ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 3.

УДК 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-71-94

Обобщение проблемы Варинга для девяти почти пропорциональных кубов

З. Х. Рахмонов

Рахмонов Зарулло Хусенович —доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, директор Института математики им. А. Джураева (г. Душанбе).
e-mail: zrahmonov@mitas.tj, zarullo-r@rambler.ru

Аннотация

Получена асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального N в виде суммы девяти кубов натуральных чисел x_i, $i=\overline{1,9}$, удовлетворяющих условиям

$$|x_i^3-\mu_iN|\leqslant H,\qquad \mu_1+\ldots+\mu_9=1\qquad H\geqslant N^{1-\frac{1}{30}+\varepsilon},$$

где $\mu_1,\ldots,\mu_9$ — положительные фиксированные числа. Этот результат является усилением теоремы Е.М.Райта.

Ключевые слова: проблема Варинга, почти пропорциональные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма Г. Вейля, малая окрестность центров больших дуг.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:
З. Х. Рахмонов. Обобщение проблемы Варинга для девяти почти пропорциональных кубов // Чебышёвский сборник, 2023, т. 24, вып. 3, с. 71–94.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 3.

UDC 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-71-94

Generalization of Waring's problem for nine almost proportional cubes

Z. Kh. Rakhmonov

Rakhmonov Zarullo Khusenovich —doctor of physical and mathematical sciences, professor, Academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, director of the A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: zrahmonov@mitas.tj, zarullo-r@rambler.ru

Abstract

An asymptotic formula is obtained for the number of representations of a sufficiently large natural N as a sum of nine cubes of natural numbers x_i, $i=\overline{1,9}$, satisfying the conditions

$$|x_i^3-\mu_i N|\leqslant H, \qquad \mu_1+\ldots+\mu_9=1 \qquad H\geqslant N^{1-\frac{1}{30}+\varepsilon},$$

where $\mu_1,\ldots,\mu_9$ — positive fixed numbers. This result is a strengthening of E.M.Wright's theorem.

Keywords: Waring's problem, almost proportional Summands, H. Weil's short exponential sum, small neighborhood of centers of major arcs

Bibliography: 25 titles.

For citation:
Z. Kh. Rakhmonov, 2023, "Generalization of Waring's problem for nine almost proportional cubes" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 71–94.

1. Введение

Лагранж доказал, что любое натуральное число представимо в виде суммы не более четырёх квадратов натуральных чисел. Обобщая эту теорему, Варинг [1] в 1770 г. сфомулировал проблему, которая утверждает, что последовательность, образованная фиксированной степенью n чисел натурального ряда, образует в нём базис конечного порядка $G(n)$, то есть, каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде

$$x_1^n+x_2^n+\ldots+x_r^n=N, \tag{1}$$

где $x_1,x_2,\ldots,x_r$ — натуральные числа и количество слагаемых r не превосходит фиксированной величины $G(n)$, называемой порядком базиса последовательности $\{x^n\}$, или функцией Харди.

Проблема Варинга в XIX веке была доказана для отдельных значений n, но реального продвижения на пути к решению этой проблемы удалось добиться только в XX-ом веке. В 1909 г. эту задачу решил Д.Гильберт [2], тем самым он установил существование функции $G(n)$.

В 1920 г. Харди и Литтлвуд [3] доказали проблему Варинга новым методом. Они ввели функцию $G(n)$ и доказали, что

$$n<G(N)\leq n2^{n-1}h;\ \lim_{n\to\infty}h=1$$

Самым же основным было то, что Харди и Литтлвуд при

$$r>(n-2)2^{n-1}+5$$

для числа $J_{n,r}(N)$ представлений числа N в виде (1) находили асимптотическую формулу вида

$$J_{n,r}(N)=\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)^r\left(\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)\right)^{-1}N^{\frac{r}{n}-1}\mathfrak{S}_{n,r}(N)+O(N^{\frac{r}{n}-1-c(n,r)}),$$

где $\mathfrak{S}_{n,r}(N)$ — некоторый особый ряд, сумма которого, как они показали, превосходит некоторое положительное число $c_{n,r}(N)$.

В 1924 г. И.М.Виноградов [4], применяя к проблеме Варинга свой метод тригонометрических сумм нашёл асимптотическую формулу Харди и Литтлвуда при

$$r\geqslant 2[n^2(2\ln n+\ln\ln n+3)].$$

В 1934 г. И.М.Виноградову [5] удаётся доказать, что

$$G(n) < n(6\ln n + 10),$$

далее ему удалось уточнить эту оценку несколько раз, и наконец, в 1959 г. доказывает [6] следующую оценку

$$G(n) < n(2\ln n + 4\ln\ln n + 2\ln\ln\ln n + 13).$$

А.А.Карацуба [7], применяя к оценке $G(n)$ p–адический метод, нашёл более точную оценку

$$G(n) < n(2\ln n + 2\ln\ln n + 12).$$

Вули [8] показал, что

$$G(n) < n\ln n + n\ln\ln n + O(1).$$

Значение $G(n)$ известно всего лишь для $k = 2$ и $k = 4$, то есть $G(2) = 4$, $G(4) = 16$, что в свою очередь доказали Лагранж и Давенпорт [9]. Ю.В.Линник [10] показал, что имеет место $G(3) \leqslant 7$. Вон [11] получил асимптотическую формулу Г.Харди и Дж.Литтлвуда при $r = 8$ и $n = 3$.

М.Е. Райт [12, 13], исследуя проблему Варинга с почти пропорциональными слагаемыми, нашёл асимптотическую формулу для числа представлений числа N в виде (1) при выполнении условий

$$r \geqslant (n-2)2^{n-1} + 5, \quad |x_i^n - \mu_i N| \leqslant N^{1-\theta}, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \quad \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r = 1,$$

где число $\theta = \theta(n, r)$ определяется из соотношения

$$\theta(n, r) = \frac{1}{n}\min\left(\frac{(r-2^n)(2^{n-1}+1)}{(nr+n-2^n-3)2^{n-1}+r}, \frac{r-(n-2)2^{n-1}-4}{r+2^{n-1}-4}, \frac{r-2^{n-1}}{nr-2^{n-1}+n-1}\right).$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\theta(9,3) = \frac{1}{51}, \qquad \theta(4,21) = \frac{1}{100}, \qquad \theta(5,53) = \frac{1}{325},$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-ae, 1-ae]$, $ae\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Для некоторого η, $\eta < 0,1\tau$ через $\mathfrak{M}(\eta)$ обозначим те числа α, для которых $q \leqslant \omega$, через $\mathfrak{m}(\eta)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(\eta)$ и $\mathfrak{m}(\eta)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

После создания метода тригонометрических сумм И.М.Виноградова вывод асимптотических формул для количества решений в классических аддитивных проблемах, к которым относится проблема Варинга, тернарная проблема Гольдбаха, проблема Варинга-Гольдбаха, проблема Эстермана, сводятся к двум следующим задачам:

- исследованию поведения тригонометрических сумм Г.Вейля вида

  $$T_n(\alpha, x) = \sum_{m \leqslant x} e(\alpha m^n), \qquad S_n(\alpha, x) = \sum_{p \leqslant x} e(\alpha p^n),$$

  в малых окрестностях центра больших дуг $\mathfrak{M}(\eta)$,

- получение нетривиальных оценок этих сумм в малых дугах $\mathfrak{m}(\eta)$.

Вывод асимптотических формул для количества решений в классических аддитивных проблемах становится гораздо труднее, если требовать, что все слагаемые почти пропорциональны или все они почты равны (аддитивная задача с почти пропорциональными слагаемыми при $\mu_1 = \ldots = \mu_r$ превращается в задачу с почти равными слагаемыми), так как вместо тригонометрических сумм Г.Вейля $T_n(\alpha, x)$ и $S_k(\alpha, x)$ возникают короткие тригонометрические суммы Г.Вейля вида

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\leqslant x} e(\alpha m^n), \qquad S_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<p\leqslant x} e(\alpha p^n),$$

причём, если $n > 1$, то длина и границы коротких тригонометрических сумм зависят от чисел μ_i, то есть, каждой из r слагаемых соответствует своя короткая тригонометрическая сумма, в случае аддитивных задач с почти равными слагаемыми все эти суммы совпадают. Более конкретно решения этих классических аддитивных проблем с почти пропорциональными слагаемыми сводятся к трём следующим задачам:

- исследования поведения коротких тригонометрических сумм $T_n(\alpha; x, y)$ и $S_n(\alpha; x, y)$ в малых окрестностях центра больших дуг $\mathfrak{M}(\eta)$;
- нахождение нетривиальных оценок этих коротких тригонометрических сумм в больших дугах $\mathfrak{M}(\eta)$ кроме малых окрестностей их центров;
- получение нетривиальных оценок этих сумм в малых дугах $\mathfrak{m}(\eta)$.

Поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T_n(\alpha; x, y)$ для фиксированного n в больших дугах было исследовано в работах [14, 15] (см. также [16, 17]). Воспользовавшись этими результатами (см. ниже лемма 1 и следствия 1 и 2) в сочетании с нетривиальными оценками сумм $T_n(\alpha; x, y)$ в малых дугах [18], были доказаны асимптотические формулы для количества решений в следующих аддитивных задачах с почти равными слагаемыми:

- проблема Варинга с почти равными слагаемыми в случаях $n = 3, 4, 5$, точнее были найдены [19, 20, 21, 15], асимптотические формулы для количества решений диофантова уравнения (5), с условиями

  $$\left|x_i - \left(\frac{N}{2^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right| \leqslant H, \qquad i = 1, \ldots, 2^n + 1, \qquad H \geqslant N^{\frac{1}{n}-\theta(n)+\varepsilon};$$

  где

  $$\theta(3) = \frac{1}{30}, \qquad \theta(4) = \frac{1}{108}, \qquad \theta(5) = \frac{1}{340}.$$

- обобщение [16, 14, 22] тернарной проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде

  $$p_1 + p_2 + m^n = N,$$

  при $n = 2, 3, 4$, в простых числах p_1, p_2 и натурального m, с условиями

  $$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \quad i = 1, 2, \qquad \left|m^n - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{1-\theta(n)}\mathscr{L}^{c_n},$$

  соответственно при

  $$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \qquad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \qquad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}.$$

В этой работе, развивая методы вышеприведённых работ [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21], докажем, что теорема Е.М.Райта об асимптотической формуле в обобщении проблемы Варинга для девяти почти пропорциональных кубов имеет место при условии

$$\theta=\theta(9,3)\geqslant\frac{1}{30}+\varepsilon.$$

Теорема 1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, $\mu_1,\ldots,\mu_9$ — положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию*

$$\mu_1+\ldots+\mu_9=1,$$

$J_{3,9}(N,H)$ — число представлений N суммою девяти кубов натуральных чисел x_i, с условиями

$$|x_i^3-\mu_iN|\leqslant H,\qquad i=1,\ldots,9. \tag{2}$$

Тогда при $H\geqslant N^{1-\frac{1}{30}+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$J_{3,9}(N,H)=\frac{259723}{44089920}\prod_{k=1}^{9}\mu_k^{-\frac{2}{3}}\mathfrak{S}(N)\frac{H^8}{N^6}+O\left(\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\right),$$

где $\mathfrak{S}(N)$ – особый ряд, сумма которого превосходит некоторое положительное постоянное, а постоянное под знаком O зависит от чисел $\mu_1,\ldots,\mu_9$.

