

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 3.

УДК 514.113.5

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-42-55

Пары взаимодополнительных 2-мерных симплициальных многогранников: интересные примеры

С. А. Лоренс, А. С. Лао, М. Е. Лао, О. И. Челябинца

Лоренс Серж Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент, Российский государственный университет туризма и сервиса; Институт сервисных технологий (г. Москва).

e-mail: lawrencenko@hotmail.com

Лао Алекс Сергеевич — IT-компания «Комета Геймс» (г. Москва).

e-mail: laoshanda@hotmail.com

Лао Мария Евгеньевна — IT-компания «Комета Геймс» (г. Москва).

e-mail: many444@mail.ru

Челяпина Ольга Ивановна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет туризма и сервиса; Институт сервисных технологий (г. Москва).

*e-mail: olga-chelyapina@mail.ru***Аннотация**

Построен пример пары (2-мерных) 8-вершинных симплициальных тороидальных многогранников (каждый многогранник без самопересечений) с одним и тем же 1-мерным остовом в 3-мерном (евклидовом) пространстве, у которых нет ни одной общей 2-мерной грани, причём объединение 2-мерных остовов этих двух многогранников даёт геометрическую реализацию в 3-мерном пространстве 2-мерного остова 4-мерного гипероктаэдра. Также построен пример пары 6-вершинных симплициальных многогранных проективных плоскостей с одним и тем же 1-мерным остовом в 4-мерном пространстве, у которых нет ни одной общей 2-мерной грани, причём объединение этих проективных плоскостей даёт геометрическую реализацию в 4-мерном пространстве 2-мерного остова 5-мерного гипертетраэдра. Наконец, показывается, как можно образно представить атомы в молекуле метана CH_4 “связанными” парой внутренне непересекающихся остовных многогранных лент Мёбиуса.

Ключевые слова: многогранник, триангуляция, тор, проективная плоскость, лента Мёбиуса, диаграмма Шлегеля, GeoGebra

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:

С. А. Лоренс, А. С. Лао, М. Е. Лао, О. И. Челябинца. Пары взаимодополнительных 2-мерных симплициальных многогранников: интересные примеры // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 3, с. 42–55.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 3.

UDC 514.113.5

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-42-55

Pairs of mutually complementary 2-dimensional simplicial polyhedra: Interesting examples

S. A. Lawrence, A. S. Lao, M. E. Lao, O. I. Chelyapina

Lawrence Serge Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Russian State University of Tourism and Service; Institute of Service Technologies (Moscow).

e-mail: lawrencenko@hotmail.com

Lao Alex Sergeevich — IT Company “Kometa Games” (Moscow).

e-mail: laoshanda@hotmail.com

Lao Maria Evgenievna — IT Company “Kometa Games” (Moscow).

e-mail: many444@mail.ru

Chelyapina Olga Ivanovna — candidate of technical sciences, associate professor, Russian State University of Tourism and Service; Institute of Service Technologies (Moscow).

e-mail: olga-chelyapina@mail.ru

Abstract

We construct an example of a pair of (2-dimensional) 8-vertex simplicial toroidal polyhedra (each polyhedron without self-intersection) with same 1-dimensional skeleton in (Euclidean) 3-space, which do not have a single common 2-face, and the union of the 2-skeletons of these two polyhedra gives a geometric realization of the 2-skeleton of the 4-dimensional hyperoctahedron in 3-space. Also, we construct an example of a pair of 6-vertex simplicial polyhedral projective planes with the same 1-skeleton in 4-space, which do not have a single common 2-face, and the union of these projective planes gives a geometric realization of the 2-skeleton of the 5-hypertetrahedron in 4-space. Finally, it is shown how to imagine, figuratively, the atoms in the molecule of methane CH_4 “linked” by a pair of internally disjoint spanning polyhedral Möbius strips.

Keywords: polyhedron, triangulation, torus, projective plane, Möbius strip, Schlegel diagram, GeoGebra

Bibliography: 23 titles.

For citation:

S. Lawrence, A. S. Lao, M. E. Lao, O. I. Chelyapina, 2023, “Pairs of mutually complementary 2-dimensional simplicial polyhedra: Interesting examples”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 42–55.

1. Введение

В фокусе внимания настоящей статьи находятся триангуляции трёх 2-мерных поверхностей: тора, проективной плоскости и ленты Мёбиуса. Комбинаторно каждая такая триангуляция задаётся соответствующей схемой, т.е. своим (простым) графом вместе с указанием тех циклов длины 3, которые ограничивают грани триангуляции. Например на рис. 1 (слева) показана комбинаторная триангуляция тора с 8-вершинным полным четырёхдольным графом $K_{2,2,2,2}$, а на рис. 1 (справа) — триангуляция проективной плоскости с полным графом K_6 . На

рис. 1 отождествите противоположные стороны каждого фундаментального многоугольника попарно, как предписано метками, чтобы получить тор или проективную плоскость соответственно.

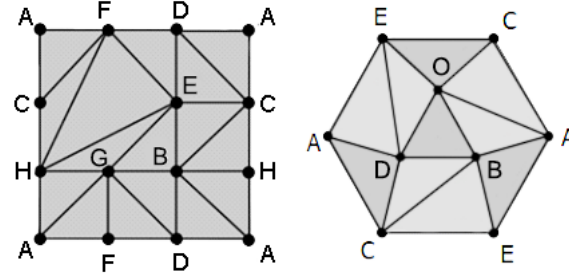


Рис. 1: Комбинаторные триангуляции тора (слева) и проективной плоскости (справа).

