

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 3.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-56-70

**О расположениях двух M -кривых степени 4,
овал одной из которых обвивается вокруг овала другой¹**

Н. Д. Пучкова

Пучкова Наталья Дмитриевна — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород).

e-mail: nataha1910@mail.ru

Аннотация

Рассматривается задача топологической классификации взаимных расположений в вещественной проективной плоскости двух M -кривых степени 4. На изучаемые расположения наложены условие максимальности (овал одной из этих кривых имеет 16 попарно различных общих точек с овалом другой из них) и условие комбинаторного характера, выделяющее специальный тип таких расположений. Перечислены попарно различные топологические модели расположений этого типа, удовлетворяющие известным фактам о топологии неособых кривых и топологическим следствиям теоремы Безу. Таких моделей оказалось 564. Доказано, что 558 моделей не могут быть реализованы кривыми степени 8, остальные 6 моделей удалось построить. Доказательства нереализуемости проводятся методом Оревкова, основанным на применении теории кос и зацеплений.

Ключевые слова: плоские вещественные алгебраические кривые, распадающиеся кривые, квазиположительные косы, метод Оревкова, неравенство Мурасуги—Тристрама, условие Фокса—Милнора.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Н. Д. Пучкова. О расположениях двух M -кривых степени 4, овал одной из которых обвивается вокруг овала другой // Чебышевский сборник, 2022, т. 24, вып. 3, с. 56–70.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 3.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-56-70

**On the dispositions of two M -singular curves of degree 4,
the oval of one of which coils around the oval of the other**

N. D. Puchkova

Puchkova Natalia Dmitrievna — National Research University “Higher school of Economics” (Nizhny Novgorod).

e-mail: nataha1910@mail.ru

¹Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

Abstract

We consider the problem of topological classification of mutual dispositions in the real projective plane of two M -curves of degree 4. We study arrangements which are satisfy to the maximality condition (the oval of one of these curves has 16 pairwise different common points with the oval of the other of them) and some combinatorial condition to select a special type of such arrangements. Pairwise different topological models of arrangements of this type are listed, which satisfy the known facts about the topology of nonsingular curves and the topological consequences of Bezout's theorem. There are 564 such models. We proved that 558 models cannot be realized by curves of degree 8. The remaining 6 models were constructed by us. Proofs of non-realizability are carried out by Orevkov's method based on the theory of braids and links.

Keywords: plane real algebraic curves, decomposable curves, quasi-positive braids, Orevkov's method, Murasugi-Tristram inequality, Fox-Milnor condition.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

N. D. Puchkova, 2023, "On the dispositions of two M -singular curves of degree 4, the oval of one of which coils around the oval of the other", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 56–70.

1. Введение

В 1900 году на Международном конгрессе математиков в Париже Давид Гильберт представил список проблем, которыми математики должны заниматься в течение следующих 100 лет. В первой части 16-й проблемы Д. Гильберт поставил задачу топологической классификации неособых плоских вещественных алгебраических кривых. На данный момент завершена классификация неособых кривых до седьмой степени включительно.

Каковы возможные расположения действительной распадающейся кривой данной степени на действительной проективной плоскости? Этот вопрос интенсивно изучался в последние десятилетия. Топологическая классификация распадающихся кривых степени 6 при некоторых условиях максимальности и общего положения была найдена Г.М. Полотовским в 1977 г. [11], аналогичная задача о кривых степени 7 почти завершена, ей занималась большая группа авторов (А.Б. Корчагин, Г.М. Полотовский, С.Ю. Оревков, Е.И. Шустин и др., см., например, [4] – [10], [14] – [15], полный список библиографических ссылок см. в [1]).

Данная статья посвящена изучению взаимных расположений в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ двух неособых M -кривых степени 4, находящихся в общем положении, и является продолжением исследования [12]. Далее в работе вводится определенный тип таких расположений, рассмотрением которого ограничиваемся ввиду большого числа всех подлежащих исследованию возможностей. Для расположений этого типа удалось порлучить полную классификацию, которая приведена в конце статьи.

Автор благодарит Г.М. Полотовского за предложенную задачу и помощь в работе.

2. Постановка задачи

Через C_k будем обозначать вещественную проективную алгебраическую кривую степени k , т. е. однородный многочлен степени k с вещественными коэффициентами от трёх переменных, а через $\mathbb{R}C_k$ – множество вещественных точек кривой C_k , т. е. множество точек вещественной проективной плоскости, в которых многочлен C_k обращается в нуль.

Пусть многочлен C_8 распадается в произведение двух многочленов степени 4: $C_8 = C_4 \cdot \widetilde{C}_4$, т. е. $\mathbb{R}C_8 = \mathbb{R}C_4 \cup \mathbb{R}\widetilde{C}_4$. Данная работа посвящена топологической классификации троек

$$(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}C_8, \mathbb{R}C_4) \quad (1)$$

при следующих условиях:

1. Кривые C_4 и $\widetilde{C}_4$ являются M -кривыми, т. е. каждая из них состоит в $\mathbb{R}P^2$ из четырёх попарно не пересекающихся овалов (двусторонне вложенных в проективную плоскость топологических окружностей), лежащих вне друг друга.
2. Общие вещественные точки кривых C_4 и $\widetilde{C}_4$ попарно различны и их число максимально, т. е. $\#(\mathbb{R}C_4 \cap \mathbb{R}\widetilde{C}_4) = 16$.
3. Все эти 16 точек лежат на одном овале кривой C_4 и на одном овале кривой $\widetilde{C}_4$.

Назовём *топологической моделью* распадающейся кривой рассматриваемого вида (для краткости ниже – просто “модель”) набор восьми топологических окружностей, которые вложены в $\mathbb{R}P^2$ двусторонне и которые ведут себя с точки зрения числа и расположения общих точек так, как две кривые степени 4 при условиях 1) – 3) выше. Наша задача – выяснить, какие модели могут быть реализованы как объединение двух M -кривых степени 4, а какие – нет.

Как уже было отмечено выше, мы ограничимся только изучением специального вида пересечения ветвей, который введём с помощью следующих двух определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть овал O целиком лежит в аффинной плоскости². Рассмотрим незамкнутую дугу без самопересечений, тоже целиком лежащую в аффинной плоскости и пересекающую овал O в восьми попарно различных точках. Эту дугу будем называть *образующей дугой*. При достаточно малом ε граница ε -окрестности этой дуги представляет собой другой овал, который пересекает исходный овал O в 16 попарно различных точках. Этот второй овал будем называть *змеёй*, а такое взаимное расположение двух овалов будем называть пересечением ветвей типа “змея, обвивающаяся вокруг овала”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ имеем пересечение двух овалов типа “змея, обвивающаяся вокруг овала” такое, что один (*а, значит, и второй*) *конец образующей дуги лежит в неориентируемой компоненте дополнения к овалу O . Если из этого конца можно “уйти на бесконечность”, не пересекая овал O и образующую дугу, то отвечающую такой дуге змею назовём “змеёй со свободным концом”. В противном случае змею будем называть “змеёй без свободного конца”.*

“Змеи со свободным концом” рассматривались в работе [12], в данной статье будем рассматривать “змеи без свободного конца”.