В этой работе мы также обобщаем теорему Хуа Ло-кена ([25], лемма 2.5), то есть, оценку

$$\int_0^1|T_n(\alpha,x)|^{2^k}\ll x^{2^k-k+\varepsilon},\qquad 1\leqslant k\leqslant n,$$

для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T_n(\alpha;x,y)$, которой воспользуемся при доказательстве теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть x и y — натуральные числа, $\sqrt{x}<y\leqslant x\mathscr{L}^{-1}$, тогда имеет место оценка*

$$\int_0^1|T_n(\alpha;x,y)|^{2^k}\,d\alpha\ll y^{2^k-k+\varepsilon},\qquad 1\leqslant k\leqslant n.$$

Теорема 1 доказывается круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова, наряду с теоремой 2 мы используем

- асимптотическую формулу для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T_3(\alpha;x,y)$ в малой окрестности центра больших дуг (следствие 1 леммы 1);
- нетривиальную оценку для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T_3(\alpha;x,y)$ в больших дугах за исключением малой окрестности их центров (следствие 2 леммы 1);
- нетривиальную оценку коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T_n(\alpha;x,y)$ в малых дугах (лемма 2), при $n=3$.

Обозначения. $N>N_0$ – натуральное число,ε — произвольное положительное число, не превосходящее 0.00001, $\mathscr{L}=\ln N$,

$$S(a,q)=\sum_{m=1}^{q}e\left(\frac{am^n}{q}\right),\qquad\qquad \gamma_n(\lambda;x,y)=\int_{-0,5}^{0,5}e\left(\lambda\left(x-\frac{y}{2}+yu\right)^n\right)du.$$

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. [14, 15]. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$ и $\lambda \geqslant 0$, тогда при $\{n\lambda x^{n-1}\} \leqslant \frac{1}{2q}$, имеет место формула*

$$T_n(\alpha, x, y) = \frac{S_n(a,q)}{q}T_n(\lambda; x, y) + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

а при $\{n\lambda x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$ имеет место оценка

$$|T_n(\alpha, x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}}\ln q + \min_{2\leqslant k\leqslant n}\left(yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}q^{-\frac{1}{n}}\right).$$

Следствие 1. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2nqx^{n-1}}$, тогда имеет место соотношение*

$$T_n(\alpha, x, y) = \frac{y}{q}S_n(a,q)\gamma_n(\lambda; x, y) + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Следствие 2. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}$, тогда имеет место оценка*

$$T_n(\alpha; x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}}\ln q + \min_{2\leqslant k\leqslant n}\left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{1-\frac{1}{k}}q^{\frac{1}{k}-\frac{1}{n}}\right).$$

Лемма 2. [18]. *Пусть $x \geqslant x_0 > 0$, α — вещественное число, $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$, $(a,q) = 1$, тогда при $\sqrt{x} < y \leqslant 0,01x$ имеет место оценка*

$$T_3(\alpha; x, y) \leqslant 6y^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{q} + \frac{q}{y^3}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Лемма 3. [23]. *Пусть $(a,q) = 1$, q — натуральное число. Тогда имеем*

$$S_3(a,q) = \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{ak^3}{q}\right) \leqslant 6,1q^{\frac{2}{3}}.$$

Лемма 4. [23]. *Пусть действительная функция — $f(u)$, и монотонная функция — $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ — монотонна, $|f'(u)| \geqslant m_1 > 0$ и $|g(u)| \leqslant M$. Тогда справедлива оценка:*

$$\int_a^b g(u)e(f(u))du \ll \frac{M}{m_1}.$$

Пусть Δ_k означает k-ое применение разностного оператора, так что для любой функции действительного переменного $f(u)$

$$\begin{aligned}&\Delta_1(f(u); h) = f(u+h) - f(u),\\ &\Delta_{k+1}(f(u); h_1, \ldots, h_{k+1}) = \Delta_1(\Delta_k(f(u); h_1, \ldots, t_k); h_{k+1}).\end{aligned} \tag{3}$$

Лемма 5. *При $k = 1, \ldots, n-1$ имеет место соотношение*

$$\Delta_k(u^n; h_1, \ldots, h_k) = h_1 \ldots h_k g_k(u; h_1, \ldots, h_k),$$

где $g_k = g_k(u; h_1, \ldots, h_k)$ является формой $n-k$-го порядка с целыми коэффициентами, имеющей относительно и степень $n-k$ и старший коэффициент $n(n-1)\ldots(n-k+1)$, то есть

$$g_k(u; h_1, \ldots, h_k) = \frac{n!}{(n-k)!}u^{n-k} + \ldots.$$

Доказательство. Применяя формулу (3), найдём

$$\Delta_1(u^n;h_1)=(u+h_1)^n-u^n=\sum_{i_1=1}^{n}C_n^{i_1}h_1^{i_1}u^{n-i_1},$$

$$\Delta_2(u^n;h_1,h_2)=\Delta_1\left(\Delta_1(u^n;h_1);h_2\right)=\Delta_1\left(\sum_{i_1=1}^{n}C_n^{i_1}h_1^{i_1}u^{n-i_1};h_2\right)=$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n}C_n^{i_1}h_1^{i_1}(u+h_2)^{n-i_1}-\sum_{i_1=1}^{n}C_n^{i_1}h_1^{i_1}u^{n-i_1}=\sum_{i_1=1}^{n}C_n^{i_1}h_1^{i_1}\sum_{i_2=1}^{n-i_1}C_{n-i_1}^{i_2}h_2^{i_2}u^{n-i_1-i_2}.$$

Последовательно применяя формулу (3), легко можно показать, при $k=1,2,\ldots,n-1$, что имеет место

$$\Delta_k(u^n;h_1,\ldots,h_k)=\sum_{i_1=1}^{n}C_n^{i_1}h_1^{i_1}\sum_{i_2=1}^{n-i_1}C_{n-i_1}^{i_2}h_2^{i_2}\ldots\sum_{i_k=1}^{n-i_1-\ldots-i_{k-1}}C_{n-i_1-\ldots-i_{k-1}}^{i_k}h_k^{i_k}u^{n-i_1-\ldots-i_k}.$$

Из этой формулы следует, что имеет место формула

$$\Delta_k(u^n;h_1,\ldots,h_k)=h_1\ldots h_k g_k(u;h_1,\ldots,h_k),$$

где $g_k=g_k(u;h_1,\ldots,h_k)$ является формой $n-k$-го порядка с целыми коэффициентами, имеющей относительно u степень $n-k$ и старший коэффициент $n(n-1)\ldots(n-k+1)$, то есть

$$g_k(u;h_1,\ldots,h_k)=\frac{n!}{(n-k)!}u^{n-k}+\ldots.$$

Лемма 6. *Пусть $f(m)$ – многочлен степени n, x и y — целые положительные числа, $y<x$,*

$$\mathbb{T}(f(m);x,y)=\sum_{x-y<m\leqslant x}e(f(m))$$

тогда при $k=1,\ldots,n-1$ имеет место

$$|\mathbb{T}(f(m);x,y)|^{2^k}\le(2y)^{2^k-k-1}\sum_{|h_1|<y}\ldots\sum_{|h_k|<y}\mathbb{T}_j,\qquad \mathbb{T}_k=\left|\sum_{m\in I_k}e(\Delta_k(f(m);h_1,\ldots,h_k))\right|,$$

где интервалы $I_k=I_k(x,y;h_1,\ldots,h_k)$ определяются соотношениями:

$$I_1=I_1(x,y;h_1)=(x-y,x]\cap(x-y-h_1,x-h_1],$$
$$I_k=I_k(x,y;h_1,\ldots,h_k)=I_{k-1}(x,y;h_1,\ldots,h_{k-1})\cap I_{k-1}(x-h_k,y;h_1,\ldots,h_{k-1}),$$

то есть, интервал $I_{k-1}(x-h_k,y;h_1,\ldots,h_{k-1})$ получается из $I_{k-1}=I_{k-1}(x,y;h_1,\ldots,h_{k-1})$ сдвигом на $-h_k$ всех интервалов, пересечением которых он является.

Доказательство. Доказательство проводим методом математической индукции по k. При $k=1$ имеем

$$|\mathbb{T}(f(m);x,y)|^2=\sum_{x-y<m\leqslant x}\sum_{x-y-m<h\leqslant x-m}e(f(m+h)-f(u))=\sum_{|h|<y}\sum_{m\in I_1}e(\Delta_1(f(m);h))\leqslant\sum_{|h|<y}\mathbb{T}_1.$$

Предположим, что утверждение леммы выполняется при k, $1\leqslant k\leqslant n-2$, то есть

$$|\mathbb{T}(f(m);x,y)|^{2^k}\le(2y)^{2^k-k-1}\sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\ldots\sum_{|h_k|<y}\mathbb{T}_k.$$

Возводя обе части этого неравенства в квадрат, затем последовательно применяя к суммам по $h_1, \ldots, h_k$ неравенство Коши, найдём

$$|\mathbb{T}(f(m); x, y)|^{2^{k+1}} \leqslant (2y)^{2^{k+1}-(k+1)-1} \sum_{|h_1|<y} \cdots \sum_{|h_k|<y} \mathbb{T}_k^2. \tag{4}$$

Из эквивалентности соотношений $m_1 \in I_k(x, y; h_1, \ldots, h_k)$ и $m_1 - m \in I_k(x-m, y; h_1, \ldots, h_k)$, имеем

$$\mathbb{T}_k^2 = \sum_{m \in I_k(x,y;h_1,\ldots,h_k)} \sum_{m_1 - m \in I_k(x-m,y;h_1,\ldots,h_k)} e(\Delta_k(f(m_1); h_1, \ldots, h_k) - \Delta_k(f(m); h_1, \ldots, h_k)).$$

Обозначая разность $m_1 - m$ через h_{k+1}, затем сделав сумму по h_{k+1} внешней, воспользовавшись эквивалентностью соотношений $h_{k+1} \in I_k(x-m, y; h_1, \ldots, h_k$ и $m \in I_k(x - h_{k+1}, y; h_1, \ldots, h_k)$ и соотношением (3), имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_k^2 &= \sum_{|h_{k+1}|<y} \sum_{\substack{m \in I_k(x,y;h_1,\ldots,h_k) \\ m \in I_k(x-h_{k+1},y;h_1,\ldots,h_k)}} e(\Delta_{k+1}(f(m); h_1, \ldots, h_{k+1})) = \\ &= \sum_{|h_{k+1}|<y} \sum_{m \in I_{k+1}(x,y;h_1,\ldots,h_{k+1})} e(\Delta_{k+1}(f(m); h_1, \ldots, h_{k+1})) \leqslant \sum_{|h_{k+1}|<y} \mathbb{T}_{k+1}.\end{aligned}$$

Подставляя правую часть последнего неравенства в (4), получим утверждение леммы.