Геометрическая реализация комбинаторной триангуляции T 2-мерной поверхности — это геометрический, 2-мерный, *симплициальный* многогранник (т.е. все грани которого — геометрические симплексы) в евклидовом n -мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) такой, что матрицы инцидентности и смежности в многограннике идентичны матрицам инцидентности и смежности в триангуляции T (соответственно). Задача нахождения геометрической реализации данной комбинаторной триангуляции не всегда проста, поскольку требуется, чтобы реализующий многогранник не содержал самопересечений, или, другими словами, реализующий многогранник должен представлять собой геометрическое вложение T в $\mathbb{R}^n$. Эти задачи находятся в центре внимания на протяжении столетий. Возможно, самым глубоким и основополагающим результатом здесь является теорема Эрнста Штайница, опубликованная ровно столетие назад, в 1922 году [19]: *каждый планарный 3-связный граф может быть геометрически реализован как 1-мерный остов выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$* . К настоящему времени, кроме теоремы Штайница, получены и другие важные результаты. В частности, известно, что всякая триангуляция тора [1] геометрически реализуема в $\mathbb{R}^3$, а всякая триангуляция T проективной плоскости [4] геометрически реализуема в $\mathbb{R}^4$ и, более того [5], имеет грань f такую, что триангуляция ленты Мёбиуса, полученная из T удалением внутренности f , имеет геометрическую реализацию в $\mathbb{R}^3$. Настоящая работа в основном посвящена геометрическим реализациям двух комбинаторных 2-мерных триангуляций, представленных на рис. 1.

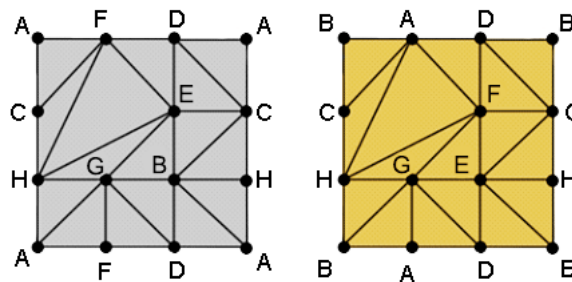


Рис. 2: Исходная комбинаторная триангуляция тора (слева) и дополнительная к ней триангуляция (справа).

Триангуляция тора на рис. 1 (слева) продублирована на рис. 2 (слева); она известна [7, 13] как вторая (из 21-й) неприводимая триангуляция тора и уже была ранее геометрически реализована [16] как симплициальная тороидальная многогранная подвеска в $\mathbb{R}^3$, а также как 2-мерный *благородный* многогранник в $\mathbb{R}^4$ [16], т.е. многогранник, являющийся *изоэдральным*

(т.е. все грани подобны) и *изогональным* (т.е. все вершины подобны), свойства которого изучены в [16, 18]. Важность и значимость этой триангуляции тора обуславливается тем, что её граф изоморфен полному четырёхдольному графу $K_{2,2,2,2}$, являющемуся 1-мерным остовом 4-мерного гипероктаэдра, одного из шести правильных выпуклых 4-мерных политопов.

Триангуляция тора на рис. 1 (слева) найдена в 2-мерном остове 4-мерного гипероктаэдра в $\mathbb{R}^4$, а триангуляция проективной плоскости на рис. 1 (справа) найдена в 2-мерном остове 5-мерного гипертетраэдра (5-мерного симплекса) в $\mathbb{R}^5$. Это открытие приводит нас к новым геометрическим реализациям вышеназванных комбинаторных триангуляций при помощи диаграмм Шлегеля этих выпуклых политопов. *Диаграмма Шлегеля* [6] получается центральной проекцией выпуклого n -мерного (у нас $n = 4, 5$) политопы $P^n \subset \mathbb{R}^n$ на одну из его $(n - 1)$ -мерных фасет через точку за этой фасетой. и является $(n - 1)$ -мерным политопом в $\mathbb{R}^{n-1}$. Польза диаграммы Шлегеля состоит в том, что (в силу условия выпуклости политопы) при центральной проекции сохраняется свойство геометрической реализованности 2-мерной триангуляции как подкомплекса 2-мерного остова политопы P^n . Подчеркнём, что в диаграмме Шлегеля геометрически реализуется *весь* 2-мерный остов политопы P^n *целиком*.

Две комбинаторные триангуляции называются *изоморфными*, если между их множествами вершин может быть установлено биективное соответствие, сохраняющее все рёбра и грани, и (*комбинаторно*) *различными*, если их множества граней различны (т.е. в одной из триангуляций есть грань uvw , а в другой — нет), и *идентичными*, если множества граней равны. Например, читатель может проверить, что триангуляция на рис. 2 (слева) идентична исходной (рис. 1, слева), но различна от изображённой на рис. 2 (справа); например, в левой есть грань GEB , а в правой — нет. Хорошо известно, что тор [9, 10, 14] допускает ровно 12 попарно различных, но изоморфных комбинаторных триангуляций с (вершинно-) помеченным (т.е. с различимыми вершинами) графом $K_{2,2,2,2}$. Эти триангуляции перечислены в явном виде в [9, 17]. Далее, проективная плоскость [11, 12, 15] тоже допускает ровно 12 (т.е. такое же число, что и в случае тора, но это просто совпадение, насколько позволяет заключить наше знание на сегодняшний день) попарно различных, но изоморфных комбинаторных триангуляций с помеченным графом K_6 , перечисленных в явном виде в [11, 21, 22]. Отсюда можно заключить, что лента Мёбиуса тоже допускает ровно 12 попарно различных, но изоморфных комбинаторных триангуляций с помеченным графом K_5 . Подчеркнём, что свойство комбинаторной различности комбинаторных триангуляций с одним и те же графом превращается в свойство различности их геометрических реализаций как множеств точек в пространстве.

Мы делаем особый акцент на известном факте [8, 17], что *двенадцать комбинаторных триангуляций каждой названной поверхности, тор и проективная плоскость, разбиваются на шесть пар взаимодополнительных триангуляций*, и этот основополагающий факт будет существенно использован в последующих разделах. По аналогии с графами (1-мерными симплициальными комплексами), комбинаторные триангуляции T_1 и T_2 одной и той же 2-мерной поверхности (рассматриваемые как 2-мерные симплициальные комплексы) с одним и тем же помеченным графом G называются *дополнительными* друг к другу или *взаимодополнительными*, если всякий цикл из трёх ребер графа G ограничивает грань в T_1 тогда и только тогда, когда он не ограничивает грань в T_2 , и наоборот. Пересечение множеств граней взаимодополнительных триангуляций T_1 и T_2 пусто; сверьтесь с рис. 2, на котором представлена одна из шести пар взаимодополнительных комбинаторных триангуляций тора с помеченным графом $K_{2,2,2,2}$. С другой стороны, объединение множеств граней T_1 и T_2 даёт полный 2-мерный остов 4-мерного гипероктаэдра в случае тора и 5-мерного гипертетраэдра в случае проективной плоскости.