Таким образом, полный список ограничений, выделяющий класс кривых, рассматриваемых в этой работе, состоит из условий максимальности и общего положения 1 – 3 и из предположения, что пересечение овалов имеет тип “змея без свободного конца, обвивающаяся вокруг овала”.

Пусть имеется кривая степени 8, распадающаяся в произведение двух кривых степени 4, удовлетворяющая всем наложенным ограничениям. В дальнейшем кривую степени 4, один из овалов которой есть змея, будем называть кривой номер 1, а кривую степени 4, вокруг овала которой обвивается змея, будем называть кривой номер 2. Овалы, на которых нет точек пересечения (в нашем случае таких овалов шесть: три овала кривой номер 1 и три овала кривой номер 2), называются свободными. Напомним, что в силу условия 1) овалы, принадлежащие кривой с одним номером, лежат вне друг друга.

²Для овала M -кривой степени 4 этого всегда можно добиться, выбрав в качестве бесконечно удаленной прямой аффинной плоскости слегка сдвинутую двойную касательную к этой кривой.

Занумеруем на овале³ кривой номер 2 подряд 8 точек – точек пересечения овала с образующей дугой. Тогда расположение образующей дуги относительно пересекаемого ею овала можно кодировать подстановкой порядка 8, запись которой в виде цикла получается выписыванием номеров точек на овале, проходимых при движении по образующей дуге от одного её конца до второго.

Отметим, что от выбора первой точки ничего не зависит, поэтому ее номер можно всегда считать равным 1. Нетрудно заметить, что для каждого расположения, отвечающего подстановке со вторым элементом 2 (3, 4), найдётся симметричное расположение, которому отвечает подстановка со вторым элементом 8 (соответственно, 7, 6) (см. рис. 1), поэтому достаточно рассмотреть только подстановки со вторым элементом ≤ 5 .

Чтобы подстановка однозначно кодировала расположение образующей дуги, следом за подстановкой в квадратных скобках будем записывать три знака: первый описывает расположение сегмента образующей дуги, соединяющего второй и третий элементы подстановки, относительно овала, второй знак – четвёртый и пятый элементы, третий – шестой и седьмой. Если направление образующей дуги на рассматриваемом сегменте совпадает с направлением нумерации, то будем ставить знак “+”, иначе – знак “–”. Например, коду (12345678)[+ + –] отвечает рисунок 2, а коду (12345678)[+ – +] отвечает рисунок 3, стрелками внутри овалов обозначено направление нумерации точек на овале кривой номер 2, стрелками внутри змей – направление при движении по образующей дуге от одного её конца до второго.

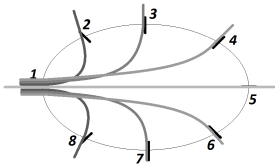


Рис. 1

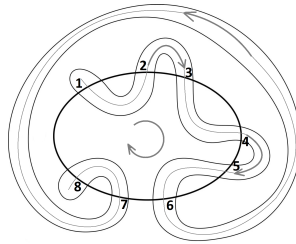


Рис. 2

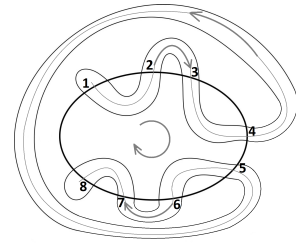


Рис. 3

Как обычно делается при решении подобных задач, классификация троек вида (1) разбивается на три этапа:

1. Перечисление моделей, удовлетворяющих наложенным условиям.
2. Запреты допустимых в силу п. 1 моделей.
3. Реализация незапрещённых моделей алгебраическими кривыми рассматриваемого вида.

Мы будем доказывать запреты с помощью теоремы Безу и с помощью метода Оревкова, основанного на теории кос и зацеплений.

3. Перечисление допустимых подстановок

Если двум разным кодам соответствуют гомеоморфные расположения кривых, то оставим тот, который меньше в смысле лексикографического порядка.

С помощью устранения точек пересечения (эти устранения независимы в силу теоремы Брюзотти – см., например, [3]) докажем, что расположения, отвечающие некоторым подстановкам, не могут быть реализованы кривой степени 8. Например, кривая на рис. 5, получаемая устранением точек пересечения на рис. 4, имеет гнездо⁴ веса 4; известно, что такое расположе-

³Здесь и ниже, где это не должно привести к недоразумениям, мы допускаем для краткости вольность речи, говоря вместо “на модели овала” просто “на овале”.

⁴Гнездом веса s называется набор из s овалов, последовательно окружающих друг друга.

ние овалов не может быть реализовано кривой степени 8 (в силу противоречия теореме Безу при пересечении с прямой), поэтому нереализуемо и расположение рис. 4.

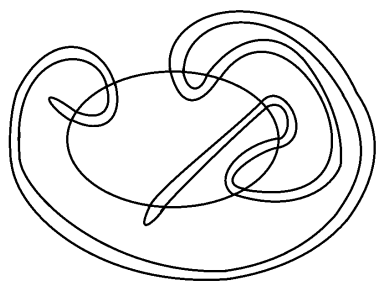


Рис. 4

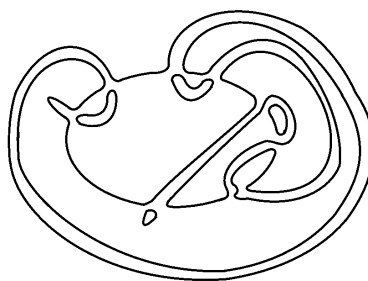


Рис. 5

Применением описанного приёма доказывается следующая

ТЕОРЕМА 1. *Полный список подстановок, отвечающих попарно различным образующим дугам для не противоречащих теореме Безу моделей расположений двух кривых степени 4 типа “змея без свободного конца, обвивающаяся вокруг овала”, состоит из следующих подстановок:*

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1. (12345678)[+ + −] | 2. (12345678)[+ − +] | 3. (12347658)[+ + −] |
| 4. (12365478)[+ − −] | 5. (12567438)[− + −] | 6. (12765438)[+ + +] |

4. Перечисление возможных расположений свободных овалов

Покажем, как определяются допустимые известными ограничениями возможности для расположения свободных овалов, рассмотрев конкретный пример – змею, отвечающую подстановке (12345678)[+ + −], см. рис. 6.

