ параллелепипедальной сетки $M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$ имеем равенство

$$f\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{N}\right\}\right) = e^{2\pi i \frac{a_1 k}{N}},$$

а интерполяционный многочлен будет иметь вид $f_1(\vec{x}) = e^{2\pi i a_1 x_1}$ и для каждой точки $\vec{x} = \left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{N}\right\}\right)$ параллелепипедальной сетки $M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$ имеем равенство

$$f_1\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{N}\right\}\right) = e^{2\pi i \frac{a_1 k}{N}}.$$

Очевидно, что интерполяционный многочлен $f_1(\vec{x})$ не сходится к интерполируемой функции $f(\vec{x})$ ни при каком N . Этот пример показывает, что выбор полной системы вычетов для построения интерполяционного многочлена играет принципиальную роль.

Будем для краткости писать Λ вместо $\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)$ и $M_1^*(\Lambda)$ вместо $M_1^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$. В новых обозначениях равенства (32) и (33) примут следующий парадоксальный вид:

$$S_{M(\Lambda), M_1^*(\Lambda)}\left(\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{N}\right\}\right)\right) = \sum_{m=0}^{N-1} c_{M(\Lambda), M_1^*(\Lambda)}(m) e^{2\pi i \frac{mk}{N}}, \quad (73)$$

$$\begin{aligned} c_{M(\Lambda), M_1^*(\Lambda)}(m) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{N}\right\}\right)\right) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} = \\ &= \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c((m, 0, \dots, 0) + \vec{n}). \end{aligned} \quad (74)$$

Объяснить данный парадокс достаточно просто, если рассмотреть функцию одной переменной:

$$f_1\left(\frac{k}{N}\right) = f\left(\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{N}\right\}\right)\right).$$

Воспользуемся рядом Фурье для периодической функции $f(\vec{x})$, получим

$$\begin{aligned} f_1\left(\frac{k}{N}\right) &= \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{2\pi i \frac{mk}{N}}, \\ c_m &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_1\left(\frac{k}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{N}\right\}\right)\right) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{n}) e^{2\pi i \frac{(n_1 + a_1 n_2 + \dots + a_{s-1} n_s - m)k}{N}} = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{n}) \delta_N(n_1 + a_1 n_2 + \dots + a_{s-1} n_s - m) = \\ &= \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{n} + (m, 0, \dots, 0)). \end{aligned}$$

Анализ формул (32) и (33) приводит к одному важному свойству коэффициентов интерполяционного многочлена. Эти коэффициенты с точностью до перестановки не зависят от полной системы вычетов, по которой строится интерполяционный многочлен.

Если мы имеем две целые точки $\vec{n}$ и $\vec{m}$, то легко определить, когда $\vec{n} \equiv \vec{m} \pmod{\Lambda}$. Для этого достаточно вычислить величину $\delta_\Lambda(\vec{n} - \vec{m})$, которая задается равенством

$$\begin{aligned} \delta_\Lambda(\vec{n} - \vec{m}) &= \frac{1}{N} + \left\{ \frac{(n_1 - m_1 - 1) + a_1(n_2 - m_2) + \dots + a_{s-1}(n_s - m_s)}{N} \right\} - \\ &- \left\{ \frac{(n_1 - m_1) + a_1(n_2 - m_2) + \dots + a_{s-1}(n_s - m_s)}{N} \right\} = \begin{cases} 1 & \text{при } \vec{n} \equiv \vec{m} \pmod{\Lambda}, \\ 0 & \text{при } \vec{n} \not\equiv \vec{m} \pmod{\Lambda}. \end{cases} \end{aligned}$$