Комбинаторная триангуляция (2-мерной) поверхности называется *самодополнительной*, если она изоморфна своей дополнительной триангуляции. Например, самодополнительной является триангуляция тора на рис. 1 (слева), а также триангуляция проективной плоскости на рис. 1 (справа) и триангуляция ленты Мёбиуса на рис. 7 (слева). В силу отсутствия края у

замкнутой поверхности, в любой триангуляции замкнутой поверхности каждое ребро входит ровно в два цикла длины 3 — это циклы, ограничивающие две грани триангуляции. Поэтому для самодополнительности триангуляции замкнутой поверхности необходимо, чтобы в её графе каждое ребро входило ровно в четыре цикла длины 3, два из которых ограничивают грани, а два другие — нет. Важно отметить, что *кроме двух, указанных в начале абзаца, больше не существует самодополнительных триангуляций тора или проективной плоскости, неизоморфных этим двум* [8]. Для доказательства этого утверждения используются полные списки неприводимых триангуляций тора [7, 13] (21 неприводимая триангуляция с точностью до изоморфизма) и проективной плоскости [3] (2 неприводимые триангуляции). *Неприводимая триангуляция* замкнутой 2-мерной поверхности, отличной от сферы, — это триангуляция, в которой каждое ребро входит хотя бы в один цикл длины 3, не ограничивающий грань. Непосредственной проверкой можно убедиться, что в списках неприводимых триангуляций тора и проективной плоскости только две вышеназванные удовлетворяют условию, что в них каждое ребро входит ровно в четыре цикла длины 3.

Геометрические реализации пары взаимодополнительных 2-мерных комбинаторных триангуляций (с одним и тем же графом) называются *взаимодополнительными геометрическими многогранниками*, если у них один и тот же 1-мерный остов, реализующий общий граф триангуляций. Пары взаимодополнительных геометрических симплициальных многогранников будут построены в последующих разделах. Комбинаторное свойство взаимодополнительности триангуляций гарантирует, что пересечение соответствующих взаимодополнительных многогранников как геометрических образов исходных триангуляций — лишь общий 1-мерный остов.

Особо отметим, что мы реализуем геометрически *все* 12 триангуляций тора, соответственно проективной плоскости, используя в качестве 1-мерного остова одну и ту же геометрическую реализацию графа $K_{2,2,2,2}$, соответственно K_6 , построенную в $\mathbb{R}^3$ (раздел 2), соответственно в $\mathbb{R}^4$ (раздел 3). Конструкция дает пример пары взаимодополнительных симплициальных многогранных торов (оба без самопересечений), имеющих один и тот же 1-мерный остов в 3-мерном пространстве, но не имеющих ни одной общей 2-мерной грани, и аналогичный пример пары многогранных проективных поверхностей в 4-мерном пространстве.

Наконец, отметим в скобках, что свойство (2-мерной) взаимодополнительности можно также рассматривать как ослабление известного в комбинаторной геометрии “комбинаторного условия дополненности”, определяемого в общем случае произвольной размерности так [2]: подмножество вершин триангуляции (не обязательно 2-мерной) определяет симплекс триангуляции тогда и только тогда, когда дополнительное подмножество не определяет такого симплекса. Известно [2], что среди минимальных (по числу вершин) триангуляций замкнутых 2-мерных поверхностей, отличных от сферы, этому условию удовлетворяет лишь триангуляция проективной плоскости с полным графом K_6 , которую мы рассмотрим в разделе 3.

2. Взаимодополнительные многогранные торы в $\mathbb{R}^3$

В этом разделе мы построим новые 2-мерные симплициальные многогранники в $\mathbb{R}^3$, являющиеся геометрическими реализациями комбинаторных триангуляций тора на рис. 1 (слева) и рис. 2.

Геометрически мы используем правильный 4-мерный гипероктаэдр в $\mathbb{R}^4$, который содержит (в своем 2-мерном остове) все 12 геометрических триангуляций с помеченным графом $K_{2,2,2,2}$, являющимся 1-мерным остовом гипероктаэдра. В частности, гипероктаэдр содержит пару взаимодополнительных триангуляций, изображенных на рис. 2. Нам нужно только спроецировать эти 12 триангуляций из $\mathbb{R}^4$ в одну из 3-мерных граней (граничных тетраэдров) гипероктаэдра или, другими словами, нам нужно реализовать 12 триангуляций геометрически

в диаграмме Шлегеля гипероктаэдра.

Сначала построим геометрическую реализацию триангуляции на рис. 1 (слева), она же продублирована на рис. 2 (слева). Конкретно для гипероктаэдра, диаграмма Шлегеля строится следующим образом. Зафиксируем правильный тетраэдр $ABCD$ (внешний тетраэдр) в $\mathbb{R}^3$ (см. рис. 3), центр описанной сферы которого находится в точке $(0, 0, 0)$. Также зафиксируем его гомотетический образ $EFGH$ (внутренний тетраэдр) относительно $(0, 0, 0)$ с отрицательным коэффициентом $-1/k$ (где $k > 1$), подобранным так, чтобы $EFGH$ лежал строго внутри $ABCD$. Затем соединим два тетраэдра всеми возможными ребрами, кроме пар AE , BF , CG и DH . Граф, полученный таким образом, представляет собой $K_{2,2,2,2}$. Наконец, мы геометрически вставляем 16 граней комбинаторной схемы триангуляции из рис. 1 (слева) в построенный 1-мерный остов. На рис. 3 (справа) показан вид многогранника, в котором для информативности изображения удалена внутренность грани ADC . Глядя на рис. 3 (справа), может ошибочно показаться, что у многогранника имеется грань ADG , но на самом деле такой грани нет, а затенение участка ADG относится к грани ADB , проходящей *под* вершиной G .

