ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 3.

УДК 519.856 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-26-41

Решение задачи частичного хеджирования через двойственную задачу

С. С. Лещенко

Лещенко Сергей Сергеевич — Специализированный учебно-научный центр – школа-интернат им. А. Н. Колмогорова Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: sslsystemup@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача частичного хеджирования, изучавшаяся в работе [20]. В ней оценивается риск дефицита с использованием выпуклого функционала потерь $L(\cdot)$. В нашей работе мы формулируем двойственную задачу, отличную от двойственной задачи в [20], доказываем отсутствие разрыва двойственности, а также существование решения исходной и двойственной задач. Кроме этого, мы получаем результаты статьи [20] при более слабых предположениях, используя подход, связанный с применением теорем выпуклого анализа.

Ключевые слова: выпуклая двойственность, выпуклые меры риска, функционал потерь, частичное хеджирование.

Библиография: 22 названий.

Для цитирования:
С. С. Лещенко. Решение задачи частичного хеджирования через двойственную задачу // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 3, с. 26–41.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 3.

UDC 519.856 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-26-41

Solving the problem of partial hedging through a dual problem

S. S. Leshchenko

Leshchenko Sergey Sergeevich — Specialized Educational and Scientific Center – A. N. Kolmogorov boarding School of Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: sslsystemup@yandex.ru

Abstract

In this paper we consider the problem of partial hedging studied in [20]. In this problem, the risk of shortfall is estimated using a robust convex loss functional $L(\cdot)$. In our work, we formulate a dual problem different from the dual problem in [20], we prove the absence of a duality gap, and also the existence of a solution to the primal and dual problems. In addition, we obtain the results of [20] under weaker assumptions using an approach related to the application of theorems of convex analysis.

Keywords: convex duality, real-valued convex risk measures, robust loss functionals, partial hedging.

Bibliography: 22 titles.

For citation:
S. S. Leshchenko, 2023, "Solving the problem of partial hedging through a dual problem", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 26–41.

1. Введение

Задача частичного хеджирования широко исследовалась в литературе. Приведем следующий неполный список. Фоллмер и Лейкерт в работе [5] ввели и решили задачу эффективного хеджирования в общей семимартингальной модели для непрерывного времени. Кирч в своей диссертации [10] изучил когерентную и робастную модель эффективного хеджирования. Ксю ([21]) рассмотрел эффективное хеджирование для нестрого выпуклой функции потерь и получил явные формулы в модели ценового процесса скачкообразной диффузии, а в статье [22] применил методологию эффективного хеджирования для оценки производных финансовых инструментов на неполных рынках. Накано ([12], [13]) изучил эффективное хеджирование в случае, когда дефицит определяется количественно когерентной мерой риска, а в работе [14] решена задача нахождения оптимального хеджирования дефолтных платежных обязательств на неполных рынках, моделируемых процессами Ито. Рудлофф ([15], [16]) рассмотрела эффективное хеджирование в случаях, когда дефицит оценивается с помощью когерентной меры рисква и выпуклой меры риска. Хернандес–Хернандес и Тревино–Агилар в своей работе [9] изучили задачу частичного хеджирования европейского опциона в случае, когда стратегия хеджирования выбирается с помощью робастного выпуклого функционала потерь, включающего штрафную функцию. Тревино–Агилар в своей статье [20] также рассмотрел задачу частичного хеджирования платежного обязательства.

Остановимся подробнее на задаче частичного хеджирования платежного обязательства H, рассмотренной в статье [20]. В этой задаче стратегия хеджирования выбирается с помощью робастного выпуклого функционала потерь $L(\cdot)$, включающего штрафную функцию $\gamma(\cdot)$ и класс абсолютно непрерывных вероятностных мер $\mathcal{Q}$. В статье [20] показано, как построить оптимальную стратегию. Задача оптимизации $\mathbf{SH}(c)$ как критерий выбора хеджирования относится к минимаксному типу задач. В основном результате статьи [20] представлена двойственная задача оптимизации $\mathbf{DH}(\lambda)$, которая характеризует оптимальное решение исходной задачи, если функционал потерь $L(\cdot)$ имеет ассоциированную выпуклую меру риска $\rho^L(\cdot)$, а также доказано, что

$$\mathbf{SH}(c) = \sup_{\lambda>0} \{\mathbf{DH}(\lambda) - \lambda c\}. \tag{1}$$