3. Доказательство теоремы 2

Воспользуемся методом математической индукции по k. При $k = 1$ воспользовавшись тем, что при $x - y < m_1, m_2 \leqslant x$ диофантовы уравнения $m_1^n = m_2^n$ и $m_1 = m_2$ эквивалентны, имеем

$$\int_0^1 |T_n(\alpha; x, y)|^2 d\alpha = \sum_{x-y<m_1,m_2\leqslant x} \int_0^1 e(\alpha(m_1^n - m_2^n)) d\alpha = \sum_{\substack{x-y<m_1,m_2\leqslant x \\ m_1^n = m_2^n}} 1 = \sum_{x-y<m_1\leqslant x} 1 \ll y.$$

Пусть теперь утверждение теоремы имеет место при $2 \leqslant k \leqslant n-1$, то есть

$$\int_0^1 |T_n(\alpha; x, y)|^{2^k} d\alpha \leqslant y^{2k-k+\varepsilon}. \tag{5}$$

В лемме 6, полагая $f(m) = \alpha m^n$, имеем

$$|T_n(\alpha; x, y)|^{2^k} \leq (2y)^{2^k-k-1} \sum_{|h_1|<y} \cdots \sum_{|h_k|<y} \left| \sum_{m \in I_k} e\left(\alpha \Delta_k(m^n; h_1, \ldots, h_k)\right) \right|.$$

Воспользовавшись леммой 5, находим

$$\Delta_k(m^n; h_1, \ldots, h_k) = h_1 \ldots h_k g_k(m; h_1, \ldots, h_k),$$

где $g_k = g_k(m; h_1, \ldots, h_k)$ является формой $n-k$-го порядка с целыми коэффициентами, имеющей относительно m степень $n-k$ и старший коэффициент $n(n-1)\ldots(n-k+1)$, то есть

$$g_k(m; h_1, \ldots, h_k) = \frac{n!}{(n-k)!} m^{n-k} + \ldots .$$

Отсюда и из условий $x-y<m\leqslant x$, $|h_i|<y$, $i=1,\ldots,k$, $\sqrt{x}<y\leqslant x\mathscr{L}^{-1}$ следует, что существует x_0, такое что при $x>x_0$, выполняется неравенство

$$g_k(m;h_1,\ldots,h_k)>0. \tag{6}$$

Обозначая через $r(h)$ — число решений диофантова уравнения

$$h_1\ldots h_k g_k(m;h_1,\ldots,h_k)=h,$$

относительно переменных m и $h_1\ldots h_k$, $|h_i|<y$, $m\in I_k$, найдём

$$|T_n(\alpha;x,y)|^{2^k}\leq (2y)^{2^k-k-1}\sum_h r(h)e(\alpha h), \tag{7}$$

Заметим, что, если $h\neq 0$, то $r(h)\ll \tau_{k+1}(h)\ll h^{\varepsilon}$. Из неравенства (6) следует, что уравнение

$$h_1\ldots h_k g_k(m;h_1,\ldots,h_k)=0$$

имеет только решение вида $(0,h_2,\ldots,h_k,m)$, $(h_1,0,h_3,\ldots,h_k,m)$, …, $(h_1,\ldots,h_{k-1},0,m)$, для количества которых справедлива оценка

$$r(0)\leqslant \sum_{|h_2|<y}\ldots\sum_{|h_k|<y}\sum_{m\in I_3}1\leqslant (2y)^{k-1}|I_k|\leqslant 2^{k-1}y^k.$$

С другой стороны,

$$|T_n(\alpha;x,y)|^{2^k}=\sum_h \rho(h)(-\alpha h), \tag{8}$$

где $\rho(h)$ – число решений уравнения

$$s_1^n+\ldots+s_\nu^n-t_1^n-\ldots-t_\nu^n=h,\qquad x-y<s_1,t_1,\ldots,s_\nu,t_\nu\leqslant x,\qquad \nu=2^{k-1}.$$

В равенстве (8), полагая $\alpha=0$, находим

$$\sum_h \rho(h)=|T(0;x,y)|^{2^k}\leqslant y^{2^k}. \tag{9}$$

Пользуясь предположением индукции, то есть соотношением (5), найдём

$$\rho(0)=\int_0^1 |T_n(\alpha;x,y)|^{2^k}d\alpha\leqslant y^{2k-k+\varepsilon}.$$

Умножая (7) и (8), интегрируя по α, а затем воспользовавшись значениями $r(0)$, ρ, оценкой $r(h)\ll h^{\varepsilon}$ и соотношением (9), найдём

$$\int_0^1 |T(\alpha;x,y)|^{2^{k+1}}d\alpha\leqslant (2y)^{2^k-k-1}\int_0^1\sum_h r(h)e(\alpha h)\sum_{h'}\rho(h')e(-\alpha h')d\alpha=$$
$$=(2y)^{2^k-k-1}\left(r(0)\rho(0)+\sum_{h\neq 0}r(h)\rho(h)\right)\leqslant (2y)^{2^k-k-1}\left(r(0)\rho(0)+\max_{h\neq 0}r(h)\sum_{h\neq 0}\rho(h)\right)\ll$$
$$\ll y^{2^k-k-1}\left(y^k\cdot y^{2k-k+\varepsilon}+y^{\varepsilon}\cdot y^{2^k}\right)\ll y^{2^{k+1}-k-1+\varepsilon}.$$

4. Доказательство теоремы 1

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$H = N^{1-\frac{1}{30}+\varepsilon}, \qquad \mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_9, \qquad \mu_1 \leqslant \frac{1}{9}, \qquad \mu_9 \geqslant \frac{1}{9}. \tag{10}$$

Пользуясь обозначениями

$$N_k = (\mu_k N + H)^{\frac{1}{3}}, \qquad H_k = (\mu_k N + H)^{\frac{1}{3}} - (\mu_k N - H)^{\frac{1}{3}}, \qquad \tau = 12N_1H_1, \qquad ae\tau = 1,$$

число решений диофантова уравнения (1) при $n = 3$ и $r = 9$ при выполнении условий (2) представим в виде

$$\begin{aligned} J_{3,9}(N,H) &= \int\limits_{-ae}^{1-ae} e(-\alpha N) \prod_{k=1}^{9} \sum_{|n^3-\mu_k N|\leqslant H} e(\alpha n^3) d\alpha = \\ &= \int\limits_{-ae}^{1-ae} e(-\alpha N) \prod_{k=1}^{9} \left(T_3(\alpha; N_k, H_k) + \theta_k\right) d\alpha, \end{aligned}$$

где $|\theta_k|$ равен 1, если $N_k - H_k$ — целое число, и 0 в противном случае. Верхняя граница N_k и длина H_k суммы $T_3(\alpha; N_k, H_k)$ относительно N и H выражаются через следующие асимптотические формулы

$$N_k = \mu_k^{\frac{1}{3}} N^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{H}{\mu_k N}\right)^{\frac{1}{3}} = \mu_k^{\frac{1}{3}} N^{\frac{1}{3}} \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right), \tag{11}$$

$$H_k = \mu_k^{\frac{1}{3}} N^{\frac{1}{3}} \left(\left(1 + \frac{H}{\mu_k N}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 - \frac{H}{\mu_k N}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2H}{3\mu_k^{\frac{2}{3}} N^{\frac{2}{3}}} \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right), \tag{12}$$

При $\nu = 1, 2, \ldots, 9$ и $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\nu \leqslant 9$, вводя обозначение

$$\mathscr{D}_\nu = \mathscr{D}(i_1, \ldots, i_\nu) = \{1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{i_1, \ldots, i_\nu\},$$

и воспользовавшись тождеством

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{9} \left(T_3(\alpha; N_k, H_k) + \theta_k\right) &= \prod_{k=1}^{9} T_3(\alpha; N_k, H_k) + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{8} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant 9} \theta_{i_1}\ldots\theta_{i_\nu} \prod_{k\in\mathscr{D}_\nu} T_3(\alpha; N_k, H_k) + \prod_{k=1}^{9} \theta_k, \end{aligned}$$

представим $J_{3,9}(N,H)$, в виде

$$J_{3,9}(N,H) = \int\limits_{-ae}^{1-ae} e(-\alpha N) \prod_{k=1}^{9} T_3(\alpha; N_k, H_k) d\alpha + R_1(N,H), \tag{13}$$

$$R_1(N,H) = \sum_{\nu=1}^{8} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant 9} \theta_{i_1}\ldots\theta_{i_\nu} \int\limits_{-ae}^{1-ae} e(-\alpha N) \prod_{k\in\mathscr{D}_\nu} T_3(\alpha; N_k, H_k) d\alpha.$$

Переходя к оценкам, а затем, представляя множество $\mathscr{D}_\nu$ в виде

$$\mathscr{D}_\nu = \{1,2,\ldots,9\} \setminus \{i_1,\ldots,i_\nu\} = \{\beta_1,\ldots,\beta_{9-\nu}\},$$