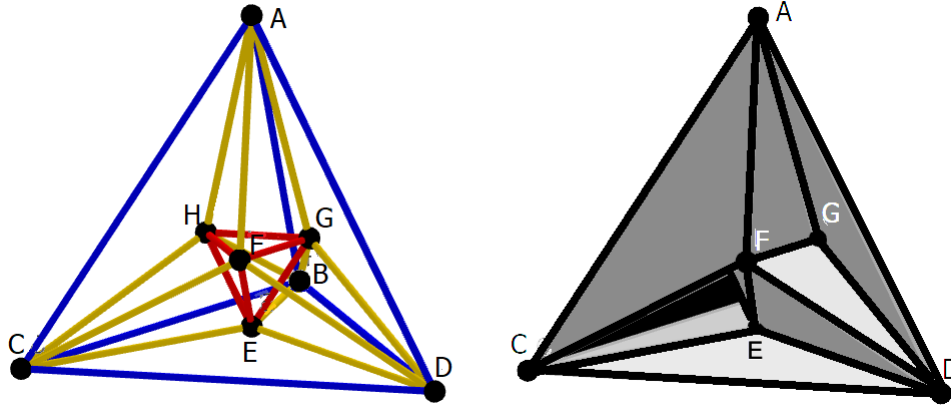


Рис. 3: Геометрическая реализация 1-мерного остова (слева) и видимая часть многогранника с удалённой гранью ADC (справа).

Координаты вершин можно задать следующим образом (этот выбор не единственен):

$$A = (0, 0, 3), \quad B = (\sqrt{8}, 0, -1), \quad C = (-\sqrt{2}, \sqrt{6}, -1), \quad D = (-\sqrt{2}, -\sqrt{6}, -1),$$

$$E = \left(0, 0, -\frac{3}{k}\right), \quad F = \left(-\frac{\sqrt{8}}{k}, 0, \frac{1}{k}\right), \quad G = \left(\frac{\sqrt{2}}{k}, -\frac{\sqrt{6}}{k}, \frac{1}{k}\right), \quad H = \left(\frac{\sqrt{2}}{k}, \frac{\sqrt{6}}{k}, \frac{1}{k}\right). \quad (1)$$

Определим диапазон значений параметра k , при которых сфера, описанная вокруг внутреннего тетраэдра, совпадает со сферой, вписанной во внешний тетраэдр. Нетрудно найти, что радиус у первой сферы равен $3/k$, а у второй равен 1, и, значит, сферы совпадают при $3/k = 1$, т.е. при $k = 3$. Таким образом, значение k должно быть больше 3, если мы хотим, чтобы внутренний тетраэдр оставался внутренним, полностью находясь строго внутри внешнего тетраэдра.

Поскольку восемь вершин A, B, C, D, E, F, G, H с координатами, указанными в списке (1), определяют диаграмму Шлегеля в $\mathbb{R}^3$ гипероктаэдра, получается, что 2-мерный остов гипероктаэдра целиком реализуется геометрически в $\mathbb{R}^3$ с этими вершинами. Мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. *Все двенадцать комбинаторных триангуляций 2-мерного тора с помеченным полным четырёхдольным графом $K_{2,2,2,2}$, в частности, пара взаимодополнительных*

комбинаторных триангуляций на рис. 2, реализуются геометрически в одном и том же 1-мерном остове в 3-мерном пространстве, с координатами восьми вершин, заданными списком (1), где k — параметр > 3 . $\square$

Мы реализовали вышеописанную конструкцию с помощью программного обеспечения GeoGebra, взяв $k = 4$. В частности, на рис. 4 представлены 3-мерные модели новых тороидальных многогранников, которые являются геометрическими реализациями комбинаторных триангуляций на рис. 2 соответственно. В качестве эксперимента, мы по одной брали (2-мерные) грани из комбинаторных схем на рис. 2 и вставляли их в 1-мерный остов на рис. 3, проверяя, что каждая вновь добавляемая грань не пересекает уже добавленные грани, что сделало GeoGebra своеобразным инструментом экспериментальной математики.

Итак, на рис. 4 представлена пара взаимодополнительных 2-мерных симплициальных многогранных торов (оба без самопересечений) с одним и тем же 1-мерным остовом в 3-мерном пространстве, причём свойство взаимодополнительности гарантирует, что их пересечение (как множеств точек) — лишь их общий 1-мерный остов. Другими словами, 2-мерный остов 4-мерного гипероктаэдра представляет собой объединение двух внутренне непересекающихся взаимодополнительных симплициальных многогранных торов; кроме того, оба тора реализуются геометрически в диаграмме Шлегеля 4-мерного гипероктаэдра в 3-мерном пространстве, которая даёт два взаимодополнительных многогранных тора (с треугольными гранями) в 3-мерном пространстве, у которых один и тот же 1-мерный остов, но нет ни одной общей 2-мерной грани.

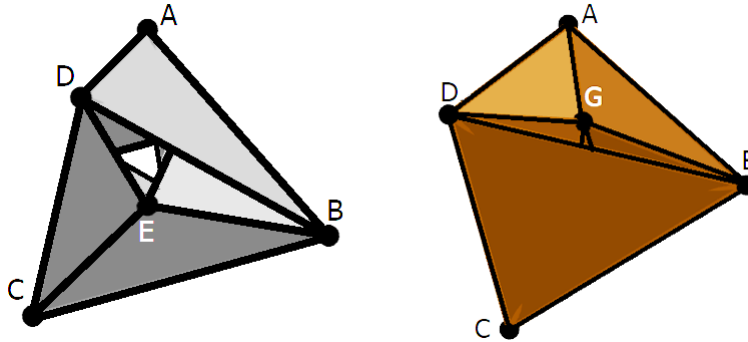


Рис. 4: Слева: геометрическая реализация комбинаторной триангуляции тора на рис. 2 (слева). Справа: геометрическая реализация дополнительной комбинаторной триангуляции на рис. 2 (справа), $k = 4$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Построена пара взаимодополнительных 2-мерных симплициальных тороидальных многогранников (каждый без самопересечений) с одним и тем же 1-мерным остовом в 3-мерном пространстве, у которых нет ни одной общей 2-мерной грани, причём объединение 2-мерных остовов этих многогранников даёт геометрическую реализацию в 3-мерном пространстве полного 2-мерного остова 4-мерного гипероктаэдра. ■