В определении функционала потерь $L(\cdot)$ фигурирует функция потерь $l(\cdot)$, на которую накладываются следующие условия:

$$l \in C^2,\ l \text{ строго выпукла, } l \text{ строго возрастает,}$$

$$l(0) = l^{'}(0) = 0 \text{ и } \lim_{x\to+\infty} l^{'}(x) = +\infty.$$

Как и в предыдущих работах, мы рассматриваем статическую задачу частичного хеджирования, а именно, задачу из статьи [20]. Основная цель нашей статьи — это получить те же основные результаты, что и в статье [20], но при накладывании более слабых предположений на функцию l, а именно:

$$l \in C^1,\ l \text{ строго выпукла, } l \text{ строго возрастает, } l(0) = l^{'}(0) = 0.$$

Стоит отметить, что для доказательства равенства (1) нам потребуются ещё более слабые условия:

$$l \text{ строго выпукла, } l \text{ строго возрастает, } l(0) = 0.$$

Дифференцируемость функции l потребуется только для явного нахождения оптимального решения $\widehat{V}$ задачи $\mathbf{SH}(c)$.
Отметим также, что для доказательства равенства (1) мы рассматриваем другую двойственную задачу $\mathbf{F}(c)$, отличную от $\mathbf{DH}(\lambda)$. Как и в статьях [9], [20], [6], [8], интересной особенностью модели, рассматриваемой в данной работе, является то, что и прямая, и двойственная задача имеют решения. Это позволяет нам охарактеризовать решение прямой задачи через решение двойственной задачи.
Опишем нашу задачу более подробно. Предположим, что H — это неотрицательная случайная величина, характеризующая платежное обязательство, а $V \in \mathbb{B}_c$ — это случайная величина, характеризующая терминальное значение капитала. Множество $\mathbb{B}_c$ интерпретируется как множество терминальных значений капитала, отвечающих всем стратегиям с начальным капиталом, не превышающим c. В некоторых случаях V будет покрывать стоимость H (будем говорить, что тогда V суперхеджирует H). Если событие, при котором это происходит, имеет вероятность, равную единице, то это приводит к большой или даже бесконечной цене (см. [7]). Поэтому будем считать, что вероятность этого события меньше единицы. Размер дефицита определяется как $(H - V)^+$. Наша задача состоит в том, чтобы количественно оценить риск дефицита, и с этой целью мы используем робастный функционал $L(\cdot)$.

2. Формулировка задачи и основные результаты

Фиксируем полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, на котором определены случайные величины H и V. Математическое ожидание относительно меры $\mathbf{P}$ обозначается как $\mathbf{E}$. Обозначим через $\mathcal{Q}$ выпуклый класс всех абсолютно непрерывных вероятностных мер относительно $\mathbf{P}$. Для $Q \in \mathcal{Q}$ плотность Q относительно $\mathbf{P}$ обозначается как $\frac{dQ}{d\mathbf{P}}$, а математическое ожидание по Q обозначается как $\mathbf{E}_Q[\cdot]$. Выпуклый класс $\mathcal{Q}$ состоит из всех абсолютно непрерывных вероятностных мер относительно $\mathbf{P}$. При $p \geqslant 1$ (соответственно, $p = 0$) мы будем обозначать через L^p линейное пространство случайных величин X таких, что норма $||X||_p := \mathbf{E}^{1/p}[|X|^p]$ конечна (соответственно, X измерима и конечнозначна), а через L^p_+ его неотрицательные элементы. В пространствах L^p случайные величины, равные почти наверное, отождествляются. Зафиксируем показатель $p \in (1, \infty)$ и обозначим через q его сопряженный показатель. Он определяется формулой $q^{-1} = 1 - p^{-1}$.