имеем

$$\begin{aligned} R_1(N,H) &\leqslant \sum_{\nu=1}^{8} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant 9} \int\limits_{-ae}^{1-ae} \prod_{k\in\mathscr{D}_\nu} |T_3(\alpha;N_k,H_k)|\,d\alpha = \\ &= \sum_{\nu=1}^{8} \sum_{1\leqslant\beta_1<\ldots<\beta_{9-\nu}\leqslant 9} R_1\left(N,H,\beta_1,\ldots,\beta_{9-\nu}\right), \qquad (14) \\ R_1\left(N,H,\beta_1,\ldots,\beta_{9-\nu}\right) &= \int\limits_{-ae}^{1-ae} \prod_{j=1}^{9-\nu} \left|T_3(\alpha;N_{\beta_j},H_{\beta_j})\right| d\alpha. \end{aligned}$$

Оценим $R_1\left(N,H,\beta_1,\ldots,\beta_{9-\nu}\right)$ при $\nu=1,\ldots,8$ воспользовавшись неравенством Коши, теоремой 2 и неравенством $H_k \ll HN^{-\frac{2}{3}}$, которое следует из (12). Имеем

$$R_1(N,H,\beta_1,\ldots,\beta_8) \leqslant \prod_{j=1}^{8}\left(\int\limits_{-ae}^{1-ae}\left|T_3(\alpha;N_{\beta_j},H_{\beta_j})\right|^8 d\alpha\right)^{\frac{1}{8}} \ll \prod_{j=1}^{8}\left(H_{\beta_j}^{5+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{8}} \ll \left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}}\right)^{5+\varepsilon}.$$

$$\begin{aligned} R_1(N,H,\beta_1,\ldots,\beta_7) &\leqslant \prod_{j=1}^{6}\left(\int\limits_{-ae}^{1-ae}\left|T_3(\alpha;N_{\beta_j},H_{\beta_j})\right|^8 d\alpha\right)^{\frac{1}{8}} \left(\int\limits_{-ae}^{1-ae}|T_3(\alpha;N_{\beta_7},H_{\beta_7})|^4 d\alpha\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant \\ &\ll \prod_{j=1}^{6}\left(H_{\beta_j}^{5+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{8}}\left(H_{\beta_7}^{2+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \ll \left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{17}{4}+\varepsilon}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1(N,H,\beta_1,\ldots,\beta_6) &\leqslant \prod_{j=1}^{4}\left(\int\limits_{-ae}^{1-ae}\left|T_3(\alpha;N_{\beta_j},H_{\beta_j})\right|^8 d\alpha\right)^{\frac{1}{8}} \prod_{j=5}^{6}\left(\int\limits_{-ae}^{1-ae}\left|T_3(\alpha;N_{\beta_j},H_{\beta_j})\right|^4 d\alpha\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant \\ &\ll \prod_{j=1}^{4}\left(H_{\beta_j}^{5+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{8}}\prod_{j=5}^{6}\left(H_{\beta_j}^{2+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{7}{2}+\varepsilon}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1(N,H,\beta_1,\ldots,\beta_5) &\leqslant \prod_{j=1}^{4}\left(\int\limits_{-ae}^{1-ae}\left|T_3(\alpha;N_{\beta_j},H_{\beta_j})\right|^8 d\alpha\right)^{\frac{1}{8}} \left(\int\limits_{-ae}^{1-ae}|T_3(\alpha;N_{\beta_5},H_{\beta_5})|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ &\ll \prod_{j=1}^{4}\left(H_{\beta_j}^{5+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{8}} H_{\beta_5}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}}\right)^{3+0{,}5\varepsilon}. \end{aligned}$$

$$R_1(N,H,\beta_1,\ldots,\beta_4) \leqslant \prod_{j=1}^{4}\left(\int\limits_{-ae}^{1-ae}\left|T_3(\alpha;N_{\beta_j},H_{\beta_j})\right|^4 d\alpha\right)^{\frac{1}{4}} \ll \prod_{j=1}^{4}\left(H_{\beta_j}^{2+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \ll \left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}}\right)^{2+\varepsilon}.$$

$$R_1(N,H,\beta_1,\beta_2,\beta_3) \leqslant \prod_{j=1}^{2}\left(\int\limits_{-ae}^{1-ae}\left|T_3(\alpha;N_{\beta_j},H_{\beta_j})\right|^4 d\alpha\right)^{\frac14}\left(\int\limits_{-ae}^{1-ae}\left|T_3(\alpha;N_{\beta_3},H_{\beta_3})\right|^2 d\alpha\right)^{\frac12} \ll$$

$$\ll \prod_{j=1}^{2}\left(H_{\beta_j}^{2+\varepsilon}\right)^{\frac14} H_{\beta_3}^{\frac12} = \left(\frac{H}{N^{\frac23}}\right)^{\frac32+0,5\varepsilon}.;$$

$$R_1(N,H,\beta_1,\beta_2) \leqslant \prod_{j=1}^{2}\left(\int\limits_{-ae}^{1-ae}\left|T_3(\alpha;N_{\beta_j},H_{\beta_j})\right|^2 d\alpha\right)^{\frac12} \ll \frac{H}{N^{\frac23}};$$

$$R_1(N,H,\beta_1) \leqslant \left(\int\limits_{-ae}^{1-ae}\left|T_3(\alpha;N_{\beta_3},H_{\beta_3})\right|^2 d\alpha\right)^{\frac12} \ll \left(\frac{H}{N^{\frac23}}\right)^{\frac12}.$$

Подставляя найденные оценки для $R_1\left(N,H,\beta_1,\ldots,\beta_{9-\nu}\right)$ при ν, $\nu=1,2,\ldots,8$ в формулу (14), получим

$$R_1(N,H) \leqslant \sum_{\nu=1}^{8} C_9^{9-\nu}\max_{1\leqslant\beta_1<\ldots<\beta_{9-\nu}\leqslant 9} R_1\left(N,H,\beta_1,\ldots,\beta_{9-\nu}\right) \ll \left(\frac{H}{N^{\frac23}}\right)^{5+\varepsilon} =$$

$$= \frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\cdot\frac{N^{\frac83+\frac23\varepsilon}\mathscr{L}^7}{H^{3-\varepsilon}} = \frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^8}\cdot N^{-\frac{7}{30}-\frac{41}{30}\varepsilon+\varepsilon^2}\mathscr{L}^7 \ll \frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}.$$

Отсюда из (13), имеем

$$J_{3,9}(N,H) = \int\limits_{-ae}^{1-ae} e(-\alpha N)\prod_{k=1}^{9} T_3(\alpha;N_k,H_k)d\alpha + O\left(\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\right). \tag{15}$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-ae,\ 1-ae]$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q}+\lambda, \qquad (a,q)=1, \qquad 1\leqslant q\leqslant\tau, \qquad |\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau}. \tag{16}$$

Легко видеть, что в этом представлении $0\leqslant a\leqslant q-1$, причём $a=0$ лишь при $q=1$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим те α, для которых в представлении (16) выполняется условие $q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}$. Через $\mathfrak{m}$ обозначим оставшиеся α. Множество $\mathfrak{M}$ состоит из непересекающихся отрезков. Разобьём множество $\mathfrak{M}$ на множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$:

$$\mathfrak{M}_1 = \bigcup_{1\leqslant q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}}\ \bigcup_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\mathfrak{M}_1(a,q), \qquad \mathfrak{M}_2=\mathfrak{M}\setminus\mathfrak{M}_1,$$

$$\mathfrak{M}_1(a,q) = \left[\frac{a}{q}-\eta_q\leqslant\alpha\leqslant\frac{a}{q}+\eta_q\right], \qquad \eta_q=\frac{1}{6qN_9^2}.$$

Обозначая через $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{m}$, с учётом (15), получим

$$J_{3,9}(N,H) = I(\mathfrak{M}_1)+I(\mathfrak{M}_2)+I(\mathfrak{m})+O\left(\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^8}\right). \tag{17}$$

В последней формуле первый член, то есть $I(\mathfrak{M}_1)$ доставляет главный член асимптотической формулы для $J_{3,9}(N,H)$, а $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

4.1. Вычисление интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$

По определению интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$ имеем:

$$I(\mathfrak{M}_1)=\sum_{q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\int\limits_{|\lambda|\leqslant\eta_q}\prod_{k=1}^{9}T_3\left(\frac{a}{q}+\lambda;N_k,H_k\right)e\left(-\left(\frac{a}{q}+\lambda\right)N\right)d\lambda. \tag{18}$$

Для суммы $T_3\left(\frac{a}{q}+\lambda;N_k,H_k\right)$ выполняются оба условия следствия 1 леммы 1. Действительно, ввиду соотношений (11), (12) и (10) имеет место неравенство

$$\begin{aligned}\tau=&12N_1H_1=12\mu_k^{\frac13}N^{\frac13}\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right)\cdot\frac{2H}{3\mu_k^{\frac23}N^{\frac23}}\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right)=\\&=\frac{8H}{\mu_1^{\frac13}N^{\frac13}}\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right)\geqslant\frac{8H}{\mu_k^{\frac13}N^{\frac13}}\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right)=12N_kH_k,\end{aligned} \tag{19}$$

а из соотношений $|\lambda|\leqslant\eta_q,\quad \eta_q=\dfrac{1}{6qN_9^2}$ и $\dfrac{1}{6qN_9^2}\leqslant\dfrac{1}{6qN_k^2}$ следует, что

$$|\lambda|\leqslant\frac{1}{6qN_k^2}.$$

Поэтому согласно этому следствию для $k=1,\ldots,9$ имеем

$$T_3\left(\frac{a}{q}+\lambda,N_k,H_k\right)=\frac{H_kS_3(a,q)}{q}\gamma_3(\lambda;N_k,H_k)+R_2,\qquad R_2\ll q^{\frac12+\varepsilon}.$$

Умножая обе части этих формул по всем $k=1,2,\ldots,9$, а затем применяя тождество

$$\prod_{k=1}^{9}(a_k+b)=\prod_{k=1}^{9}a_k+b^9+\sum_{\nu=1}^{8}b^{9-\nu}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant9}\prod_{k=1}^{\nu}a_{i_k},$$

при $a_k=\dfrac{H_kS_3(a,q)}{q}\gamma_3(\lambda;N_k,H_k)$ и $b=R_2$, получим

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{9}T_3\left(\frac{a}{q}+\lambda,N_k,H_k\right)=\frac{S_3^9(a,q)}{q^9}\prod_{k=1}^{9}H_k\gamma_3(\lambda;N_k,H_k)+R_2^9+\\+\sum_{\nu=1}^{8}R_2^{9-\nu}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant9}\prod_{k=1}^{\nu}\frac{H_{i_k}S_3(a,q)}{q}\gamma_3(\lambda;N_{i_k},H_{i_k}).\end{aligned}$$