3. Взаимодополнительные многогранные 2-мерные проективные плоскости в $\mathbb{R}^4$

В отличие от 2-мерного тора, ограничивающего тороидальный политоп (“toroidal polytope”) в $\mathbb{R}^3$, 2-мерная проективная плоскость не ограничивает пространственную область ни в $\mathbb{R}^3$, ни в $\mathbb{R}^4$. Поэтому в этом разделе мы говорим не о “многограннике”, а о 2-мерной многогранной поверхности.

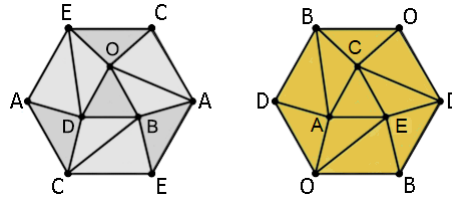


Рис. 5: Исходная комбинаторная триангуляция проективной плоскости (слева) и дополнительная к ней комбинаторная триангуляция (справа).

На рис. 1 (справа) показана комбинаторная триангуляция проективной плоскости с полным графом K_6 , имеющая минимально возможное число вершин; она же продублирована на рис. 5 (слева) и известна как первая из двух неприводимых триангуляций проективной плоскости [3]. Координаты шести вершин в $\mathbb{R}^4$ для 2-мерной симплицальной многогранной поверхности, геометрически реализующей эту комбинаторную триангуляцию, можно назначить следующим образом:

$$A = \left(0, 0, 0, \frac{4}{\sqrt{5}}\right), \quad B = \left(1, 1, 1, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad C = \left(1, -1, -1, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \\ D = \left(-1, 1, -1, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad E = \left(-1, -1, 1, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad O = (0, 0, 0, 0) \quad (2)$$

Пять вершин A, B, C, D, E лежат на 3-мерной гипертетраэре радиуса $4/\sqrt{5}$ с центром в начале координат, занимаемом вершиной O . Расстояние между любой парой из этих пяти вершин равно $2\sqrt{2}$. Таким образом, указанные пять вершин определяют правильный 4-мерный гипертетраэдр в $\mathbb{R}^4$, звёздно подразделенный шестой вершиной O .

Можно усмотреть, что диаграмма Шлегеля правильного n -мерного гипертетраэдра (в $\mathbb{R}^n$) представляет собой $(n-1)$ -мерный гипертетраэдр (в $\mathbb{R}^{n-1}$), звёздно подразделённый $(n+1)$ -й вершиной в его центре. Таким образом, все шесть вершин A, B, C, D, E и O вместе определяют диаграмму Шлегеля (в $\mathbb{R}^4$) 5-мерного гипертетраэдра, и, следовательно, весь 2-мерный остов 5-мерного гипертетраэдра геометрически реализуется в $\mathbb{R}^4$ с координатами шести вершин, как указано в списке (2). Отсюда следует, что все 12 комбинаторных триангуляций с помеченным графом K_6 геометрически реализуются в $\mathbb{R}^4$ с одним и тем же геометрическим графом, и мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. *Все двенадцать комбинаторных триангуляций 2-мерной проективной плоскости с помеченным полным графом K_6 , в частности, пара взаимодополнительных комбинаторных триангуляций на рис. 5, реализуются геометрически в одном и том же 1-мерном остове в 4-мерном пространстве, с координатами шести вершин, заданными списком (2).*

■

Итак, пару взаимодополнительных комбинаторных 2-мерных симплицальных многогранных проективных плоскостей на рис. 5 можно реализовать геометрически в одном и том же 1-мерном остове в 4-мерном пространстве, причём свойство взаимодополнительности гарантирует, что их пересечением будет лишь их общий 1-мерный остов. Другими словами, 2-мерный остов 5-мерного гипертетраэдра представляет собой объединение двух внутренне непересекающихся взаимодополнительных симплицальных многогранных проективных плоскостей; кроме того, обе проективные плоскости реализуются геометрически в диаграмме Шлегеля 5-мерного гипертетраэдра в 4-мерном пространстве, которая дает две многогранные проективные плоскости (с треугольными гранями) в 4-мерном пространстве, у которых один и тот же 1-мерный остов, но нет ни одной общей 2-мерной грани.

СЛЕДСТВИЕ 2. Построена пара взаимодополнительных 2-мерных симплицальных многогранных проективных плоскостей (каждая без самопересечений) с одним и тем же 1-мерным остовом в 4-мерном пространстве, у которых нет ни одной общей 2-мерной грани, причем объединение этих проективных плоскостей даёт геометрическую реализацию в 4-мерном пространстве полного 2-мерного остова 5-мерного гипертетраэдра. ■

4. Взаимодополнительные многогранные ленты Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$

В этом разделе мы займёмся геометрическими реализациями в $\mathbb{R}^3$ комбинаторных триангуляций ленты Мёбиуса с помеченным полным графом K_5 . Все такие триангуляции изоморфны между собой и коллективно представляют минимальную (по числу вершин) триангуляцию ленты Мёбиуса, идентифицированную как одну из шести неприводимых триангуляций ленты Мёбиуса [20].