Обозначим через $M_N(b)$ абсолютно наименьшее решение сравнения $x + b \equiv 0 \pmod{N}$. Нетрудно видеть, что

$$M_N(b) = \begin{cases} N \left\{ -\frac{b}{N} \right\} & \text{при } \left\{ -\frac{b}{N} \right\} \leq \frac{1}{2}, \\ N \left\{ -\frac{b}{N} \right\} - N & \text{при } \left\{ -\frac{b}{N} \right\} > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что если $(n_1, \dots, n_s) \equiv (m, 0, \dots, 0) \pmod{\Lambda}$ и $n_2, \dots, n_s$ фиксированные, то наименьшее значение $\bar{n}_1 \dots \bar{n}_s$ достигается при $n_1 = M_N(-m + a_1 n_2 + \dots + a_{s-1} n_s)$. Таким образом, возникает неоднородная задача минимизации выражения

$$\overline{M_N(-m + a_1 n_2 + \dots + a_{s-1} n_s)} \cdot \bar{n}_2 \dots \bar{n}_s \rightarrow \min$$

по всем целым $n_2, \dots, n_s$. Если для каждого целого значения m из промежутка $-\frac{N}{2} < m \leq \frac{N}{2}$ будет найден оптимальный набор $n_2, \dots, n_s$, то тем самым будет найдена абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов $M_H^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$.

Пусть $N = N_1 \cdot N_2$ и $(N_1, N_2) = 1$, тогда справедливо равенство для решёток и сеток

$$\begin{aligned} \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N) &= \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_1) \cap \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_2), \\ M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) &= M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_1)) \cdot M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_2)). \end{aligned}$$

Остановимся более подробно на последнем равенстве о произведении сеток. Оно вытекает из равенства

$$\begin{aligned} &\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{N}\right\}\right) = \\ &= \left\{ \left(\frac{k_1}{N_1}, \left\{\frac{a_1 k_1}{N_1}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k_1}{N_1}\right\}\right) + \left(\frac{k_2}{N_2}, \left\{\frac{a_1 k_2}{N_2}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k_2}{N_2}\right\}\right) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$k = N \left\{ \frac{k_1}{N_1} + \frac{k_2}{N_2} \right\}.$$

Верно и обратное утверждение, если $N = N_1 \cdot N_2$, $(N_1, N_2) = 1$ и

$$b_j \equiv a_j \pmod{N_1}, \quad c_j \equiv a_j \pmod{N_2} \quad (j = 1, \dots, s-1),$$

то

$$\begin{aligned} \Lambda(1, b_1, \dots, b_{s-1}; N_1) \cap \Lambda(1, c_1, \dots, c_{s-1}; N_2) &= \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N), \\ M(\Lambda(1, b_1, \dots, b_{s-1}; N_1)) \cdot M(\Lambda(1, c_1, \dots, c_{s-1}; N_2)) &= M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)). \end{aligned}$$

Пусть для определенности $N_1 > N_2$. Нетрудно видеть, что параллелепipedальная сетка $M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$ представима как объединение сдвинутых обобщенных параллелепipedальных сеток $M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_1), \vec{x})$, когда $\vec{x}$ пробегает все точки параллелепipedальной сетки $M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_2))$:

$$M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \bigcup_{\vec{x} \in M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_2))} M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_1), \vec{x}).$$

Для простоты записи положим $\Lambda = \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)$, $\Lambda_\nu = \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_\nu)$ ($\nu = 1, 2$). В новых обозначениях получим $M(\Lambda) = \bigcup_{\vec{x} \in M(\Lambda_2)} M(\Lambda_1, \vec{x})$. Для каждого $\vec{x} \in M(\Lambda_2)$ определим функцию $f_{\vec{x}}(\vec{z})$ равенствами

$$f_{\vec{x}}(\vec{z}) = \begin{cases} f(\vec{z}) & \text{при } \vec{z} \in M(\Lambda_1, \vec{x}), \\ 0 & \text{при } \vec{z} \in M(\Lambda) \setminus M(\Lambda_1, \vec{x}). \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что для любой точки $\vec{z}$ из параллелепipedальной сетки $M(\Lambda)$ справедливо равенство

$$f(\vec{z}) = \sum_{\vec{x} \in M(\Lambda_2)} f_{\vec{x}}(\vec{z}).$$

Так как функции $f(\vec{z})$ и $f_{\vec{x}}(\vec{z})$ ($\vec{x} \in M(\Lambda_2)$) определены на сетке $M(\Lambda)$, то для них можно рассмотреть интерполяционные многочлены $I_\Lambda f(\vec{z})$, $I_\Lambda f_{\vec{x}}(\vec{z})$ и $I_{\Lambda_1, \vec{x}} f(\vec{z})$.