Для формулировки прямой оптимизационной задачи нам понадобится ввести следующие определения и обозначения.
Функционал L, который мы будем использовать в дальнейшем, имеет следующее робастное представление

$$L(\cdot) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \left\{ \mathbf{E}_Q \left[l(\cdot) \right] - \gamma(Q) \right\}.$$

Мы предполагаем, что функция потерь $l : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ из робастного представления может удовлетворять двум наборам условий:
(a) l строго выпукла, l строго возрастает, $l(0) = 0$;
(б) $l \in C^1$, l строго выпукла, l строго возрастает, $l(0) = l^{'}(0) = 0$.
Штрафная функция $\gamma(\cdot) : \mathcal{Q} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ удовлетворяет следующим условиям:
1) $\inf\limits_{Q\in\mathcal{Q}} \gamma(Q) > -\infty$;
2) γ не равна тождественно ∞;
3) условие роста (G): существуют числа $d, s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, такие, что

$$\gamma(Q) \geqslant d + s \left|\left| \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \right|\right|_q, \quad Q \in \mathcal{Q}.$$

В частности, если для $Q \in \mathcal{Q}$ штрафная функция $\gamma(Q)$ конечна, то плотности $\frac{dQ}{d\mathbf{P}}$ являются элементами L^q.
Пространство L^0 будем считать снабженным сходимостью по вероятности. В частности, $\overline{A}$ означает замыкание множества $A \subset L^0$ относительно сходимости по вероятности. Множество $A \subseteq L^0_+$ будем называть телесным (solid), если $0 \leqslant \zeta \leqslant \eta \in A$ влечет $\zeta \in A$. Введем множество $\mathbb{B}_1$, которое интерпретируется как совокупность финансовых позиций, допускающих хеджирование при начальном капитале, не превышающем единицы. С математической точки зрения будет предполагаться, что $\mathbb{B}_1$ — это замкнутое, выпуклое, телесное (solid) подмножество L^0_+, которое включает в себя положительные постоянные из интервала $[0, 1]$. "Двойственное множество" $\mathcal{D}$ — это поляра множества $\mathbb{B}_1$:

$$\mathcal{D} := \mathbb{B}^0_1 = \left\{ m \in L^0_+ | \mathbf{E}\left[mb \right] \leqslant 1 \text{ для каждого } b \in \mathbb{B}_1 \right\}.$$

Как следует из теоремы Бранната–Шахермайера [2], поскольку $\mathbb{B}_1$ — замкнутое, выпуклое, телесное подмножество L^0_+, то поляра множества $\mathcal{D}$ — это снова $\mathbb{B}_1$, т.е. $\mathcal{D}^0 = \mathbb{B}_1$. Для $c > 0$ мы определим

$$\mathbb{B}_c := c\mathbb{B}_1 = \left\{ cX | \text{для } X \in \mathbb{B}_1 \right\}.$$

Прямая оптимизационная задача формулируется следующим образом:

$$\mathbf{SH}(c) := \inf_{V\in\mathbb{B}_c} L((H - V)^+). \tag{2}$$

Здесь H — это неотрицательная $\mathcal{F}$–измеримая случайная величина, удовлетворяющая следующему условию:

$$\pi_{\sup}(H) := \sup_{m\in\mathcal{D}} \mathbf{E}\left[mH \right] < \infty. \tag{3}$$

Предполагается, что весовой выигрыш $l(H)$ принадлежит L^p:

$$\mathbf{E}\left[|l(H)|^p \right] < \infty. \tag{4}$$

Отметим, что $\mathbf{SH}(c)$ — это минимальный риск дефицита, количественно определяемый функционалом L.

Аналогично [9] полезно ввести выпуклую меру риска ρ на L^p, отвечающую штрафной функции $\gamma(\cdot)$:

$$\rho(X) := \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \left\{ \mathbf{E}_Q \left[-X \right] - \gamma(Q) \right\}, \quad X \in L^p. \tag{5}$$

Отметим также, что условие роста (G) для штрафной функции в контексте действительных выпуклых мер риска сформулировано Черидито и Ли в статье [3]. При выполнении условий 1)–3), накладываемых на штрафную функцию, из [3, теорем 4.2 и 4.3] следует, что мера риска ρ корректно определена. Более точно, справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть $\gamma(\cdot)$ — штрафная функция, удовлетворяющая условиям 1)–3). Тогда мера риска ρ, определенная в (5), принимает только действительные значения и определяет действительную выпуклую меру риска. Каждый элемент $X \in L^p$ имеет окрестность, на которой $\rho(X)$ липшицева и непрерывна по норме в L^p.*

Пусть $\gamma^{\min}$ — штрафная функция, определяемая формулой

$$\gamma^{\min}(Q) := \sup_{X \in L^p} \left\{ \boldsymbol{E}_Q\left[-X\right] - \rho(X) \right\}, \quad Q \in \mathcal{Q}.$$