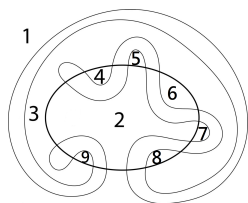


Рис. 6

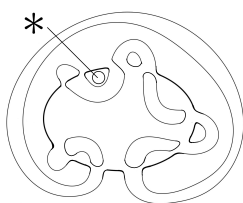


Рис. 7

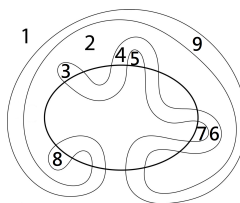


Рис. 8

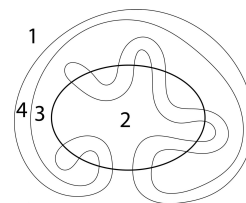


Рис. 9

Найдем сначала все возможные области для расположения овалов кривой номер 1. Напомним, что эти овалы должны располагаться вне друг друга и вне змеи.

Дополнение к пересекающимся овалам вне змеи состоит из 9 областей. Пронумеруем эти области – см. рис. 6 – и будем смотреть, допустимо ли расположение в них свободных овалов. Так, в области с номером 4 свободный овал лежать не может: устраняя точки пересечения так, как показано на рис. 7 (* - добавленный свободный овал), получим расположение с гнездом веса 4, чего не может быть у кривой степени 8. Совершенно аналогично доказывается невозможность расположения свободного овала кривой номер 1 в областях 5 – 9.

Аналогично найдем возможные области для расположения овалов кривой с номером 2. Снова имеем 9 областей для свободных овалов, которые пронумерованы на рис. 8. Также с помощью теоремы Брюзотти убеждаемся, что свободные овалы не могут лежать в областях 3 – 8.

Подведём итог: допустимо распределение свободных овалов только между четырьмя областями, пронумерованными на рис. 9, причем в области 2 могут располагаться только овалы

кривой номер 1, в области 4 – только овалы кривой номер 2, а в областях 1 и 3 – как овалы кривой номер 1, так и овалы кривой номер 2 (но вне друг друга). Все логически возможные распределения шести свободных овалов по этим областям приведены в таблице 1, где количество овалов кривых номер 1 и номер 2 обозначается числами с соответствующими этим номерам индексами.

Таблица 1

№	1	2	3	4
1	$3_1 3_2$			
2	$3_1 2_2$		1_2	
3	$3_1 2_2$			1_2
4	$3_1 1_2$		2_2	
5	$3_1 1_2$			2_2
6	$3_1 1_2$		1_2	1_2
7	3_1		3_2	
8	3_1		2_2	1_2
9	3_1		1_2	2_2
10	3_1			3_2
11	$2_1 3_2$	1_1		
12	$2_1 2_2$	1_1	1_2	
13	$2_1 2_2$	1_1		1_2
14	$2_1 1_2$	1_1	2_2	
15	$2_1 1_2$	1_1		2_2
16	$2_1 1_2$	1_1	1_2	1_2
17	2_1	1_1	3_2	
18	2_1	1_1	2_2	1_2
19	2_1	1_1	1_2	2_2
20	2_1	1_1		3_2
21	$2_1 3_2$		1_1	
22	$2_1 2_2$		$1_1 1_2$	
23	$2_1 2_2$		1_1	1_2
24	$2_1 1_2$		$1_1 2_2$	
25	$2_1 1_2$		1_1	2_2
26	$2_1 1_2$		$1_1 1_2$	1_2
27	2_1		$1_1 3_2$	
28	2_1		$1_1 2_2$	1_2
29	2_1		$1_1 1_2$	2_2
30	2_1		1_1	3_2
31	$1_1 3_2$	2_1		
32	$1_1 2_2$	2_1	1_2	
33	$1_1 2_2$	2_1		1_2

№	1	2	3	4
34	$1_1 1_2$	2_1	2_2	
35	$1_1 1_2$	2_1		2_2
36	$1_1 1_2$	2_1	1_2	1_2
37	1_1	2_1	3_2	
38	1_1	2_1	2_2	1_2
39	1_1	2_1	1_2	2_2
40	1_1	2_1		3_2
41	$1_1 3_2$		2_1	
42	$1_1 2_2$		$2_1 1_2$	
43	$1_1 2_2$		2_1	1_2
44	$1_1 1_2$		$2_1 2_2$	
45	$1_1 1_2$		2_1	2_2
46	$1_1 1_2$		$2_1 1_2$	1_2
47	1_1		$2_1 3_2$	
48	1_1		$2_1 2_2$	1_2
49	1_1		$2_1 1_2$	2_2
50	1_1		2_1	3_2
51	$1_1 3_2$	1_1	1_1	
52	$1_1 2_2$	1_1	$1_1 1_2$	
53	$1_1 2_2$	1_1	1_1	1_2
54	$1_1 1_2$	1_1	$1_1 2_2$	
55	$1_1 1_2$	1_1	1_1	2_2
56	$1_1 1_2$	1_1	$1_1 1_2$	1_2
57	1_1	1_1	$1_1 3_2$	
58	1_1	1_1	$1_1 2_2$	1_2
59	1_1	1_1	$1_1 1_2$	2_2
60	1_1	1_1	1_1	3_2
61	3_2	3_1		
62	2_2	3_1	1_2	
63	2_2	3_1		1_2
64	1_2	3_1	2_2	
65	1_2	3_1		2_2
66	1_2	3_1	1_2	1_2

№	1	2	3	4
67		3_1	3_2	
68		3_1	2_2	1_2
69		3_1	1_2	2_2
70		3_1		3_2
71	3_2	2_1	1_1	
72	2_2	2_1	$1_1 1_2$	
73	2_2	2_1	1_1	1_2
74	1_2	2_1	$1_1 2_2$	
75	1_2	2_1	1_1	2_2
76	1_2	2_1	$1_1 1_2$	1_2
77		2_1	$1_1 3_2$	
78		2_1	$1_1 2_2$	1_2
79		2_1	$1_1 1_2$	2_2
80		2_1	1_1	3_2
81	3_2	1_1	2_1	
82	2_2	1_1	$2_1 1_2$	
83	2_2	1_1	2_1	1_2
84	1_2	1_1	$2_1 2_2$	
85	1_2	1_1	2_1	2_2
86	1_2	1_1	$2_1 1_2$	1_2
87		1_1	$2_1 3_2$	
88		1_1	$2_1 2_2$	1_2
89		1_1	$2_1 1_2$	2_2
90		1_1	2_1	3_2
91	3_2		3_1	
92	2_2		$3_1 1_2$	
93	2_2		3_1	1_2
94	1_2		$3_1 2_2$	
95	1_2		3_1	2_2
96	1_2		$3_1 1_2$	1_2
97			$3_1 3_2$	
98			$3_1 2_2$	1_2
99			$3_1 1_2$	2_2
100			3_1	3_2

5. Запреты с помощью с помощью теории кос и зацеплений

Ниже описывается применение метода Оревкова, основанного на использовании теории кос и зацеплений. Этот метод был предложен С.Ю. Оревковым в [13], примеры применения этого метода можно найти также в других работах – см., например, [1], [2], поэтому наше изложение будет по возможности кратким.