Согласно формулам (36) и (37) получим:

$$\begin{aligned} I_\Lambda f(\vec{z}) &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{y})} \right), \\ I_\Lambda f_{\vec{x}}(\vec{z}) &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda_1, \vec{x})} f(\vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{y})} \right) = \\ &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda_1)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y})} \right), \\ I_{\Lambda_1, \vec{x}} f(\vec{z}) &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda_1)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left(\frac{1}{N_1} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y})} \right). \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что

$$I_{\Lambda}f(\vec{z}) - I_{\Lambda}f_{\vec{x}}(\vec{z}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda) \setminus M(\Lambda_1, \vec{x})} f(\vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{y})} \right), \quad (75)$$

$$\begin{aligned} I_{\Lambda}f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1, \vec{x}}f(\vec{z}) &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda) \setminus M(\Lambda_1, \vec{x})} f(\vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{y})} \right) + \\ &+ \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda_1)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{y})} - \frac{1}{N_1} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y})} \right). \end{aligned} \quad (76)$$

ЛЕММА 14. Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (77)$$

справедливо равенство

$$I_{\Lambda}f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1}f(\vec{z}) = \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda) \setminus M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) - \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \sum_{\vec{n} \in \Lambda_1 \setminus \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) \quad (78)$$

и оценка для нормы разности

$$\|I_{\Lambda}f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1}f(\vec{z})\|_C \leq \frac{\|f(\vec{z})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda_1))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda_1))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda_1))) \right). \quad (79)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, подставляя ряд Фурье (77) в равенство (76), получим:

$$\begin{aligned} I_{\Lambda}f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1}f(\vec{z}) &= \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} \left(\sum_{\vec{n} \in \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) \right) e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} - \\ &- \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} \left(\sum_{\vec{n} \in \Lambda_1} C(\vec{n} + \vec{m}) \right) e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} = \\ &= \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} C(\vec{n}) \left(\sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \delta_{\Lambda}(\vec{n} - \vec{m}) - \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \delta_{\Lambda_1}(\vec{n} - \vec{m}) \right) = \\ &= \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda) \setminus M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) + \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \left(\sum_{\vec{n} \in \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) - \sum_{\vec{n} \in \Lambda_1} C(\vec{n} + \vec{m}) \right) = \\ &= \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda) \setminus M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) - \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \sum_{\vec{n} \in \Lambda_1 \setminus \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}). \end{aligned}$$

Переходя к оценкам по модулю, получим

$$\begin{aligned}
& \|I_{\Lambda}f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1}f(\vec{z})\|_C \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \left(\sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda) \setminus M_H^*(\Lambda_1)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} \frac{1}{(\overline{m_1 + n_1} \dots \overline{m_s + n_s})^\alpha} + \right. \\
& \left. + \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda_1 \setminus \Lambda} \frac{1}{(\overline{m_1 + n_1} \dots \overline{m_s + n_s})^\alpha} \right) \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \sum_{\vec{m} \notin K(q_3(\Lambda_1))} \frac{1}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha} \leq \\
& \leq \frac{\|f(\vec{z})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda_1))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda_1))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda_1))) \right).
\end{aligned}$$

□

Из доказанной леммы следует, что в качестве правила остановки концентрического алгоритма приближенного интерполирования периодических функций можно взять величину

$$\Delta_I(f(\vec{x})) = \max_{\vec{z} \in M(\Lambda)} |I_{\Lambda}f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1}f(\vec{z})|,$$

которая стремится к нулю при стремлении величины третьего гиперболического параметра к бесконечности.

5. Заключение

Из материалов статьи видно, что если последовательность вложенных решёток решений линейных сравнений обладает тем свойством, что последовательность третьих гиперболических параметров стремится к бесконечности, то мы получаем мультипликативный, концентрический алгоритм приближенного интерполирования с правилом остановки, который дает последовательность интерполяционных многочленов, сходящихся к интерполируемой функции.