Определим $\mathcal{Q}^{\min}$ следующим образом:

$$\mathcal{Q}^{\min} := \left\{ Q \in \mathcal{Q} | \quad \gamma^{\min}(Q) < +\infty \right\}.$$

Тогда все плотности относительно $\boldsymbol{P}$ вероятностных мер из $\mathcal{Q}^{\min}$ являются элементами L^q. Штрафная функция $\gamma^{\min}$ выпукла и полунепрерывна снизу относительно слабой топологии $\sigma(L^q, L^p)$. Она удовлетворяет всем условиям 1)–3). Более того, мера риска ρ допускает робастное представление:

$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathcal{Q}^{\min}} \left\{ \boldsymbol{E}_Q\left[-X\right] - \gamma^{\min}(Q) \right\}, \quad X \in L^p.$$

Сформулируем еще одно полезное утверждение, которое нам понадобится в дальнейшем. Поскольку мера риска удовлетворяет свойству трансляционной инвариантности ($\rho(X+c) = \rho(X) - c$ для любых $c \in \mathbb{R}$), то $\sup\limits_{g \in L^p} \{\mathbf{E}\left[-\beta g\right] - \rho(g)\} = +\infty$, если $\beta \in L^q_+$ и $\mathbf{E}\left[\beta\right] \neq 1$. Действительно, если $\mathbf{E}\left[\beta\right] > 1$, то возьмем $g = -n, n \in \mathbb{N}$. Если $\mathbf{E}\left[\beta\right] < 1$, то возьмем $g = n, n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, имеет место представленное ниже утверждение.

Утверждение 1. $\sup\limits_{g \in L^p} \{\boldsymbol{E}[-\beta g] - \rho(g)\} = +\infty$, *если $\beta \in L^q_+$ не является плотностью вероятностной меры. В случае, когда $\beta \in L^q_+$ и $\boldsymbol{E}[\beta] = 1$ получаем, что $\sup\limits_{g \in L^p} \{\boldsymbol{E}[-\beta g] - \rho(g)\} = \gamma^{\min}(\beta.\boldsymbol{P})$, где $\beta.\boldsymbol{P}$ — абсолютно непрерывная относительно меры $\boldsymbol{P}$ вероятностная мера, соответствующая вероятностной плотности β.*

В заключение длинной серии определений и обозначений определим функцию $u(\cdot,\cdot)$ следующим образом:

$$u(h, \lambda) := \inf_{0 \leqslant v \leqslant h} \left\{ l(h - v) + \lambda v \right\}.$$

В статье [20] формулируется следующая двойственная оптимизационная задача:

$$\mathbf{DH}(\lambda) := \sup_{m \in \mathcal{D}} \sup_{Q \in \mathcal{Q}^{\min}} \left\{ \mathbf{E}_Q\left[u\left(H, \lambda \frac{m}{\frac{dQ}{d\mathbf{P}}}\right)\right] - \gamma^{\min}(Q) \right\}, \tag{6}$$

где оптимум выбирается по оптимальным вероятностным мерам Q из $\mathcal{Q}^{\min}$ и оптимальным ценовым ядрам m из двойственного множества $\mathcal{D}$. Основной результат статьи [20] заключается в следующем:

$$\mathbf{SH}(c) = \sup_{\lambda > 0} \left\{ \mathbf{DH}(\lambda) - \lambda c \right\}.$$

Мы рассматриваем следующую двойственную задачу:

$$\mathbf{F}(c) = -\inf_{\alpha,\beta \in L^1_+ \times L^q_+} \left\{ \mathbf{E}\left[-\beta u\left(H, \frac{\alpha}{\beta}\right)\mathbb{I}_{\{\beta>0\}}\right] + c \sup_{V \in \mathbb{B}_1 \cap L^\infty} \mathbf{E}\left[\alpha V\right] + \gamma^{\min}(\beta.\mathbf{P}) + \delta_{\{\mathbf{E}[\beta]=1\}} \right\}, \tag{7}$$

где $\beta.\mathbf{P}$ — абсолютно непрерывная относительно меры $\mathbf{P}$ вероятностная мера, соответствующая вероятностной плотности β. Поскольку $\beta.\mathbf{P}(\beta = 0) = 0$, то $\mathbf{F}(c)$ корректно определена.