Опять покажем применение метода на конкретном примере той же змеи, отвечающей подстановке $(12345678)[++ -]$.

Изобразим исследуемое расположение так, как показано на рис. 10. Здесь “змея” – овал, нарисованный тонкой линией, а обозначение областей цифрами такое же, как на рис. 9.

Выберем в проективной плоскости точку P , не лежащую на кривой, так, чтобы каждая прямая пучка прямых с центром в этой точке пересекала нашу кривую не менее, чем в $8 - 2 = 6$ точках, и нашлась бы прямая l_M (“максимальная”), пересекающая эту кривую в 8 точках, см. рис. 10. Такой пучок будем называть максимальным. Разрежем модель плоскости $\mathbb{R}P^2$ по прямой l_M и склеим половинки по частям граничной окружности, учитывая отождествление её диаметрально противоположных точек, см. рис. 11. Таким образом, l_M будет новой “бесконечно удалённой прямой”, то есть будет изображаться границей круга на новой модели.

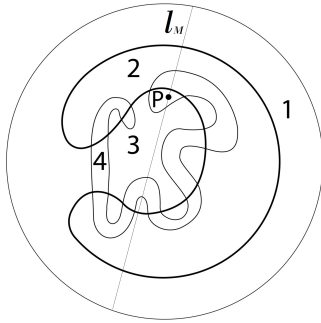


Рис. 10

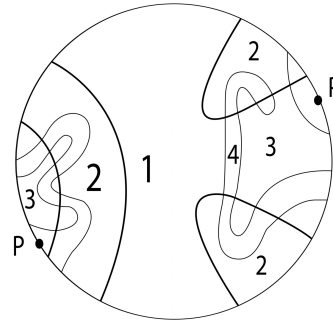


Рис. 11

Изобразим рис. 11 в виде “развёртки” (у С.Ю. Оревкова – термин “послойное расположение”), изображённой на рис. 12 (теперь точка P – “бесконечно удалённая на вертикальной оси OY ”).

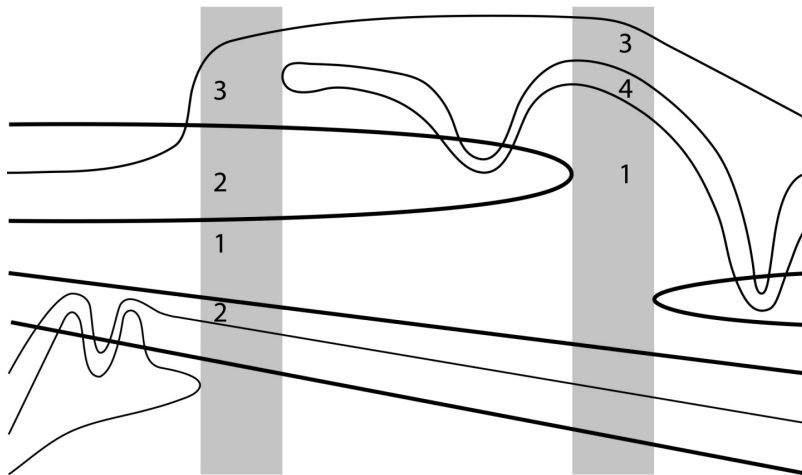


Рис. 12

В закрашенных на рис. 12 вертикальных полосах где-то должны располагаться 6 свободных овалов, которые при движении прямой пучка (вертикальной прямой на рис. 12) пересекаются поочерёдно (в силу теоремы Безу). Цифры в этих полосах соответствуют номерам областей на рис. 10. В левой полосе могут быть только овалы кривой номер 1, в правой – только овалы кривой номер 2.

Следуя С.Ю. Орекову, развёртки будем кодировать с помощью так называемого X-кода, который получается последовательным выписыванием символов $\subset_k, \supset_k, x_k, k \in \{1, 2, \dots, 7\}$, при движении вдоль развёртки слева направо; эти символы кодируют расположения кривой в окрестности критических прямых пучка (тех прямых, которые касаются кривой или проходят через двойную точку кривой) в соответствии с рис. 13. Символ o_k заменяет последовательность символов $\subset_k \supset_k$ и отвечает расположению свободного овала в полосе над $(k-1)$ -й линией (“в k -м слое”), считая снизу.

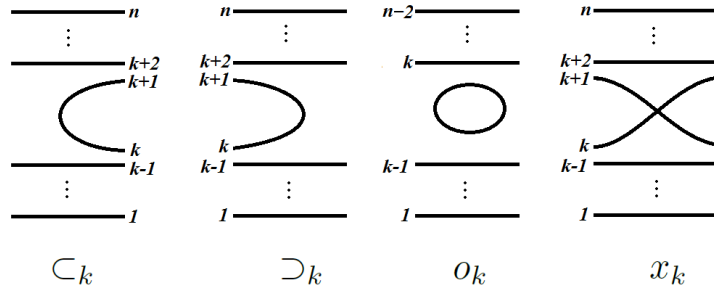


Рис. 13

В частности, развёртка рис. 12 описывается X-кодом

$$x_3 x_2 x_2 x_3 x_3 x_2 x_2 x_7 \supset_1 \dots \subset_6 x_5 x_6 x_6 x_5 \supset_4 \dots \subset_4 x_5 x_6 x_6 x_5,$$

где вместо многоточий должны располагаться символы, показывающие расположение свободных овалов в закрашенных полосах в соответствии с возможностями, перечисленными в таблице 1. При этом надо перебрать все возможные распределения трёх овалов в левой закрашенной на рис. 12 полосе и трёх овалов в правой закрашенной полосе с учётом порядка прохождения овалов при движении слева направо. Для этого введём неотрицательные целочисленные параметры a_i, b_j, c_k и т. д. так, что запись $a_i b_j c_k \dots$ означает, что при движении по развёртке слева направо сначала последовательно проходятся a_i штук овалов в i -ой снизу горизонтальной полосе, затем b_j штук овалов в j -ой снизу горизонтальной полосе и т. д.