Пользуясь соотношением $R_2\ll q^{\frac12+\varepsilon}$, оценкой $|S_3(a,q)|\ll q^{\frac23}$ (лемма 3), последние два слагаемых оценим сверху:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{9}T_3\left(\frac{a}{q}+\lambda,N_k,H_k\right)-\frac{S_3^9(a,q)}{q^9}\prod_{k=1}^{9}H_k\gamma_3(\lambda;N_k,H_k)\ll\\\ll\sum_{\nu=1}^{8}q^{\frac92-\frac{5\nu}{6}+(9-\nu)\varepsilon}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant9}\prod_{k=1}^{\nu}H_{i_k}|\gamma_3(\lambda;N_{i_k},H_{i_k})|+q^{4,5+9\varepsilon}.\end{aligned}$$

Отсюда и из формулы (18), находим

$$I(\mathfrak{M}_1)=\prod_{k=1}^{9}H_k\sum_{q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}}\mathscr{A}(k,q)\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\frac{S_3^9(a,q)}{q^9}e\left(-\frac{aN}{q}\right)+R_1(\mathfrak{M}_1)+R_2(\mathfrak{M}_1),\tag{20}$$

$$\mathscr{A}(k,q)=\int\limits_{|\lambda|\leqslant\eta_q}\prod_{k=1}^{9}\gamma_3(\lambda;N_k,H_k)e(-\lambda N)d\lambda,$$

$$R_1(\mathfrak{M}_1)\ll\sum_{\nu=1}^{8}\sum_{q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}}q^{\frac{11}{2}-\frac{5\nu}{6}+(9-\nu)\varepsilon}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant 9}\int\limits_{|\lambda|\leqslant\eta_q}\prod_{k=1}^{\nu}H_{i_k}|\gamma_3(\lambda;N_{i_k},H_{i_k})|d\lambda,\tag{21}$$

$$R_2(\mathfrak{M}_1)\ll\sum_{q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}}q^{4,5+9\varepsilon}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\int\limits_{|\lambda|\leqslant\eta_q}d\lambda=\frac{1}{3N_9^2}\sum_{q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}}\varphi(q)q^{3,5+9\varepsilon}.$$

4.1.1. Оценка $R_2(\mathfrak{M}_1)$

Воспользовавшись формулами (12) и (11), имеем

$$\begin{aligned}R_2(\mathfrak{M}_1)&\ll\frac{1}{N_9^2}\left(\frac{H_9}{\mathscr{L}}\right)^{5,5+9\varepsilon}\ll\left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}}\right)^{5,5+9\varepsilon}\frac{1}{N^{\frac{2}{3}}}=\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\cdot\frac{N^{\frac{5}{3}-6\varepsilon}\mathscr{L}^{\frac{3}{2}-9\varepsilon}}{H^{\frac{5}{2}-9\varepsilon}}=\\&=\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\cdot N^{-\frac{9}{12}+\frac{\varepsilon}{5}+9\varepsilon^2}\mathscr{L}^{\frac{3}{2}-9\varepsilon}\ll\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^8}.\end{aligned}\tag{22}$$

4.1.2. Оценка $R_1(\mathfrak{M}_1)$

Оценим сначала тригонометрический интеграл

$$\gamma_3(\lambda;N_{i_k},H_{i_k})=\int_{-0,5}^{0,5}e\left(f_{i_k}(u)\right)du,\qquad f_{i_k}(u)=\lambda\left(N_{i_k}-\frac{H_{i_k}}{2}+H_{i_k}u\right)^3.$$

Воспользовавшись соотношениями (11) и (12), находим

$$\begin{aligned}&H_kN_k^2=\frac{2H}{3}\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right), &&H_k^2N_k\ll\frac{H^2}{N},\\ &\frac{H_k}{N_k}=\frac{2H}{3\mu_kN}\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right), &&H_k^3\ll\frac{H^3}{N^2}\ll\frac{H^2}{N}.\end{aligned}\tag{23}$$

Пользуясь этими соотношениями оценим снизу $f'_{i_k}(u)$. Имеем

$$\begin{aligned}|f'_{i_k}(u))|&=3|\lambda|H_{i_k}\left(N_{i_k}-\frac{H_{i_k}}{2}+H_{i_k}u\right)^2\geqslant3|\lambda|H_{i_k}(N_{i_k}-H_{i_k})^2=\\&=3|\lambda|N_{i_k}^2H_{i_k}\left(1-\frac{H_{i_k}}{N_{i_k}}\right)^2=2|\lambda|H\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right)\geqslant\frac{6H}{\mathscr{L}}|\lambda|.\end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 4, найдём

$$|\gamma_3(\lambda;N_{i_k},H_{i_k})|\leqslant\min\left(1,\frac{\mathscr{L}}{6H|\lambda|}\right).\tag{24}$$

Подставляя эту оценку в правую часть (21), и вводя обозначение $\lambda_1 = \mathscr{L}(6H)^{-1}$, получим

$$R_1(\mathfrak{M}_1) \ll \sum_{\nu=1}^{8} \sum_{q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}} q^{\frac{11}{2}-\frac{5\nu}{6}+(9-\nu)\varepsilon} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant 9} \int\limits_{|\lambda|\leqslant\eta_q} \prod_{k=1}^{\nu} H_{i_k} \min\left(1, \frac{\lambda_1}{|\lambda|}\right) d\lambda =$$

$$= 2\sum_{\nu=1}^{8} \sum_{q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}} q^{\frac{11}{2}-\frac{5\nu}{6}+(9-\nu)\varepsilon} J(\nu) \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant 9} \prod_{k=1}^{\nu} H_{i_k}, \qquad (25)$$

$$J(\nu) = \int\limits_0^{\eta_q} \min\left(1, \frac{\lambda_1^\nu}{\lambda^\nu}\right) d\lambda.$$

Имеет место неравенство $\lambda_1 < \eta_q$. Действительно, воспользовавшись условием $q \leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}$, а затем соотношением (23), находим

$$\frac{\lambda_1}{\eta_q} = \frac{qN_9^2\mathscr{L}}{H} \leqslant \frac{H_9N_9^2}{H} = \frac{2\left(1+O(HN^{-1})\right)}{3} \leqslant \frac{3}{4}.$$

При $\nu \geqslant 2$, разбивая отрезок интегрирования в интеграле $J(\nu)$ на отрезки $[0,\lambda_1]$ и $[\lambda_1],\eta_q]$, имеем

$$J(\nu) = \int\limits_0^{\lambda_1} d\lambda + \lambda_1^\nu \int\limits_{\lambda_1}^{\eta_q} \frac{d\lambda}{\lambda^\nu} = \frac{\lambda_1}{\nu-1}\left(\nu - \left(\frac{\lambda_1}{\eta_q}\right)^{\nu-1}\right) \leqslant \frac{\nu}{\nu-1}\lambda_1 \leqslant 2\lambda_1 = \frac{\mathscr{L}}{3H}.$$

В случае $\nu = 1$ аналогично, получим

$$J(1) = \int\limits_0^{\eta_q} \min\left(1, \frac{\lambda_1}{\lambda}\right) d\lambda = \lambda_1\left(1 + \ln\frac{\eta_q}{\lambda_1}\right) = \lambda_1\left(1 + \ln\frac{H}{qN_9^2\mathscr{L}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_1\left(1 + \ln\frac{H}{N_9^2\mathscr{L}}\right) \leqslant \lambda_1\left(1+\ln H\right) \ll \lambda_1\mathscr{L} \ll \frac{\mathscr{L}^2}{H}.$$

Воспользовавшись соотношениями (12) и (10), найдём

$$\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant 9} \prod_{k=1}^{\nu} H_{i_k} = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant 9} \prod_{k=1}^{\nu} \frac{2H}{3\mu_{i_k}^{\frac{2}{3}}N^{\frac{2}{3}}}\left(1 + O\left(\frac{H^2}{N^2}\right)\right) \ll \left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}}\right)^\nu.$$

Подставляя правую часть этого неравенства и оценку для интеграла $J(\nu)$ в правую часть соотношения (25), а затем пользуясь при $k = 9$ формулой (12), имеем

$$R_1(\mathfrak{M}_1) \ll \frac{\mathscr{L}^2}{H}\sum_{\nu=1}^{8}\left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}}\right)^\nu \sum_{q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}} q^{\frac{11}{2}-\frac{5\nu}{6}+(9-\nu)\varepsilon} \ll \frac{\mathscr{L}^2}{H}\sum_{\nu=1}^{8}\mathscr{L}^\nu\left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}}\right)^{\frac{13}{2}+\frac{\nu}{6}+(9-\nu)\varepsilon} \ll$$

$$\ll \frac{H^{\frac{17}{3}+\varepsilon}\mathscr{L}^{\frac{10}{3}-\varepsilon}}{N^{\frac{40}{9}+\frac{2}{3}\varepsilon}} = \frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\cdot\frac{N^{\frac{14}{9}-\frac{2}{3}\varepsilon}\mathscr{L}^{\frac{31}{3}-\varepsilon}}{H^{\frac{7}{3}-\varepsilon}} = \frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\cdot N^{-\frac{7}{10}-\frac{61}{30}\varepsilon+\varepsilon^2}\mathscr{L}^{\frac{31}{3}-\varepsilon} \ll \frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}. \qquad (26)$$

4.1.3. Вычисление интеграла $\mathscr{A}(k,q)$

Разбиваем интервал интегрирования на интервалы $|\lambda| \leqslant \lambda_2$ и $\lambda_2 < |\lambda| \leqslant \eta_q$, где

$$\lambda_2 = \min\left(\frac{\mathscr{L}^2}{6H_9N_9^2}, \eta_q\right) \leqslant \frac{\mathscr{L}^2}{6H_9N_9^2} \leqslant \frac{\mathscr{L}^2}{H},$$

и обозначая интегралы по этим интервалам соответственно через $\mathscr{A}_1(k,q)$ и $\mathscr{A}_2(k,q)$, получим

$$\mathscr{A}(k,q)=\mathscr{A}_1(k,q)+\mathscr{A}_2(k,q). \tag{27}$$

Воспользовавшись формулами (23), а также соотношением $N_k^3=\mu_kN+H$, имеем

$$\left(N_k-H_k\left(\frac{1}{2}-u\right)\right)^3=N_k^3-3N_k^2H_k\left(\frac{1}{2}-u\right)+3N_kH_k^2\left(\frac{1}{2}-u\right)^2-H_k^3\left(\frac{1}{2}-u\right)^3=$$

$$=\mu_kN+H-3\cdot\frac{2H}{3}\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right)\left(\frac{1}{2}-u\right)+O\left(\frac{H^2}{N}\right)=\mu_kN+2Hu+O\left(\frac{H^2}{N}\right).$$