Было бы интересно найти аналоги оценок Быковского (см. [4], [5]) для задачи интерполирования.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
2. Бочарова Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2007 Т. 8. Вып. 1(21). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 4–109.
3. Быковский В. А. Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках // Мат. сб. 136(178). 4(8). 1988. С. 451–467
4. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.
5. О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.
6. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.
7. Добровольский М. Н. Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. 5. Вып. 1(9). С. 82–113.

8. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решеток // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 3. Вып. 2(4). С. 43 – 59.
9. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решеток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, № 6090–84.
10. Добровольский Н. М., Бочарова Л. П. Пятьдесят лет теоретико-числовому методу в приближенном анализе // Наукоемкое образование. Традиции. Иновации. Перспективы. Сборник межвузовских научных статей. Тула, АНОВО "ТИНО 2006. С. 189 – 198
11. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Андреева О. В., Зайцева Н. В. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышевский сборник, 2004, Т. 5. Вып. 1(9). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 122 — 143.
12. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4. Вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.
13. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Аккуратова С. В. О некоторых свойствах нормированных пространств и алгебр сеток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5. Вып. 1. Тула, 1999. С. 100–113.
14. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. Н. Кормачева, Н. М. Добровольский. Оценки отклонения для рациональных сеток, приближающих алгебраические // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 178–187.
15. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.
16. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
17. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
18. Локуциевский О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: ТОО Янус, 1995.

REFERENCES

1. Babenko, K.I. 1986, *Osnovy chislennogo analiza* [Fundamentals of numerical analysis], Nauka, Moscow, Russia.
2. Bocharova, L.P. 2007, “Algorithms for finding the optimal coefficients”, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 8, no. 1(21), pp. 4–109.
3. Bykovskij, V.A 1988, “Discrete Fourier transform and cyclic convolution on integer lattices”, *Matematicheskij sbornik*, vol. 136(178), no. 4(8), pp. 451–467.
4. Bykovskij, V.A 2002, “On the error of number-theoretic quadrature formulas”, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 3, no. 2(4), pp. 27–33.
5. O. A. Gorkusha, N. M. Dobrovolsky, 2005, "On estimates of hyperbolic zeta function of lattices" // *Chebyshevsky Collection*, vol. 6, issue 2(14), pp. 130-138.

6. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, "On the error of approximate integration over modified grids", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.
7. Dobrovol'skii, M. N. 2004, "The optimum coefficients of the combined meshes", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 5, no. 1(9), pp. 95–121.
8. Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Kiseleva, O.V. 2002, "On the product of generalized parallelepipedal grids of integer lattices", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 3, no. 2(4), pp. 43–59.
9. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", Dep. v VINITI, no. 6090–84.
10. Dobrovol'skii, N. M. & Bocharova, L.P. 2006, "Fifty years of the number-theoretic method in the approximate analysis", *Naukoemkoe obrazovanie. Traditsii. Innovatsii. Perspektivy, Sbornik mezhvuzovskikh nauchnykh statej*, pp.189–198.
11. N. M. Dobrovolsky, A. R. Yesayan, O. V. Andreeva, N. V. Zaitseva, 2004, "Multidimensional number-theoretic Fourier interpolation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 5, iss. 1(9), pp. 122–143.
12. Dobrovol'skii, N. M. & Manokhin, E.V. 1998, "Banach spaces of periodic functions", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 4, no. 3, pp. 56–67.
13. Dobrovol'skii, N. M., Manokhin, E.V., Rebrova, I. YU. & Akkuratova, S.V.1999, "On some properties of normed spaces and algebras of nets", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 5, no. 1, pp. 100–113.
14. N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. N. Kormacheva, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "Deviation estimates for rational grids approximating algebraic", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 178–187.
15. Kassels, D. 1965, *Vvedenie v geometriyu chisel*, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.
16. Korobov, N.M. 1963, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.
17. Korobov, N.M. 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.
18. Lokutsievskij, O. V. & Gavrikov, M. B. 1995, *Nachala chislennogo analiza* [The beginning of numerical analysis], TOO "Yanus", Moscow, Russia.

Получено: 27.05.2023

Принято в печать: 12.09.2023