Каждой модели ставится в соответствие коса из 8 нитей, которая получается возмущением пересечения комплексификации развёртки и комплексификации пучка прямых (рис. 14; подробности см. [13]). В [13] приведены правила, позволяющие по X-коду записать эту косу в виде слова из стандартных образующих $\sigma_1, \dots, \sigma_7$ группы B_8 кос из 8 нитей⁵.

Известно [16], что если коса из n нитей, соответствующая гипотетической топологической модели кривой степени n , не является квазиположительной⁶, то эта модель не может быть реализована как множество вещественных точек кривой степени n . В качестве проверки на квазиположительность будем, следуя С.Ю. Орекову, использовать следующее

⁵Эта коса определяется однозначно (с точностью до сопряжённости в группе кос) и строится непосредственно по вещественной модели в силу наложенного выше условия максимальности пучка. Если условие максимальности не выполнено, то метод Орекова тоже применим, однако требует трудного перебора возможных переплетений нитей в мнимой области.

⁶Коса из n нитей называется квазиположительной, если её можно записать в виде $\prod_{j=1}^k \omega_j \sigma_{i_j} \omega_j^{-1}$, где $\omega_j, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, – некоторые слова в алфавите $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}\}$.

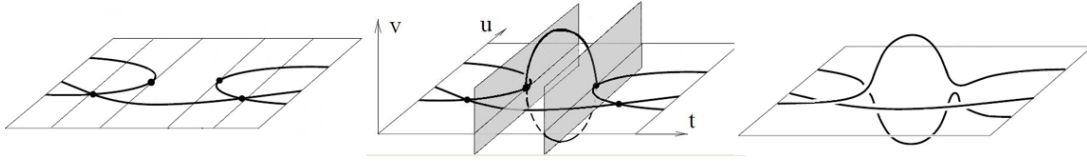


Рис. 14: Построение косы: развёртка – комплексификация – возмущение.

Неравенство Мурасуги—Тристрама. Пусть $b = \prod \sigma_i^{k_i} \in B_m$ – коса из m нитей, где σ_i , $i = 1, 2, \dots, m-1$, – стандартные образующие группы кос из m нитей, и L – замыкание косы b . Если коса b квазиположительна, то выполняется неравенство

$$\eta = |\sigma(b)| + m - e(b) - n(b) \leq 0,$$

где $\sigma(b) = \sigma(L) = \sigma(V + V^T)$ – сигнатура; $n(b) = n(L) = 1 + n(V + V^T)$ – дефект; V – матрица Зейферта; $e(b) = \sum k_i$ – алгебраическая степень косы b (т. е. сумма всех показателей степеней в разложении косы b по образующим группы B_m).

Проверка выполнения неравенства Мурасуги—Тристрама даже для одной модели расположения пересекающихся овалов требует выполнения вычислений, которые нельзя провести вручную: во-первых, из-за большого числа возможных наборов значений параметров $a_i, b_j, \dots$; во-вторых, из-за необходимости вычисления собственных чисел большого количества матриц Зейферта, имеющих достаточно большой размер. Мы пользовались программой, написанной М.А. Гуциным в 2003 г., которая генерирует список всех возможных наборов неотрицательных значений параметров $a_i, b_j, \dots$ и для каждого такого набора вычисляет левую часть неравенства Мурасуги—Тристрама. Эта программа неоднократно использовалась в подобных исследованиях.

Ход вычислений для рассматриваемого примера $(12345678)[++-]$ иллюстрирует таблица 2. На вход программы подаётся X-код с параметрами $a_i, b_j, \dots$ и сумма значений этих параметров, т. е. число $6 - \nu$, где ν – количество букв “о” в X-коде. Во втором столбце таблицы 2 эта сумма указывается в квадратных скобках, до (после) точки с запятой указывается слово из параметров для левой (соответственно, правой) закрашенной полосы на рис. 12. При этом значения индексов записаны без опускания их на полстроки. Программа выдаёт список наборов параметров, для которых неравенство Мурасуги—Тристрама не выполняется. В третьей колонке таблицы 2 проставлен 0 в тех случаях, когда такие наборы параметров обнаружены, т. е. $\eta = 0$ (в остальных случаях $\eta > 0$).

Следуя С.Ю. Орекову, расположения, удовлетворяющие неравенству Мурасуги — Тристрама, попытаемся запретить с помощью условия Фокса—Милнора.

Условие Фокса—Милнора. Пусть $b \in B_n$ – квазиположительная коса, L – её замыкание и $\Delta_L(t)$ – многочлен Александера зацепления L . Если $e(b) = n - 1$, то должен существовать многочлен $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ такой, что $\Delta_L(t) = f(t)f(t^{-1})$. Если $e(b) < n - 1$, то должно выполняться равенство $\Delta_L(t) = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Чтобы многочлен Александера удовлетворял условию Фокса—Милнора, необходимо, чтобы $\Delta_L(-1)$ было квадратом целого числа.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если в разложении многочлена на неприводимые множители есть симметричный многочлен в нечётной степени, то $\Delta_L(t)$ не представляется в виде $\Delta_L(t) = f(t)f(t^{-1})$.

В 2016 году И.М. Борисов дополнил программу Гуцина: в случаях, когда вычисления дают $\eta = 0$, программа производит проверку выполнения условия Фокса—Милнора. Программа

Борисова применялась в работах [1], [2], [12]. Для описываемого примера $(12345678)[+ + -]$ вычисления по программе Гущина дают $\eta = 0$ только для набора значений параметров $b_6 = 6, c_4 = 1, d_6 = 2$ (см. первую строку таблицы 2), который отвечает случаю № 94 из таблицы 1. Вычисления по программе Борисова дают для этого случая выполнение условий Фокса—Милнора, т. е. невозможность кривой степени 8 с отвечающим этому случаю расположением ветвей доказать не удалось.