Умножая обе части этого равенства на λ, и имея в виду $\lambda_2\leqslant H^{-1}\mathscr{L}^2$, найдём

$$\lambda\left(N_k-\frac{H_k}{2}+H_ku\right)^3=\mu_kN\lambda+2Hu\lambda+R_3(N,H),\qquad R_3(N,H)\ll\frac{H\mathscr{L}^2}{N}.$$

Следовательно

$$\gamma_3(\lambda;N_k,H_k)=e\left(\mu_kN\lambda\right)\int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5}e\left(2H\lambda u\right)du+R_3(N,H)=e\left(\mu_kN\lambda\right)\frac{\sin\left(2\pi H\lambda\right)}{2\pi H\lambda}+R_3(N,H).$$

Умножая обе части этих формул по всем $k=1,2,\ldots,9$, применяя тождество

$$\prod_{k=1}^{9}(a_k+b)=\prod_{k=1}^{9}a_k+b^9+\sum_{\nu=1}^{8}b^{9-\nu}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant 9}\prod_{k=1}^{\nu}a_{i_k},$$

а затем, воспользовавшись условием $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_9=1$, имеем

$$\prod_{k=1}^{9}\gamma_3(\lambda;N_k,H_k)=\prod_{k=1}^{9}\left(e\left(\mu_kN\lambda\right)\frac{\sin\left(2\pi H\lambda\right)}{2\pi H\lambda}+R_3(N,H)\right)=\frac{\sin^9\left(2\pi H\lambda\right)}{(2\pi H\lambda)^9}e\left(N\lambda\right)+R_4(N,H),$$

$$R_4(N,H)=R_3^9(N,H)+\sum_{\nu=1}^{8}R_3^{9-\nu}(N,H)\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant 9}\prod_{k=1}^{\nu}e\left(\mu_{i_k}N\lambda\right)\frac{\sin\left(2\pi H\lambda\right)}{2\pi H\lambda}=$$

$$=R_3^9(N,H)+\sum_{\nu=1}^{8}\frac{\sin^\nu\left(2\pi H\lambda\right)}{(2\pi H\lambda)^\nu}R_3^{9-\nu}(N,H)\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant 9}e\left(\lambda N\sum_{k=1}^{\nu}\mu_{i_k}\right)\ll$$

$$\ll\sum_{\nu=0}^{8}\frac{|\sin(2\pi H\lambda)|^\nu}{|2\pi\lambda H|^\nu}\left(\frac{H\mathscr{L}^2}{N}\right)^{9-\nu}\ll\frac{H^9\mathscr{L}^{18}}{N^9}+\frac{|\sin(2\pi H\lambda)|^8}{|2\pi\lambda H|^8}\cdot\frac{H\mathscr{L}^2}{N}.$$

Отсюда и из определения интеграла $\mathscr{A}_1(k,q)$, находим

$$\mathscr{A}_1(k,q)=\int\limits_{|\lambda|\leqslant\lambda_2}\left(\frac{\sin^9\left(2\pi H\lambda\right)}{(2\pi H\lambda)^9}e\left(N\lambda\right)+R_4(N,H)\right)e(-\lambda N)d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi H}\int\limits_{0}^{2\pi H\lambda_2}\frac{\sin^9 t}{t^9}dt+R_5(N,H)+R_6(N,H),$$

$$R_5(N,H)\ll\int\limits_{|\lambda|\leqslant\lambda_2}\frac{H^9\mathscr{L}^{18}}{N^9}d\lambda\leqslant\frac{2H^8\mathscr{L}^{20}}{N^9}=\frac{1}{H\mathscr{L}^7}\cdot\frac{H^9\mathscr{L}^{27}}{N^9}\ll\frac{1}{H\mathscr{L}^7},$$

$$R_6(N,H)\ll\frac{H\mathscr{L}^2}{N}\int\limits_{|\lambda|\leqslant\lambda_2}\frac{\sin^8\left(2\pi H\lambda\right)}{(2\pi H\lambda)^8}d\lambda=\frac{\mathscr{L}^2}{\pi N}\int\limits_{0}^{2\pi H\lambda_2}\frac{\sin^8 t}{t^8}dt\ll\frac{1}{H\mathscr{L}^7}.$$

Заменив интеграл по t близким к нему несобственным интегралом, независящим от $2\pi H\lambda_2$, получим

$$\mathscr{A}_1(k,q)=\frac{1}{\pi H}\int\limits_0^\infty\frac{\sin^9 t}{t^9}dt+R_7(N,H)+O\left(\frac{1}{H\mathscr{L}^7}\right), \tag{28}$$

$$R_7(N,H)=\frac{1}{\pi H}\int\limits_{2\pi H\lambda_2}^\infty\frac{\sin^9 t}{t^9}dt\leqslant\frac{1}{\pi H}\cdot\frac{1}{(2\pi H\lambda_2)^9}\ll\frac{1}{H^{10}\lambda_2^9}.$$

Воспользовавшись формулой

$$|\lambda_2|=\min\left(\frac{\mathscr{L}^2}{6H_9N_9^2},\frac{1}{6qN_9^2}\right)=\begin{cases}\dfrac{\mathscr{L}^2}{6H_9N_9^2}, & \text{если } 1\leqslant q\leqslant\dfrac{H_9}{\mathscr{L}^2};\\ \dfrac{1}{6qN_9^2}, & \text{если } \dfrac{H_9}{\mathscr{L}^2}<q\leqslant\dfrac{H_9}{\mathscr{L}},\end{cases} \tag{29}$$

и условием $q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}$, а затем соотношением (23), находим

$$R_7(N,H)\ll\frac{1}{H^{10}}\left(\left(\frac{H_9N_9^2}{\mathscr{L}^2}\right)^9+(qN_9^2)^9\right)\ll\frac{1}{H^{10}}\cdot\left(\frac{H_9N_9^2}{\mathscr{L}}\right)^9\ll\frac{1}{H\mathscr{L}^9}. \tag{30}$$

Пользуясь формулой (см. [24] стр. 174)

$$\int\limits_0^\infty\frac{\sin^n mt}{t^n}dt=\frac{\pi m^{m-1}}{2^n(n-1)!}\left(n^{n-1}-\frac{n}{1!}(n-2)^{n-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)}{2!}(n-4)^{n-1}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(n-6)^{n-1}+\ldots\right),$$

при $m=1$ и $n=9$, найдём

$$\int\limits_0^\infty\frac{\sin^9 t}{t^9}dt=\frac{\pi}{2^9\cdot 8!}\left(9^8-9\cdot7^8+\frac{9\cdot8}{2!}5^8-\frac{9\cdot8\cdot7}{3!}3^8+\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4!}\right)=\frac{259723\pi}{2^{15}\cdot35}.$$

Подставляя правую часть этой формулы и оценку (30) в (28), получим

$$\mathscr{A}_1(k,q)=\frac{259723}{2^{15}\cdot35H}+O\left(\frac{1}{H\mathscr{L}^7}\right). \tag{31}$$

Теперь оценим сверху интеграл

$$\mathscr{A}_2(k,q)=\int\limits_{\lambda_2<|\lambda|\leqslant\eta_q}\prod_{k=1}^9\gamma_3(\lambda;N_k,H_k)e(-\lambda N)d\lambda,\qquad\lambda_2=\min\left(\frac{\mathscr{L}^2}{6H_9N_9^2},\eta_q\right). \tag{32}$$

Из соотношения (29) и определения η_q следует, что при $H_9\mathscr{L}^{-2}<q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}$ выполняется равенство $\lambda_2=\eta_q$, то есть

$$\mathscr{A}_2(k,q)=0.$$

Остаётся случай $1\leqslant q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-2}$. В этом случае параметр λ_2 с учётом соотношения (23) определяется равенством

$$\lambda_2=\frac{\mathscr{L}^2}{6H_9N_9^2}=\frac{\mathscr{L}^2}{4H\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right)}=\frac{\mathscr{L}^2}{4H}\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right).$$

Для оценки тригонометрического интеграла $\gamma_3(\lambda; N_k, H_k)$ воспользовавшись оценкой (24), затем соотношением $\lambda_2 > \mathscr{L}(6H)^{-1}$, имеем

$$\gamma_3(\lambda; N_k, H_k) \leqslant \min\left(1, \frac{\mathscr{L}}{6H|\lambda|}\right) = \frac{\mathscr{L}}{6H|\lambda|}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть (32), получим

$$\mathscr{A}_2(k,q) \ll \int\limits_{\lambda_2}^{\eta_q} \frac{\mathscr{L}^9}{(6H)^9|\lambda|^9}d\lambda = \frac{\mathscr{L}^9}{8(6H)^9}\left(\frac{1}{\lambda_2^8} - \frac{1}{\eta_q^8}\right) \leqslant \frac{\mathscr{L}^9}{H^9\lambda_2^8} \ll \frac{1}{H\mathscr{L}^7}.$$

Из этой оценки и формулы (31) ввиду (27), находим

$$\mathscr{A}(k,q) = \frac{259723}{2^{15}\cdot 35H} + O\left(\frac{1}{H\mathscr{L}^7}\right). \tag{33}$$

4.1.4. Вычисление интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$

Подставляя правые части формул (33), (26) и (22) в (20), найдём

$$I(\mathfrak{M}_1) = \frac{259723}{2^{15}\cdot 35H}\mathfrak{S}\left(N, H_9\mathscr{L}^{-1}\right)\prod_{k=1}^{9} H_k + R_8(N,H) + O\left(\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\right), \tag{34}$$

$$\mathfrak{S}\left(N, H_9\mathscr{L}^{-1}\right) = \sum_{q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\frac{S_3^9(a,q)}{q^9}e\left(-\frac{aN}{q}\right),$$

$$R_8(N,H) \ll \frac{1}{H\mathscr{L}^7}\prod_{k=1}^{9} H_k \sum_{q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}}\left|\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\frac{S_3^9(a,q)}{q^9}e\left(-\frac{aN}{q}\right)\right|.$$

Вычислим двойную сумму $\mathfrak{S}\left(N, H_9\mathscr{L}^{-1}\right)$. Для этого сумму по q заменим близким к ней бесконечным рядом $\mathfrak{S}(N)$, независящим от $H_9\mathscr{L}^{-1}$. Воспользовавшись леммой 3 и соотношением (12), имеем

$$\left|\sum_{q> H_9\mathscr{L}^{-1}}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\frac{S_3^9(a,q)}{q^9}e\left(-\frac{aN}{q}\right)\right| \ll \sum_{q> H_9\mathscr{L}^{-1}}\frac{1}{q^2} \ll \frac{\mathscr{L}}{H_9} \ll \frac{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}}{H}.$$

Следовательно

$$\mathfrak{S}\left(N, H_9\mathscr{L}^{-1}\right) = \mathfrak{S}(N) + O\left(\frac{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}}{H}\right), \qquad \mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\frac{S_3^9(a,q)}{q^9}e\left(-\frac{aN}{q}\right). \tag{35}$$

Заметим, что сумма особого ряда $\mathfrak{S}(N)$ превосходит некоторое положительное число $c(N)$ (см. [25], теоремы 4.6).