Оказывается, как следует из основной теоремы, $\mathbf{SH}(c) = \mathbf{F}(c)$. Основная теорема, которую мы будем доказывать в данной статье, формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть штрафная функция $\gamma(\cdot)$ удовлетворяет условиям 1)–3), а также выполняются условия* (3) *и* (4).

1. Пусть l удовлетворяет набору условий (а). Тогда прямая оптимизационная задача (2) *и двойственная оптимизационная задача* (7) *имеют решения $\widehat{V}$ и $(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta})$. При этом $\widehat{V}$ является решением задачи* (2) *тогда и только тогда, когда $\widehat{V}$ удовлетворяет равенству*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left\{-\widehat{\alpha}x - \widehat{\beta}l((H-x)^+)\right\} = -\widehat{\alpha}\widehat{V} - \widehat{\beta}l((H-\widehat{V})^+) \text{ п.н.}$$

2. Если дополнительно преполагается, что функция l удовлетворяет набору условий (б), то прямая оптимизационная задача (2) *и двойственная оптимизационная задача* (7) *имеют единственное решение. При этом $\widehat{V}$ является решением задачи* (2) *тогда и только тогда, когда $\widehat{V}$ удовлетворяет равенству*

$$\widehat{V} = \left(H - (l^*)'\left(\frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\beta}}\right)\right)^+ \mathbb{I}_{\{\widehat{\beta}>0\}} \text{ п.н.}$$

Более того, в обоих случаях выполняется равенство:

$$\boldsymbol{SH}(c) = \boldsymbol{F}(c) = \sup_{\lambda>0}\left\{\boldsymbol{DH}(\lambda) - \lambda c\right\}.$$

3. Доказательства

Доказательство теоремы.

Лемма 1. *1) Функция $bu(h, \frac{a}{b})$ вогнута на множестве $\left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2_+ | b > 0\right\}$.*

2) Если функция l дифференцируема, то функция $bu(h, \frac{a}{b})$ строго вогнута на множестве $\left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2_+ | b > 0\right\}$.

3) Для любого $\lambda \geqslant 0$ функция $bu(h, \lambda\frac{a}{b})$ вогнута на множестве $\left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2_+ | b > 0\right\}$.

Доказательство. 1) Докажем нестрогую вогнутость без предположения дифференцируемости функции $l(\cdot)$. Введём следующее обозначение:

$$f(\lambda) = u(h, \lambda).$$

Для фиксированного $h \geqslant 0$ имеем:

$$f(\lambda) = \inf_{0 \leqslant v \leqslant h}\{l(h-v) + \lambda v\} = \inf_{0 \leqslant t \leqslant h}\{l(t) + \lambda(h-t)\} = \lambda h + \inf_{0 \leqslant t \leqslant h}\{-\lambda t + l(t)\} =$$

$$= \lambda h - \sup_{0 \leqslant t \leqslant h}\{\lambda t - l(t)\} = \lambda h - l^*_h(\lambda),$$

гдн l_h — это функция l, определенная на $[0, h]$.

Таким образом, функция $f(\lambda)$ является вогнутой функцией. Докажем, что если $f(\lambda)$ является вогнутой функцией, то $g(a,b) = b \cdot f\left(\frac{a}{b}\right)$ также будет вогнутой функцией. Действительно, зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$. Тогда

$$g(\varepsilon a_1 + (1-\varepsilon)a_2, \varepsilon b_1 + (1-\varepsilon)b_2) = (\varepsilon b_1 + (1-\varepsilon)b_2) \cdot f\left(\frac{\varepsilon a_1 + (1-\varepsilon)a_2}{\varepsilon b_1 + (1-\varepsilon)b_2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant (\varepsilon b_1 + (1-\varepsilon)b_2) \cdot \left[\frac{\varepsilon b_1}{\varepsilon b_1 + (1-\varepsilon)b_2} f\left(\frac{a_1}{b_1}\right) + \frac{(1-\varepsilon)b_2}{\varepsilon b_1 + (1-\varepsilon)b_2} f\left(\frac{a_2}{b_2}\right)\right] = \varepsilon g(a_1,b_1) + (1-\varepsilon) g(a_2,b_2),$$

где неравенство следует из вогнутости функции $f(\cdot)$.

2) Если функция $l(\cdot)$ дифференцируема, то функция $f(\lambda)$ является строго вогнутой, а, значит, функция $g(a,b) = b \cdot f\left(\frac{a}{b}\right)$ также является строго вогнутой.