Таблица 2

Номера строк в таблице 1	Параметры и овалы в X -коде	η
1, 2, 4, 7, 21, 22, 24, 27, 41, 42, 44, 47, 91, 92, 94, 97	a4b6; c4d6 [6]	0
3, 6, 8, 23, 26, 28, 43, 46, 48, 93, 96, 98	a4b6; c4d6o5e4f6 [5]	
5, 9, 25, 29, 45, 49, 95, 99	a4b6; c4d6o5e4f6o5g4h6 [4]	
10, 30, 50, 100	a4b6; c4d6o5e4f6o5g4h6o5i4j6 [3]	
11, 12, 14, 17, 51, 52, 54, 57, 81, 82, 84, 87	a4o3b4c6; d4e6 [5] a4b6o5c4d6; e4f6 [5]	
13, 16, 18, 53, 56, 58, 83, 86, 88	a4o3b4c6; d4e6o5f4g6 [4] a4b6o5c4d6; e4f6o5g4h6 [4]	
15, 19, 55, 59, 85, 89	a4o3b4c6; d4e6o5f4g6o5h4i6 [3] a4b6o5c4d6; e4f6o5g4h6o5i4j6 [3]	
20, 60, 90	a4o3b4c6; d4e6o5f4g6o5h4i6o5j4k6 [2] a4b6o5c4d6; e4f6o5g4h6o5i4j6o5k4l6 [2]	
31, 32, 34, 37, 71, 72, 74, 77	a4o3b4o3c4d6; e4f6 [4] a4b6o3o5c4d6; e4f6 [4] a4b6o5c4d6o5e4f6; g4h6 [4]	
33, 36, 38, 73, 76, 78	a4o3b4o3c4d6; e4f6o5g4h6 [3] a4b6o3o5c4d6; 4e4f6o5g4h6 [3] a4b6o5c4d6o5e4f6; g4h6o5i4j6 [3]	
35, 39, 75, 79	a4o3b4o3c4d6; e4f6o5g4h6o5i4j6 [2] a4b6o3o5c4d6; e4f6o5g4h6o5i4j6 [2] a4b6o5c4d6o5e4f6; g4h6o5i4j6o5k4l6 [2]	
40, 80	a4o3b4o3c4d6; e4f6o5g4h6o5i4j6o5k4l6 [1] a4b6o3o5c4d6; e4f6o5g4h6o5i4j6o5k4l6 [1] a4b6o5c4d6o5e4f6; g4h6o5i4j6o5k4l6o5m4n6 [1]	
61, 62, 64, 67	a4o3b4o3c4o3d4e6; f4g6 [3] a4o3b4c6o3o5d4e6; f4g6 [3] a4b6o3o5c4d6o5e4f6; g4h6 [3] a4b6o5c4d6o5e4f6o5g4h6; i4j6 [3]	
63, 66, 68	a4o3b4o3c4o3d4e6; f4g6o5h4i6 [2] a4o3b4c6o3o5d4e6; f4g6o5h4i6 [2] a4b6o3o5c4d6o5e4f6; g4h6o5i4j6 [2] a4b6o5c4d6o5e4f6o5g4h6; i4j6o5k4l6 [2]	
65, 69	a4o3b4o3c4o3d4e6; f4g6o5h4i6o5j4k6 [1] a4o3b4c6o3o5d4e6; f4g6o5h4i6o5j4k6 [1] a4b6o3o5c4d6o5e4f6; g4h6o5i4j6o5k4l6 [1] a4b6o5c4d6o5e4f6o5g4h6; i4j6o5k4l6o5m4n6 [1]	
70	a3b5; o5o5o5 [3]	

Аналогичным образом исследовались остальные подстановки из списка леммы 1. Заметим, что во всех случаях условия Фокса—Милнора не дали новых ограничений после применения неравенства Мурасуги—Тристрама.

В следующей таблице 3 во второй колонке после подстановки указан выбор центра P пучка, а в третьей колонке – соответствующий X-код без параметров. Центр пучка всегда выбирался вне свободных овалов, причём внутри змеи и вне несвободного овала кривой номер 2 – такой выбор согласно уже принятым обозначениям [12] обозначается буквой A . Запись As обозначает, что точка P выбиралась внутри двугольной компоненты связности дополнения к пересекающимся овалам, на границе которой лежит точка с номером s . В последней колонке указано число подлежащих рассмотрению возможных распределений свободных овалов, т. е. длина соответствующей таблицы вида таблицы 1.

Таблица 3

№	Подстановка	X-код	#
1	(12345678)[+ + –]A1	$x_3x_2x_2x_3x_3x_2x_2x_7 \supset_1 \dots \subset_6 x_5x_6x_6x_5 \supset_4 \dots \subset_4 x_5x_6x_6x_5$	100
2	(12345678)[+ – +]A1	$x_2 \supset_3 \dots \subset_6 x_7x_6x_5x_5x_6x_6x_5 \supset_4 \dots \subset_4 x_1x_5x_6x_6x_5x_5x_6x_6$	100
3	(12347658)[+ + –]A1	$x_2x_3 \supset_4 \dots \subset_7 x_6x_6x_5x_5x_6x_6x_5 \supset_4 \dots \subset_4 x_5x_4x_6x_5x_5x_6x_1$	100
4	(12365478)[+ – –]A1	$x_5x_4x_6x_5x_5x_6x_4x_5 \supset_4 \dots \subset_4 x_5x_6x_6x_5 \supset_6 \dots \subset_1 x_2x_2x_3x_7$	100
5	(12567438)[– + –]A8	$x_6x_5 \supset_4 \dots \subset_4 x_5x_6x_6x_5 \supset_6 \dots \subset_1 x_2x_3x_3x_4x_2x_3x_3x_2x_7x_6$	64
6	(12765438)[+ + +]A8	$x_2x_1x_6x_6x_5 \supset_4 \dots \subset_4 x_5x_4x_6x_5x_5x_4x_4x_5x_7x_6 \supset_5 \dots \subset_3 x_2$	100

6. Построения кривых

Рассмотрим взаимное расположение кривых степеней 2 и 4, представленное на рис. 15, где кривая степени 4 показана более жирной линией. Такое расположение построено Г.М. Полотовским в [11].

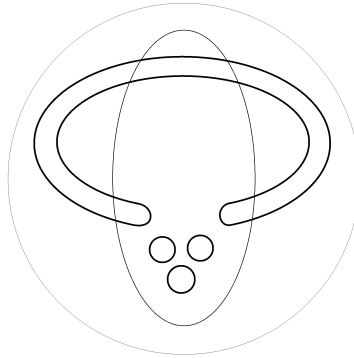


Рис. 15

Рассмотрим кривую степени 2, определяемую уравнением $\widetilde{C}_2 = C_2 + \varepsilon l_1 l_2 = 0$, где прямые l_1 и l_2 пересекают кривую C_2 в точках r_1, r_2, r_3, r_4 , см. рис. 16. При малых по абсолютной величине значениях ε кривая $\widetilde{C}_2$ лежит близко к C_2 и при ε подходящего знака проходит так, как показано на рис. 17. Теперь с помощью малых изменений коэффициентов мы можем добиться устранения двойных точек кривой $C_2 \cdot \widetilde{C}_2 = 0$, результат которого показан на рис. 18; уравнение возмущённой кривой можно записать в виде $\widetilde{C}_4 = C_2 \cdot \widetilde{C}_2 + \varepsilon_1 D_4 = 0$, где ε_1 достаточно мало по абсолютной величине и подходящего знака, а D_4 – какая-нибудь кривая степени 4 без действительных точек.