Мы используем диаграмму Шлегеля (в $\mathbb{R}^4$) правильного 5-мерного гипертетраэдра, построенную в разделе 3, считая, что её ребро OA лежит на четвёртой координатной оси Ow . Ортогонально спроецируем эту диаграмму из $\mathbb{R}^4$ вдоль оси w в гиперплоскость $xyz (= \mathbb{R}^3)$, в результате чего две вершины A и O сливаются в одну ($A = O$) и пять образов задаваемых списком (2) вершин получаются как точки в $\mathbb{R}^3$ со следующими целочисленными координатами:

$$A = O = (0, 0, 0), \quad B = (1, 1, 1), \quad C = (1, -1, -1), \quad D = (-1, 1, -1), \quad E = (-1, -1, 1) \quad (3)$$

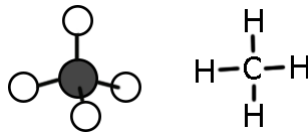


Рис. 6: Тетраэдрическая модель молекулы метана CH_4 .

Итак, при ортогональной проекции диаграмма Шлегеля правильного 5-мерного гипертетраэдра преобразуется в правильный тетраэдр $BCDE$ в $\mathbb{R}^3$, звёздно подразделённый вершиной $A = O$, находящейся в его центре. При этом рёбра AB , AC , AD и AE с общей вершиной A образуют хорошо известную тетраэдрическую модель молекулы метана CH_4 с четырьмя простыми ковалентными связями (рис. 6). Другими словами, при ортогональной проекции диаграмма Шлегеля (в $\mathbb{R}^4$) правильного 5-мерного гипертетраэдра преобразуется в диаграмму Шлегеля (в $\mathbb{R}^3$) правильного 4-мерного гипертетраэдра, в которой геометрически реализован весь 2-мерный остов 4-мерного гипертетраэдра, состоящий из всех $\binom{5}{3} = 10$ -ти возможных 2-мерных симплексов.

Условно будем считать исходной комбинаторную триангуляцию ленты Мёбиуса, показанную на рис. 7 (слева). Эта триангуляция геометрически реализуется в $\mathbb{R}^3$ (рис. 7, справа) в ортогональной проекции многогранной проективной плоскости, реализующей в $\mathbb{R}^4$ комбинаторную триангуляцию на рис. 5 (слева). Построенную таким образом многогранную ленту Мёбиуса можно закодировать циклической последовательностью $ABDECA$, которая определяет цикл на крае ленты Мёбиуса (рис. 7). Всего можно задать двенадцать последовательностей, начинающихся и заканчивающихся на A и содержащих между ними $4!/2 = 12$ циклических перестановок множества четырёх вершин B , C , D и E . Каждый из этих 12-ти кодов определяет многогранную ленту Мёбиуса, причём все двенадцать попарно различны как множества точек в $\mathbb{R}^3$.

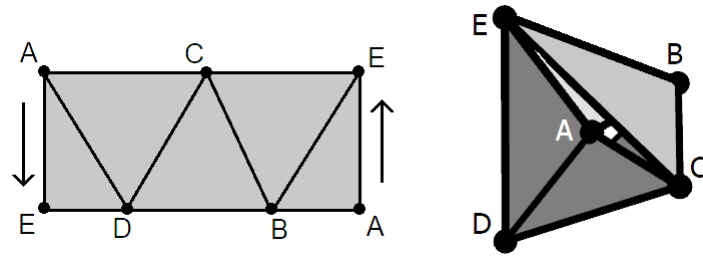


Рис. 7: Исходная комбинаторная триангуляция ленты Мёбиуса (слева) и её геометрическая реализация в 3-мерном пространстве (справа).

Код $AEBBCDA$ задаёт многогранную ленту Мёбиуса, геометрически реализующую комбинаторную триангуляцию ленты Мёбиуса, дополнительную к исходной (рис. 8, слева). Эта дополнительная лента Мёбиуса геометрически реализуется в $\mathbb{R}^3$ (рис. 8, справа) при той же ортогональной проекции дополнительной проективной плоскости на рис. 5 (справа). Левое изображение на рис. 9 дублирует геометрическую реализацию, показанную на рис. 8 (справа), а правое изображение на рис. 9 показывает эту же геометрическую реализацию с удалённой гранью EDC для удобства обзора.

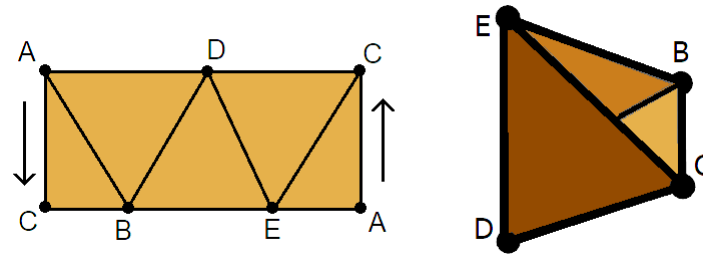


Рис. 8: Комбинаторная триангуляция ленты Мёбиуса (слева), дополнительная к исходной, и ее геометрическая реализация в 3-мерном пространстве (справа).

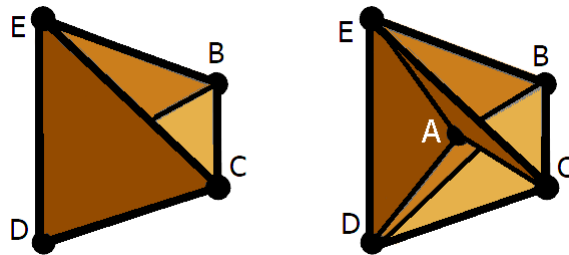


Рис. 9: Геометрическая реализация дополнительной триангуляции ленты Мёбиуса в 3-мерном пространстве (слева) и ее вид с удалённой гранью EDC (справа).

Итак, из теоремы 2 извлекаются ещё два следствия.

СЛЕДСТВИЕ 3. Каждая из двенадцати комбинаторных триангуляций ленты Мёбиуса с помеченным полным графом K_5 реализуется геометрически в одном и том же 1-мерном остоле в 3-мерном пространстве с координатами пяти вершин, указанными в списке (3).