3) Этот пункт является следствием пункта 1).

$\square$

Лемма 2. *Исходная задача* $\boldsymbol{SH}(c)$ *имеет решение.*

Доказательство. Заметим, что справедливо следующее равенство

$$L((H-V)^+) = \rho(-l((H-V)^+)).$$

Так как функция $\rho(\cdot)$ обладает свойствами монотонности и выпуклости, а функция $l(\cdot)$ монотонно возрастает и выпукла, то $L((H-V)^+)$ является выпуклым функционалом по V.

Пусть теперь V_n — это последовательность из $\mathbb{B}_c$, для которой $L((H-V_n)^+) \to \mathbf{SH}(c)$. Тогда по лемме Делбаена–Шахермайера ([4, лемма 9.8.1]) мы можем выбрать функции $\widehat{V}_n \in \mathbb{B}_c$ из $\operatorname{conv}\{V_n, V_{n+1}, ...\}$ такие, что $\widehat{V}_n$ сходится $\mathbf{P}$-п.н. к некоторому $\widehat{V} \in L_0^+$. Докажем, что $\widehat{V}$ — это решение задачи $\mathbf{SH}(c)$. Действительно, так как $-l((H-\widehat{V}_n)^+) \to -l((H-\widehat{V})^+)$ п.н. и поскольку $\left|l((H-\widehat{V}_n)^+)\right| \leqslant |l(H)| \in L^p$, то $-l((H-\widehat{V}_n)^+) \to -l((H-\widehat{V})^+)$ в L^p. Тогда

$$L((H-\widehat{V}_n)^+) = \rho(-l((H-\widehat{V}_n)^+)) \longrightarrow \rho(-l((H-\widehat{V})^+)) = L((H-\widehat{V})^+).$$

Здесь мы воспользовались предложением 1. С другой стороны, так как $\widehat{V}_n \in \operatorname{conv}\{V_n, V_{n+1}, ...\}$, то $\widehat{V}_n$ имеет вид

$$\widehat{V}_n = \sum_{k=n}^{n+m} t_{k,n} V_k, \quad t_{k,n} > 0, \quad \sum_{k=n}^{n+m} t_{k,n} = 1, \quad n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}.$$

В силу определения $\mathbf{SH}(c)$ и выпуклости функционала $L((H-V)^+)$ по V получаем, что

$$\mathbf{SH}(c) \leqslant L((H-\widehat{V}_n)^+) \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} t_{k,n} L((H-V_k)^+) \to \mathbf{SH}(c).$$

Следовательно,

$$L((H-\widehat{V})^+) = \mathbf{SH}(c).$$

Осталось заметить, что

$$\mathbf{E}\left[m\widehat{V}\right] \leqslant \liminf \mathbf{E}\left[m\widehat{V}_n\right] \leqslant c \quad \forall m \in \mathcal{D}$$

по лемме Фату. Таким образом, $\widehat{V} \in \mathbb{B}_c$.

□

Заметим, что выражение для $\mathbf{SH}(c)$ не изменится, если взять инфимум по $V \in \mathbb{B}_c \cap L^\infty$. Действительно, для каждого $V \in \mathbb{B}_c$ построим величину $V_n = V \wedge n \in L^\infty$. Далее проведем рассуждение, аналогичное тому, которое использовалось при доказательстве леммы 2. Так как $-l((H-\widehat{V}_n)^+) \to -l((H-\widehat{V})^+)$ п.н. и $\left|l((H-\widehat{V}_n)^+)\right| \leqslant |l(H)| \in L^p$, то $-l((H-\widehat{V}_n)^+) \to -l((H-\widehat{V})^+)$ в L^p. Вновь используя предложение 1, получаем, что $\rho(-l\left((H-V_n)^+\right)) \to \rho(-l\left((H-V)^+\right))$. Следовательно,

$$\mathbf{SH}(c) = \inf_{V \in L^\infty \cap \mathbb{B}_c} L((H-V)^+).$$

Преобразуем вид для $\mathbf{SH}(c)$ следующим образом:

$$\mathbf{SH}(c) = \inf_{V \in L^\infty \cap \mathbb{B}_c} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbf{E}_Q \left[l\left((H-V)^+\right)\right] - \gamma(Q) \right\} =$$

$$= \inf_{V \in L^\infty \cap \mathbb{B}_c,\, g + l((H-V)^+) \leqslant 0} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbf{E}_Q(-g) - \gamma(Q) \right\} =$$

$$= \inf_{V \in L^\infty,\, g \in L^p} \left\{ \delta_{\{g + l((H-V)^+) \leqslant 0\}} + \delta_{\{V \geqslant 0\}} + \delta_{\mathbb{B}_c}(V) + \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbf{E}_Q(-g) - \gamma(Q) \right\} \right\}. \tag{8}$$