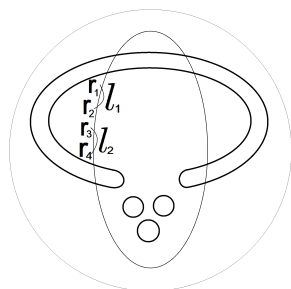


Рис. 16

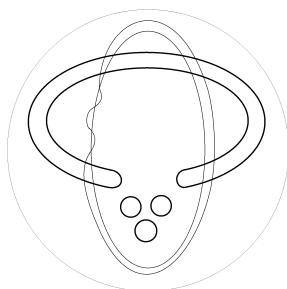


Рис. 17

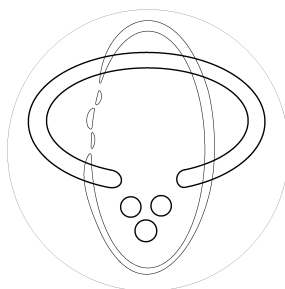


Рис. 18

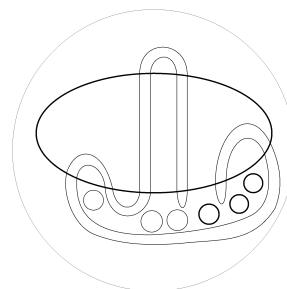


Рис. 19

Расположение рис. 19 гомеоморфно расположению, показанному на рис. 18. Таким образом, мы реализовали расположение двух M -кривых степени 4 типа “змея, обвивающаяся вокруг овала”, отвечающее подстановке $(1, 2, 5, 6, 7, 4, 3, 8)[- + -]$.

Аналогичное удвоение кривой степени 2 в расположениях кривых степени 2 и степени 4, в которых овал M -кривой степени 4 пересекает овал кривой степени 2 в восьми точках, при различном выборе дуг овала кривой степени 2 для пересечения с прямыми l_1 и l_2 позволило реализовать ещё ряд расположений двух M -кривых степени 4 со змеей, обвивающейся вокруг овала, см. рис. 20 – 22. Классификация таких взаимных расположений коники и кривой степени 4 найдена Г.М. Полотовским в [11].

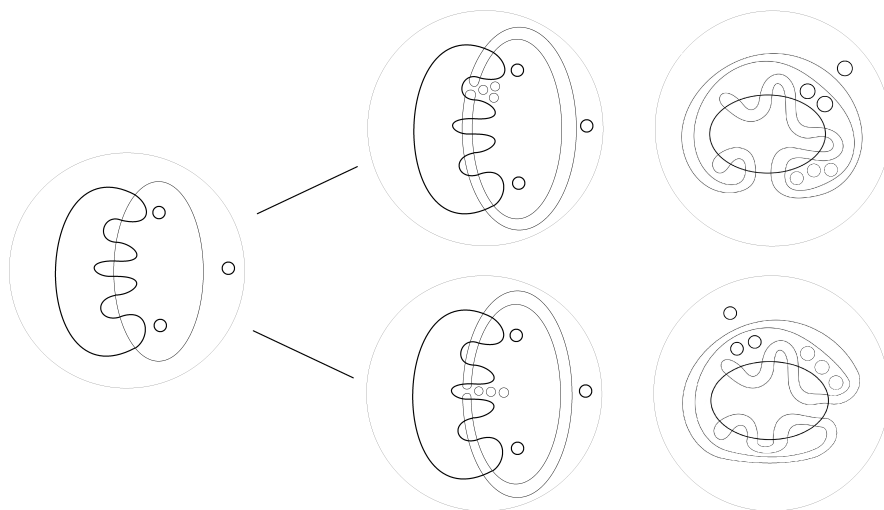


Рис. 20

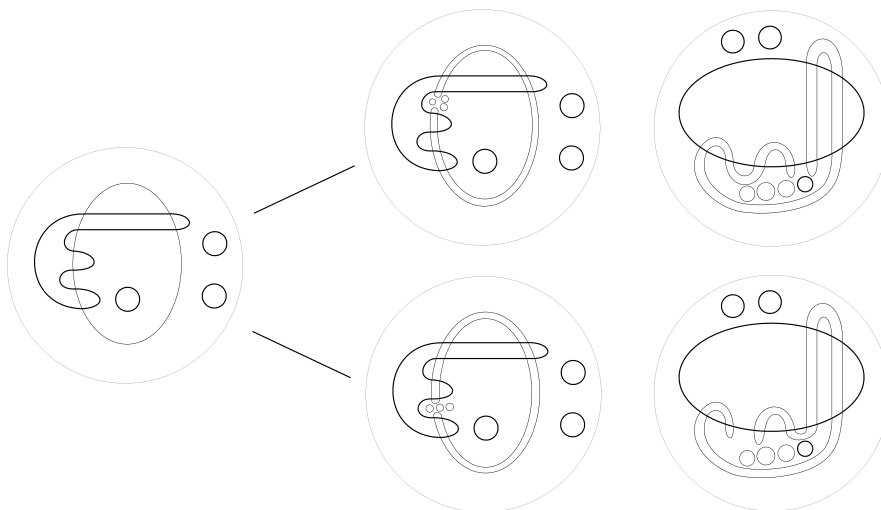


Рис. 21

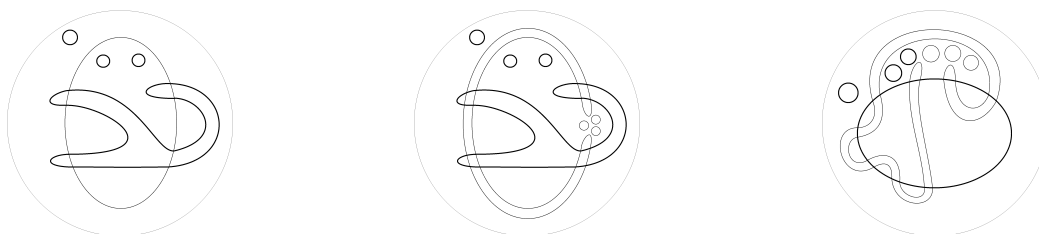


Рис. 22

7. Заключение

Сводка результатов, полученных для 6 подстановок из леммы 1, собрана в таблице 4. Отметим, что максимальный пучок удалось найти для всех подстановок леммы 1.