Применяя формулу (12), имеем

$$\prod_{k=1}^{9} H_k = \prod_{k=1}^{9}\frac{2H}{3\mu_k^{\frac{2}{3}}N^{\frac{2}{3}}}\left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right) = \frac{2^9H^9}{3^9N^6}\prod_{k=1}^{9}\mu_k^{-\frac{2}{3}} + O\left(\frac{H^{10}}{N^7}\right). \tag{36}$$

Для оценки $R_8(N,H)$, пользуясь последней формулой и леммой 3, имеем

$$R_8(N,H) \ll \frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\sum_{q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}}\frac{1}{q^2} \ll \frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}. \tag{37}$$

Подставляя (35), (36) и (37) в (34), найдём

$$\begin{aligned} I(\mathfrak{M}_1) &= \frac{259723}{2^{15}\cdot 35H}\left(\mathfrak{S}(N)+O\left(\frac{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}}{H}\right)\right)\left(\frac{2^9H^9}{3^9N^6}\prod_{k=1}^{9}\mu_k^{-\frac{2}{3}}+O\left(\frac{H^{10}}{N^7}\right)\right)+O\left(\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\right) = \\ &= \frac{259723}{2^6\cdot 3^9\cdot 35}\prod_{k=1}^{9}\mu_k^{-\frac{2}{3}}\mathfrak{S}(N)\frac{H^8}{N^6}+O\left(\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\right) = \\ &= \frac{259723}{44089920}\prod_{k=1}^{9}\mu_k^{-\frac{2}{3}}\mathfrak{S}(N)\frac{H^8}{N^6}+O\left(\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\right). \end{aligned} \tag{38}$$

4.2. Оценка интеграла $I(\mathfrak{M}_2)$

Имеем

$$I(\mathfrak{M}_2) = \int\limits_{\mathfrak{M}_2}\prod_{k=1}^{9}T_3(\alpha;N_k,H_k)e(-\alpha N)d\alpha. \tag{39}$$

Суммы $T_3(\alpha;N_k,H_k)$ в произведении $\prod\limits_{k=1}^{9}T_3(\alpha;N_k,H_k)$ симметричны, поэтому не ограничивая общности будем считать, что выполняется соотношение

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 9}\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|T_3(\alpha;N_k,H_k)| = \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|T_3(\alpha;N_r,H_r)|, \qquad 1\leqslant r\leqslant 9.$$

С учётом этого равенства, переходя в интеграле (39) к оценкам, применяя трижды неравенство Коши, а затем терему 2 и соотношение $H_r \leqslant H_1 \ll HN^{-\frac{2}{3}}$, имеем

$$\begin{aligned} I(\mathfrak{M}_2) &\leqslant \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|T_3(\alpha;N_r,H_r)|\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{9}\int\limits_0^1|T_3(\alpha;N_k,H_k)|^8\,d\alpha\right)^{\frac{1}{8}} \ll \\ &\ll \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|T_3(\alpha;N_r,H_r)|\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{9}H_k^{5+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{8}} \ll \frac{H^{5+\varepsilon}}{N^{\frac{10}{3}+\frac{2}{3}\varepsilon}}\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|T_3(\alpha;N_r,H_r)|. \end{aligned} \tag{40}$$

Оценим $T_3(\alpha;N_r,H_r)$ для α из множества $\mathfrak{M}_2$. Если $\alpha\in\mathfrak{M}_2$, то

$$\alpha = \frac{a}{q}+\lambda, \qquad (a,q)=1, \qquad \eta_q<|\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau}, \qquad 1\leqslant q\leqslant\frac{H_9}{\mathscr{L}}.$$

Рассмотрим два возможных случая: $\eta_q<|\lambda|\leqslant\dfrac{1}{6qN_r^2}$ и $\dfrac{1}{6qN_r^2}<|\lambda|\leqslant\dfrac{1}{q\tau}$.

Случай 1. Для суммы $T_3(\alpha;N_r,H_r)$ согласно соотношению (19) выполняется неравенство

$$\tau = 12N_1H_1 \geqslant 12N_rH_r,$$

то есть первое условие следствия 1 леммы 1, а второе условие следует из условия рассматриваемого случая
$$|\lambda|\leqslant\frac{1}{6qN_r^2}.$$
Согласно этому следствию имеем
$$T_3(\alpha;N_r,H_r)=\frac{H_kS_3(a,q)}{q}\gamma_3(\lambda;N_r,H_r)+O\left(q^{\frac12+\varepsilon}\right).\tag{41}$$
Оценивая тригонометрический интеграл $\gamma_3(\lambda;N_k,H_k)$, воспользовавшись оценкой (24), затем соотношением $\lambda_2>\eta_q$, имеем
$$\gamma_3(\lambda;N_r,H_r)\leqslant\min\left(1,\frac{\mathscr{L}}{6H|\lambda|}\right)\leqslant\min\left(1,\frac{\mathscr{L}}{6H\eta_q}\right)\leqslant\frac{\mathscr{L}}{6H\eta_q}=\frac{6qN_9^2\mathscr{L}}{6H}\ll\frac{qN^{\frac23}\mathscr{L}}{H}.$$
Подставляя эту оценку и оценку суммы $S_3(a,q)$ из леммы 3 в (41), получим
$$|T_3(\alpha;N_r,H_r)|\ll\frac{H}{N^{\frac23}q^{\frac13}}\cdot\frac{qN^{\frac23}\mathscr{L}}{H}+q^{\frac12+\varepsilon}\ll q^{\frac23}\ll\left(\frac{H_9}{\mathscr{L}}\right)^{\frac23}\ll\frac{H^{\frac23}}{N^{\frac49}\mathscr{L}^{\frac23}}.$$
Отсюда и из (40), а затем, пользуясь соотношением $H=N^{\frac{29}{30}+\varepsilon}$, находим
$$\begin{aligned}I(\mathfrak{M}_2)&\ll\frac{H^{5+\varepsilon}}{N^{\frac{10}{3}+\frac23\varepsilon}}\cdot\frac{H^{\frac23}}{N^{\frac49}\mathscr{L}^{\frac23}}=\frac{H^{\frac{17}{3}+\varepsilon}}{N^{\frac{34}{9}+\frac23\varepsilon}\mathscr{L}^{\frac23}}=\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\cdot\frac{N^{\frac{20}{9}-\frac23\varepsilon}\mathscr{L}^{\frac{19}{3}}}{H^{\frac73-\varepsilon}}=\\&=\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\cdot N^{\frac{20}{9}-\frac23\varepsilon-\left(\frac73-\varepsilon\right)\left(\frac{29}{30}+\varepsilon\right)}\mathscr{L}^{\frac{19}{3}}=\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\cdot N^{-\frac{1}{30}-\frac{71}{30}\varepsilon+\varepsilon^2}\mathscr{L}^{\frac{19}{3}}\ll\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}.\end{aligned}\tag{42}$$

Случай 2. В этом случае для суммы $T_3(\alpha;N_r,H_r)$ выполняются оба условия следствия 2 леммы 1, то есть
$$\tau=12N_1H_1\geqslant12N_rH_r,\qquad\qquad\frac{1}{6qN_r^2}<|\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau}.$$
Согласно этому следствию, соотношение $H_r<N_r$ и условию $q\leqslant H_9\mathscr{L}^{-1}$, имеем
$$\begin{aligned}|T_3(\alpha;N_r,H_r)|&\ll q^{\frac23}\ln q+\min_{2\leqslant k\leqslant3}\left(H_rq^{-\frac13},N_r^{1-\frac1k}q^{\frac1k-\frac13}\right)=q^{\frac23}\ln q+\min\left(N_r^{\frac12}q^{\frac16},N_r^{\frac23}\right)=\\&=q^{\frac23}\ln q+N_r^{\frac12}q^{\frac16}\leqslant H_9^{\frac23}\mathscr{L}^{\frac13}+N_9^{\frac12}H_9^{\frac16}\mathscr{L}^{-\frac16}\ll N_9^{\frac12}H_9^{\frac16}\mathscr{L}^{-\frac16}\ll H^{\frac16}N^{\frac1{18}}\mathscr{L}^{-\frac16}.\end{aligned}$$
Отсюда и из (40), а затем, пользуясь соотношением $H=N^{\frac{29}{30}+\varepsilon}$, находим
$$\begin{aligned}I(\mathfrak{M}_2)&\ll\frac{H^{5+\varepsilon}}{N^{\frac{10}{3}+\frac23\varepsilon}}\cdot H^{\frac16}N^{\frac1{18}}\mathscr{L}^{-\frac16}=\frac{H^{\frac{31}{6}+\varepsilon}}{N^{\frac{59}{18}+\frac23\varepsilon}\mathscr{L}^{\frac16}}=\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\cdot\frac{N^{\frac{49}{18}-\frac23\varepsilon}\mathscr{L}^{\frac{41}{6}}}{H^{\frac{17}{6}-\varepsilon}}=\\&=\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\cdot N^{\frac{49}{18}-\frac23\varepsilon-\left(\frac{17}{6}-\varepsilon\right)\left(\frac{29}{30}+\varepsilon\right)}\mathscr{L}^{\frac{41}{6}}=\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}\cdot N^{-\frac1{60}-\frac{76}{30}\varepsilon+\varepsilon^2)}\mathscr{L}^{\frac{41}{6}}\ll\frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}.\end{aligned}\tag{43}$$

4.3. Оценка интеграла $I(\mathfrak{m})$

Поступая аналогично, как в случае оценки $I(\mathfrak{M}_2)$, имеем
$$I(\mathfrak{m})\ll\frac{H^{5+\varepsilon}}{N^{\frac{10}{3}+\frac23\varepsilon}}\max_{\alpha\in\mathfrak{m}}|T_3(\alpha;N_r,H_r)|,\qquad1\leqslant r\leqslant9.\tag{44}$$