■

СЛЕДСТВИЕ 4. Построена пара взаимодополнительных 5-вершинных симплициальных многогранных лент Мёбиуса (каждая без самопересечений) с одним и тем же 1-мерным

остовом в 3-мерном пространстве, у которых нет ни одной общей 2-мерной грани, причем объединение этих лент Мёбиуса даёт геометрическую реализацию в 3-мерном пространстве полного 2-мерного остова 4-мерного гипертетраэдра. ■

Таким образом, атомы в тетраэдрической модели молекулы метана CH_4 можно образно представить “связанными” парой внутренне непересекающихся остовных многогранных лент Мёбиуса. Было бы чрезвычайно интересно дать физико-химическую интерпретацию установленного геометрического факта.

5. Заключение

Заметим в заключение, что все вершины каждого из двух взаимодополнительных симплициальных тороидальных многогранников на рис. 4 расположены на объединении двух концентрических сфер радиусов $\frac{3}{4}$ и 3 соответственно, т.е. на поверхности четвертой степени (“quartic surface”) в $\mathbb{R}^3$ с уравнением:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 - \frac{9}{16}\right)\left(x^2 + y^2 + z^2 - 9\right) = 0$$

Одна из задач, 77-я по счёту, поставленных Якобом Штейнером в 1832 году, может быть сформулирована следующим образом: дать описание комбинаторных триангуляций сферы (в оригинальной постановке не только триангуляций), которые можно геометрически реализовать в виде выпуклых многогранников, вписанных в сферу или другую квадратичную поверхность (“quadratic surface”) в $\mathbb{R}^3$. Обсуждение 77-й задачи Штейнера и обзор современного состояния этой задачи (в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{RP}^3$) можно найти в работе [23]. По аналогии мы ставим следующие задачи для будущих исследований.

Дать описание комбинаторных триангуляций тора, которые можно геометрически реализовать в виде многогранников, вписанных в:

- (а) объединение концентрических (2-мерных) сфер или другую поверхность 4-й степени в (1) $\mathbb{R}^3$, (2) $\mathbb{RP}^3$,
 (б) 3-мерную гипертферу или другую квадратичную гиперповерхность в (1) $\mathbb{R}^4$, (2) $\mathbb{RP}^4$.

Что касается пункта (б), в работе [16] триангуляция тора на рис 1 (слева) геометрически реализована в виде благородного 2-мерного симплициального многогранника в $\mathbb{R}^4$, вписанного в 3-мерную гипертферу в $\mathbb{R}^4$.

Благодарности

Первый автор благодарит профессора Жана-Марка Шленкера (Jean-Marc Schlenker, University of Luxembourg) за интерес к задачам, поставленным для будущих исследований в разделе Заключение, и профессора Хао Чэня (Hao Chen, Georg-August-Universität Göttingen) за полезное обсуждение современного состояния задачи Штейнера.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Archdeacon D., Bonnington C. P., Ellis-Monaghan J. A. How to exhibit toroidal maps in space // Discrete Comput. Geom. 2007. Vol. 38. № 3. P. 573-594.
2. Banchoff T. F., Kühnel W. Tight polyhedral models of isoparametric families, and PL-taut submanifolds // Adv. Geom. 2007. Vol. 7. № 4. P. 613-629.

3. Barnette D. Generating the triangulations of the projective plane // J. Combin. Theory Ser. B. 1982. Vol. 33. № 3. P. 222-230.
4. Barnette D. All triangulations of the projective plane are geometrically realizable in E^4 // Israel J. Math. 1983. Vol. 44. № 1. P. 75-87.
5. Bonnington C. P., Nakamoto A. Geometric realization of a triangulation on the projective plane with one face removed // Discrete Comput. Geom. 2008. Vol. 40. № 1. P. 141-157.
6. Grünbaum B. Convex Polytopes (Graduate Texts in Mathematics, 221), 2nd edition. V. Kaibel, V. Klee and G. M. Ziegler, eds., Springer-Verlag, New York, 2003.
7. Лавренченко С. А. Неприводимые триангуляции тора // Украинский геометрический сборник. 1987. Т. 30. С. 52-62.
8. Lavrenchenko S. A. All self-complementary simplicial 2-complexes homeomorphic to the torus or the projective plane // Baku International Topological Conference: Abstracts. Part II (Baku, 3-9 October 1987) — Baku, 1987. P. 159.
9. Лавренченко С. А. Перечисление в явном виде всех автоморфизмов неприводимых триангуляций тора и всех упаковок на тор помеченных графов этих триангуляций / Харьковский институт радиоэлектроники им. акад. М. К. Янгеля. Харьков, 1987. Деп. в УкрНИИТИ 01.10.1987, № 2779-Ук87. 57 с.
10. Лавренченко С. А. О числе треугольных упаковок вершинно-помеченного графа на торе // Украинский геометрический сборник. 1988. Т. 31. С. 76-90.
11. Лавренченко С. А. Таблицы всех существенно различных триангуляций проективной плоскости с некоторыми интересными графами / МГУ, Москва, 1989. Деп. в ВИНТИ 25.01.1989, № 613-B89. 23 с.
12. Лавренченко С. А. О числе треугольных упаковок помеченного графа на проективной плоскости // Украинский геометрический сборник. 1989. Т. 32. С. 71-84.
13. Lavrenchenko S. A. Irreducible triangulations of the torus // J. Soviet Math. 1990. Vol. 51. № 5. P. 2537-2543.
14. Lavrenchenko S. A. The number of triangular packings of a vertically labeled graph on a torus // J. Soviet Math. 1991. Vol. 54. № 1. P. 719-728.
15. Lavrenchenko S. A. Number of triangular packings of a marked graph on a projective plane // J. Soviet Math. 1992. Vol. 59. № 2. P. 741-749.
16. Lawrencenko S. Polyhedral suspensions of arbitrary genus // Graphs Combin. 2010. Vol. 26. № 4. P. 537-548.
17. Lawrencenko S., Magomedov A. M. Generating the triangulations of the torus with the vertex-labeled complete 4-partite graph $K_{2,2,2,2}$ // Symmetry. 2021. Vol. 13, № 8, 1418.
18. Маслова Ю. В., Петров М. В. Многогранник Лавренченко рода один // Герценовские чтения «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования»: сборник трудов конференции (Санкт-Петербург, 09-13 апреля 2018 г.) — Санкт-Петербург: 2018. С. 162-168.
19. Steinitz E. Polyeder und Raumeinteilungen, in Enzykl. Math. Wiss. Part 3A12 (Geometrie). 1922. P 1-139.