Таблица 4

№	Подстановка	Результат исследования
1	$(12345678)[++-]$	Построено одно расположение: см. верхний ряд на рис. 20; все остальные расположения запрещены.
2	$(12345678)[+-+]$	Построено одно расположение: см. нижний ряд на рис. 20; все остальные расположения запрещены.
3	$(12347658)[++-]$	Построено одно расположение: см. верхний ряд на рис. 21; все остальные расположения запрещены.
4	$(12365478)[+-+]$	Построено одно расположение: см. нижний ряд на рис. 21; все остальные расположения запрещены.
5	$(12567438)[-+-]$	Построено одно расположение: см. рис. 19; все остальные расположения запрещены.
6	$(12765438)[+++]$	Построено одно расположение: см. рис. 22; все остальные расположения запрещены.

Таким образом, доказана теорема, дающая полную классификацию кривых рассматриваемого типа.

ТЕОРЕМА 2. *Кривыми степени 8 реализуются ровно шесть попарно топологически различных расположений типа “змея без свободного конца, обвивающаяся вокруг овала” (см. условия 1 - 3 и определение 2 выше), показанные на рис. 19 и на правых картинках на рис. 20 – 22.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов И. М., Полотовский Г. М. О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8 // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. Том 176. С. 3–18.
2. Горская В. А., Полотовский Г. М. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Том 22, № 1. С. 24–37.
3. Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // УМН. 1974. Том 29, № 4(178). С. 1–79.
4. Корчагин А. Б., Полотовский Г. М. О расположениях плоской вещественной квинтики относительно пары прямых // Алгебра и анализ. 2009. Том 21, № 2. С. 92–112.
5. Корчагин А. Б., Шустин Е. И. Аффинные кривые степени 6 и устранения невырожденной шестикратной особой точки // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Том 52, № 6. С. 1181–1199.
6. Оревкин С. Ю. Новая аффинная M -секстика // Функц. анал. прилож. 1998. Том 32, № 2. С. 141–143.
7. Оревкин С. Ю. Новая аффинная M -секстика, II // Усп. мат. наук. 1998. Том 53, № 5(323). С. 243–244.
8. Оревкин С. Ю. Проективные коники и M -квинтики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов // Мат. заметки. 1999. Том 65, № 4. С. 632–635.
9. Оревкин С. Ю. Расположения M -квинтики относительно коники, максимально пересекающей ее нечетную ветвь // Алгебра и анализ. 2007. Том 19, № 4. С. 174–242.
10. Оревкин С. Ю., Полотовский Г. М. Проективные M -кубики и M -квартики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов // Алгебра и анализ. 1999. Том 11, № 5. С. 166–184.
11. Полотовский Г. М. Каталог M -распадающихся кривых 6-го порядка // ДАН СССР. 1977. Том 236, № 3. С. 548–551.
12. Пучкова Н. Д. О взаимных расположениях двух M -кривых степени 4 // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2023. Том 222. С. 69–82.
13. Orevkov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curve // Topology. 1999. Vol. 38. P. 779–810.
14. Polotovskii G. M. On the classification of decomposing plane algebraic curves // Lect. Notes Math. 1992. Vol. 1524. P. 52–74.
15. Polotovskii G. M. On the classification of decomposable 7-th degree curves // Contemp. Math. 2000. Vol. 253. P. 219–234.
16. Rudolf L. Algebraic functions and closed braids // Topology. 1983. Vol. 22. P. 191–202.

REFERENCES

1. Borisov I. M., Polotovskiy G. M. 2020, "On the topology of plane real decomposable curves of degree 8", *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Tematicheskie obzory*, vol. 176, pp. 3–18.
2. Gorskaya V. A., Polotovskiy G. M. 2022, "On the disposition of cubic and pair of conics in a real projective plane", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, vol. 22, no. 1, pp. 24–37.
3. Gudkov D. A. 1974, "The topology of real projective algebraic varieties", *Russian Mathematical Surveys*, vol. 29, no. 4(178), pp. 1–79.
4. Korchagin A. B., Polotovskiy G. M. 2003, "On arrangements of plane real quintics with respect to a pair of lines", *Commun. Contemp. Math.*, vol. 21, no. 2, pp. 231–244.
5. Korchagin A. B., Shustin E. I. 1989, "Affine curves of degree 6 and smoothings of a nondegenerate sixth order singular point", *Math. USSR-Izv.*, vol. 33, no. 3, pp. 501–520.
6. Orevkov S. Yu. 1998, "A new affine M-sextic", *Functional Analysis and Its Applications*, vol. 32, no. 2, pp. 141–143.
7. Orevkov S. Yu. 1998, "A new affine M-sextic. II", *Russian Mathematical Surveys*, vol. 53, no. 5, pp. 1099–1101.
8. Orevkov S. Yu. 1999, "Projective cones and M-quintics generic with respect to a maximally intersecting pair of ovals", *Math. Notes*, vol. 65, no. 4, pp. 528–532.
9. Orevkov S. Yu. 2007, "Positions of an M-quintic relative to a conic intersecting maximally the odd branch of the quintic", *Algebra i Analiz*, vol. 19, no. 4, pp. 174–242.
10. Orevkov S. Yu., Polotovskiy G. M. 2000, "Projective M-cubics and M-quartics in general position with a maximally intersecting pair of ovals", *Algebra i Analiz*, vol. 11, no. 5, pp. 166–184.
11. Polotovskiy G. M. 1977, "A catalogue of M-decomposing curves of sixth order", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 236, no. 3, pp. 548–551.
12. Puchkova N. D. 2023, "On mutual arrangements of two M-curves of degree 4", *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory*, vol. 222, pp. 69–82.
13. Orevkov S. Yu. 1999, "Link theory and oval arrangements of real algebraic curve", *Topology*, vol. 38, pp. 779–810.
14. Polotovskii G. M. 1992, "On the classification of decomposing plane algebraic curves", *Lect. Notes Math.*, vol. 1524, pp. 52–74.
15. Polotovskii G. M. 2000, "On the classification of decomposable 7-th degree curves", *Contemp. Math.*, vol. 253, pp. 219–234.
16. Rudolf L. 1983, "Algebraic functions and closed braids", *Topology*, vol. 22, pp. 191–202.

Получено: 15.06.2022

Принято в печать: 12.09.2023