Оценим $T_3(\alpha; N_r, H_r)$ для α из множества $\mathfrak{m}$. Если $\alpha \in \mathfrak{m}$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \qquad (a, q) = 1, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \qquad \frac{H_9}{\mathscr{L}} < q \leqslant \tau, \qquad \tau = 12N_1H_1.$$

Пользуясь леммой 2, затем соотношениями $H_r \asymp HN^{-\frac{2}{3}}$ и $N_r \asymp N^{\frac{1}{3}}$, которые соответственно являются следствиями формул (12) и (11), имеем

$$T_3(\alpha; N_r, H_r) \ll H_r^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{H_r} + \frac{1}{q} + \frac{q}{H_r^3}\right)^{\frac{1}{4}} \ll H_r^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{H_r} + \frac{\mathscr{L}}{H_9} + \frac{12N_1H_1}{H_r^3}\right)^{\frac{1}{4}} \ll$$
$$\ll \left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}}}\right)^{1+\varepsilon}\left(\frac{N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}}{H} + \frac{N^{\frac{5}{3}}}{H^2}\right)^{\frac{1}{4}} \ll \frac{H^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\mathscr{L}^{\frac{1}{4}}}{N^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\varepsilon}} + \frac{H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{N^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\varepsilon}} =$$
$$= \frac{H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{N^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\varepsilon}}\left(1 + \left(\frac{H\mathscr{L}}{N}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \ll \frac{H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{N^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\varepsilon}}.$$

Подставляя эту оценку в (44), пользуясь соотношением $H = N^{\frac{29}{30}+\varepsilon}$, находим

$$I(\mathfrak{m}) \ll \frac{H^{5+\varepsilon}}{N^{\frac{10}{3}+\frac{2}{3}\varepsilon}} \cdot \frac{H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{N^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\varepsilon}} = \frac{H^{\frac{11}{2}+2\varepsilon}}{N^{\frac{43}{12}+\frac{4}{3}\varepsilon}} = \frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7} \cdot \frac{N^{\frac{29}{12}-\frac{4}{3}\varepsilon}\mathscr{L}^7}{H^{\frac{5}{2}-2\varepsilon}} =$$
$$= \frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7} \cdot N^{\frac{29}{12}-\frac{4}{3}\varepsilon-\left(\frac{5}{2}-2\varepsilon\right)\left(\frac{29}{30}+\varepsilon\right)}\mathscr{L}^7 = \frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7} \cdot N^{-\frac{19}{10}\varepsilon+\varepsilon^2}\mathscr{L}^7 \ll \frac{H^8}{N^6\mathscr{L}^7}. \tag{45}$$

Подставляя найденные оценки для $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ соответственно из (38), (42), (43) и (45) в (17) получим утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Waring E. M. Meditationes algebraicae // Cambridge. 1770.
2. Hilbert D. Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen (Waringsches Problem) // Mathematische Annalen. 1909. V. 67. P. 281 – 300.
3. Hardy G. H., Littlwood J. E. Some problems of "Partitio Numerorum". I: A new solution of Waring's problem. // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. 1920. P. 33 – 54.
4. Виноградов И. М. Избранные труды — М: Изд-во АН СССР, 1952 г.
5. Виноградов И. М. Новое решение проблемы Варинга // Доклады Академии наук СССР. 1934 г. № 2. С. 337 – 341.
6. Виноградов И. М. К вопросу о верхней границе для $G(n)$ // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1959 г. Т. 23. № 5. С. 637 – 642.
7. Карацуба А. А. О функции $G(n)$ в проблеме Варинга // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1985 г. -Т. 49. № 5. С. 935 – 947.
8. Wooley T. D. Large improvements in Waring's problem // Ann of Math. 1992. V. (2)135. № 1. P. 131 – 164.
9. Davenport H. On Waring's Problem for Fourth Powers // Annals of Mathematics Second Series. 1939. V. 40.№ 4. P. 731 – 747.

10. Линник Ю. В. О разложении больших чисел на семь кубов // Доклады Академии наук СССР. 1942 г. № 35. С. 179 – 180.

11. Vaughan R.C. On Waring's problem for cubes // J. Reine Angew. Math. 1986. V. 365. P. 122 – 170.

12. Wright E. M. Proportionality conditions in Waring's problem // Mathematische Zeitschrift. 1934. V. 38. P. 730 – 746.

13. Wright E. M. An extension of Waring's problem // Philos. Trans. R. Soc. Lond. 1933. Ser. A 232. P. 1 – 26.

14. Рахмонов З. Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95. вып. 3. С. 445 – 456.

15. Рахмонов З. Х., Назрублоев Н. Н., Рахимов А. О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. В. 1(53). С. 232 – 247.

16. Рахмонов З. Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74. вып. 4. С. 564 – 572.

17. Рахмонов З. Х. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля // Ученые записки Орловского университета. Серия естественные, технические и медицинские науки. 2013. № 6. часть 2. С. 194 – 203.

18. Рахмонов З. Х., Азамов А. З., Назрублоев Н. Н. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в малых дугах // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018 г. Т. 61. № 7-8. С. 609–614.

19. Рахмонов З. Х., Мирзоабдугафуров К. И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2008. Т. 51. № 2. С. 83 – 86.

20. Рахмонов З. Х., Азамов А. З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. Т. 54. № 3. С. 34 – 42.

21. Рахмонов З. Х., Назрублоев Н. Н. Проблема Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 11 – 12. С. 823 – 830.

22. Рахмонов Ф. З., Рахимов А. О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. ISSN: 1810-4134. 2016. № 8. С. 87 – 89.

23. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — Москва. Наука. 1987 г.

24. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. ч. 1. Основные операции анализа. — Изд. 2–е. Перев. с англ. Физматгиз. М. 1963 г. -342 с.

25. Вон Р. Метод Харди–Литтлвуда. — Мир, М., 1985.

REFERENCES

1. Waring E. M., 1770, *Meditationes algebraicae* , Cambridge.

2. Hilbert D., 1909, "Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen (Waringsches Problem)", *Mathematische Annalen*, vol. 67, pp. 281—300.

3. Hardy G. H., & Littlwood J.E., 1920, "Some problems of "Partitio Numerorum". I: A new solution of Waring's problem", *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 33-54.

4. Vinogradov I. M., 1952, *Izbrannye trudy. (Russian) [Selected works.]*, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 436 pp., (in Russian).

5. Vinogradov I.M., 1934, "Novoe reshenie problemy Varinga", *Doklady Akademii nauk*, vol. 2, pp. 337–341, (in Russian).

6. Vinogradov I. M., 1959, "On an upper bound for $G(n)$", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 23, no 5, pp. 637–642, (in Russian).

7. Karatsuba A. A., 1986, "On the function $G(n)$ in Waring's problem", *Math. USSR-Izv.*, vol. 27, no 2, pp. 239–249.

8. Wooley T. D., 1992, "Large improvements in Waring's problem", *Ann of Math.*, vol. (2)135, no 1. pp. 131-164.

9. Davenport H., 1939, "On Waring's Problem for Fourth Powers", *Annals of Mathematics Second Series*, vol. 40, no. 4, pp. 731-747.

10. Linnik Yu. V.,1942, "On the representation of large numbers as sums of seven cubes", *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, n. Ser.*, vol. 35, pp. 162.

11. Vaughan, R. C., 1986, "On Waring's problem for cubes", *J. Reine Angew. Math.*, vol. 365, pp. 122-170.

12. Wright E. M., 1934, "Proportionality conditions in Waring's problem", *Mathematische Zeitschrift*, vol. 38, pp. 730-746.

13. Wright E. M., 1933, "An extension of Waring's problem", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, vol. 232. pp. 1-26.

14. Rakhmonov, Z. Kh., 2014, "The Estermann cubic problem with almost equal summands", *Mathematical Notes*, vol. 95, Is. 3-4, pp. 407–417. doi.org/10.1134/S0001434614030122.

15. Rakhmonov Z. Kh., & Nazrubloev N. N., Rakhimov A.O., 2015, "Short Weyl sums and their applications", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, Is. 1, pp. 232–247, (in Russian).

16. Rakhmonov Z. Kh., 2003, "Estermann's ternary problem with almost equal summands", *Mathematical Notes*, vol. 74, Is. 4, pp. 534-542. doi.org/10.1023/A:1026199928464.

17. Rakhmonov Z. Kh., 2013, "Short Weyl sums", *Uchenyye zapiski Orlovskogo universiteta. Seriya yestestvennyye, tekhnicheskiye i meditsinskiye nauki*, no. 6, part 2, pp. 194–203, (in Russian).

18. Rakhmonov Z. Kh., & Azamov A.Z., Nazrubloev N. N., 2018, "Of short Weyl's exponential sum in minor arcs", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 61, no 7-8, pp. 609-614, (in Russian).

19. Rakhmonov Z. Kh., & Mirzoabdugafurov K. I., 2008, “Waring’s problem for cubes with almost equal summands”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 51, no 2, pp. 83-86, (in Russian).

20. Rakhmonov Z. Kh., & Azamov A.Z., 2011, “An asymptotic formula in Waring’s problem for fourth powers with almost equal summands”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 54, no 3, pp. 34-42, (in Russian).

21. Rakhmonov Z. Kh., & Nazrubloev N. N., 2014, “Waring’s problem for fifth powers with almost equal summands”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 57, no 11-12, pp. 823-830, (in Russian).

22. Rakhmonov F. Z., & Rakhimov A. O., 2015, “On an additive problem with almost equal summands”, *Issledovaniya po algebre, teorii chisel, funktsional’nomu analizu i smezhnym voprosam. Izdatel’stvo: Saratovskiy natsional’nyy issledovatel’skiy gosudarstvennyy universitet im. N.G. Chernyshevskogo*, ISSN: 1810-4134, no 8, pp. 87–89, (in Russian).

23. Arkhipov G. I. & Chubarikov V. N. & Karatsuba A. A. 2004. *Trigonometric sums in number theory and analysis*, Berlin–New-York: Walter de Gruyter, 554 p.

24. Whittaker G. E., Watson T. N., 1915, *A Course of Modern Analysis. Part 1. The processes of analysis. Part 2. The transcendental functions*, Cambridge, Cambridge University Press, 620.

25. Vaughan R. C., 1981. *The Hardy-Littlewood method*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 80, Cambridge University Press, Cambridge, 172 p.

Получено: 29.03.2023
Принято в печать: 12.09.2023