20. Chávez M.-J., Lawrencenko S., Quintero A., Villar M.-T. Irreducible triangulations of the Möbius band // *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.* 2014. № 2. P. 44-50.
21. Chen B., Kwak J. H., Lawrencenko S. Weinberg bounds over nonspherical graphs // *J. Graph Theory*. 2000. Vol. 33. № 4. P. 220-236.
22. Chen B., Lawrencenko S. Structural characterization of projective flexibility // *Discrete Math.* 1998. Vol. 188. № 1-3. P. 233-238.
23. Chen H., Schlenker J.-M. Weakly inscribed polyhedra // *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B*. 2022. Vol. 9. P. 415-449.

REFERENCES

1. Archdeacon, D., Bonnington, C. P. & Ellis-Monaghan, J. A. 2007, "How to exhibit toroidal maps in space", *Discrete Comput. Geom.*, vol. 38, no. 3, pp. 573-594.
2. Banchoff, T. F. & Kühnel, W. 2007, "Tight polyhedral models of isoparametric families, and PL-taut submanifolds", *Adv. Geom.*, vol. 7, no. 4, pp. 613-629.
3. Barnette, D. 1982, "Generating the triangulations of the projective plane", *J. Combin. Theory Ser. B*, vol. 33, no. 3, pp. 222-230.
4. Barnette, D. 1983, "All triangulations of the projective plane are geometrically realizable in E^4 ", *Israel J. Math.*, vol. 44, no. 1, pp. 75-87.
5. Bonnington, C. P. & Nakamoto, A. 2008, "Geometric realization of a triangulation on the projective plane with one face removed", *Discrete Comput. Geom.*, vol. 40, no. 1, pp. 141-157.
6. Grünbaum, B. "Convex Polytopes" (Graduate Texts in Mathematics, 221), 2nd edition. V. Kaibel, V. Klee and G. M. Ziegler, eds., Springer-Verlag, New York, 2003.
7. Lawrencenko, S. A., 1987, "Irreducible triangulations of the torus", (Russian) *Ukrain. Geom. Sb.*, vol. 30, pp. 52-62.
8. Lavrenchenko, S. A., 1987, "All self-complementary simplicial 2-complexes homeomorphic to the torus or the projective plane", in *Baku International Topological Conference: Abstracts. Part II* (Baku, 3-9 October 1987), Baku, p. 159.
9. Lawrencenko, S. A., 1987, "Explicit lists of all automorphisms of the irreducible toroidal triangulations and of all toroidal embeddings of their labeled graphs". (Russian) Yangel Kharkov Institute of Radio Electronics, Kharkov. Report deposited at UkrNIINTI (Ukrainian Scientific Research Institute of Scientific and Technical Information), report no. 2779-Uk87 (1 Oct. 1987).
10. Lawrencenko, S. A., 1988, "On the number of triangular embeddings of a vertex-labeled graph on the torus", (Russian) *Ukrain. Geom. Sb.*, vol. 31, pp. 76-90.
11. Lawrencenko, S. A., 1989, "Tables of all essentially different triangulations of the projective plane with some interesting graphs". (Russian) Lomonosov Moscow State University, Moscow. Report deposited at VINITI (Institute of Scientific and Technical Information), report no. 613-B89 (25 Jan. 1989).
12. Lawrencenko, S. A., 1989, "On the number of triangular packings of a labeled graph in the projective plane", (Russian) *Ukrain. Geom. Sb.*, vol. 32, pp. 71-84.

13. Lavrenchenko, S. A., 1990, “Irreducible triangulations of the torus”, *J. Soviet Math.*, vol. 51, no. 5, pp. 2537-2543.
14. Lavrenchenko, S. A., 1991, “The number of triangular packings of a vertically labeled graph on a torus”, *J. Soviet Math.*, vol. 54, no. 1, pp. 719-728.
15. Lavrenchenko, S. A., 1992, “Number of triangular packings of a marked graph on a projective plane”, *J. Soviet Math.*, vol. 59, no. 2, pp. 741-749.
16. Lawrencenko, S. A., 2010, “Polyhedral suspensions of arbitrary genus”, *Graphs Combin.*, vol. 26, no. 4, pp. 537-548.
17. Lawrencenko, S. A. & Magomedov, A. M. 2021, “Generating the triangulations of the torus with the vertex-labeled complete 4-partite graph $K_{2,2,2,2}$ ”, *Symmetry*, vol. 13, no. 8, 1418.
18. Maslova, Y. V. & Petrov, M. V. 2018, “Lavrenchenko’s polyhedron of genus one”. (Russian) in Some Actual Problems of Modern Mathematics and Mathematical Education; Herzen Readings—2018 (St. Petersburg, April 9-13, 2018) Russian Herzen State Pedagogical University: St. Petersburg, Russia, pp. 162-168.
19. Steinitz, E. 1922, “Polyeder und Raumeinteilungen”, in Enzykl. Math. Wiss. Part 3AB12 (Geometrie), pp. 1-139.
20. Chávez, M.-J., Lawrencenko, S., Quintero, A. & Villar, M.-T. 2014, “Irreducible triangulations of the Möbius band”, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, no. 2, pp. 44-50.
21. Chen, B., Kwak, J. H. & Lawrencenko, S. 2000, “Weinberg bounds over nonspherical graphs”, *J. Graph Theory*, vol. 33, no. 4, pp. 220-236.
22. Chen, B. & Lawrencenko, S. 1998, “Structural characterization of projective flexibility”, *Discrete Math.*, vol. 188, no. 1-3, pp. 233-238.
23. Chen, H. & Schlenker, J.-M. 2022, “Weakly inscribed polyhedra”, *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B*, vol. 9, pp. 415-449.

Получено: 21.08.2022

Принято в печать: 12.09.2023