Рассмотрим следующие функционалы:

$$f_1(V,g) = \delta_{\{g + l((H-V)^+) \leqslant 0\}} + \delta_{\{V \geqslant 0\}}, \quad f_2(V,g) = \delta_{\mathbb{B}_c}(V) + \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbf{E}_Q(-g) - \gamma(Q) \right\} = \delta_{\mathbb{B}_c}(V) + \rho(g).$$

Тем самым, задача свелась к задаче поиска $\inf\limits_{V,g \in L^\infty \times L^p} \{f_1(V,g) + f_2(V,g)\}$.

Лемма 3. *Функционал $f_1(V,g)$ является выпуклым и полунепрерывным снизу.*

Доказательство. Выпуклость и полунепрерывность снизу функционала $\delta_{\{V \geqslant 0\}}$ очевидны. Докажем выпуклость и полунепрерывность снизу функционала $\delta_{\{g + l((H-V)^+) \leqslant 0\}}$. Сначала докажем полунепрерывность снизу. Для этого нужно проверить, что множество, от которого берется выпуклый индикатор, замкнуто. Пусть $V_n \to \overline{V}$ по норме в L^∞ и $g_n \to \overline{g}$ по норме в L^p. Используя связь между различными видами сходимостей и переходя к подпоследовательностям, можно показать, что $\overline{g} + l\left((H-\overline{V})^+\right) \leqslant 0$ п.н., а это и означает замкнутость.
Теперь докажем выпуклость. Для этого нужно проверить, что множество, от которого берется выпуклый индикатор, выпукло. Зафиксируем $\varepsilon \in [0,1]$. Рассмотрим $V_\varepsilon = \varepsilon V_1 + (1-\varepsilon)V_2$ и $g_\varepsilon = \varepsilon g_1 + (1-\varepsilon) g_2$. Используя принадлежность V_1, V_2 и g_1, g_2 множеству, от которого берется выпуклый индикатор в выражении для $f_1(V,g)$, а также выпуклость и возрастание функции l, получаем, что

$$g_\varepsilon + l((H-V_\varepsilon)^+) \leqslant \varepsilon(g_1 + l((H-V_1)^+)) + (1-\varepsilon)(g_2 + l((H-V_2)^+)) \leqslant 0 \quad \text{п.н.}$$

□

Продолжим доказательство теоремы. Основная идея доказательства состоит в том, что мы применяем теорему Аттуша–Брезиса ([1, теорема 1.1]) к сумме функционалов $f_1 + f_2$. Вычисляя сопряженные функционалы f_1^* и f_2^*, которые определены в сопряженных к банаховым пространствах, придем к тому, что двойственная задача

$$-\inf_{\alpha,\beta \in ba \times L^q} \{f_1^*(-\alpha,\beta) + f_2^*(\alpha,-\beta)\}$$

совпадает с задачей (7), что влечет существование решения задачи (7) и равенство $\mathbf{F}(c) = \mathbf{SH}(c)$.
Теперь проверим условия теоремы Аттуша–Брезиса. Выпуклость и полунепрерывность снизу функционала $f_1(V,g)$ доказана в лемме 3, выпуклость и полунепрерывность снизу функционала $f_2(V,g)$ очевидны. Далее, нам достаточно проверить выполнение следующего условия:

$$\bigcup_{\lambda \geqslant 0} \lambda \left(\mathrm{Dom}(f_1) - \mathrm{Dom}(f_2)\right) = L^\infty \times L^p. \tag{9}$$

Из предложения 1 мы знаем, что $\rho(g_2) < +\infty$. Поскольку

$$(V,g) \in \mathrm{Dom}(f_1) - \mathrm{Dom}(f_2) \iff \begin{cases} V_1 - V_2 = V, \\ g_1 - g_2 = g, \\ g_1 + l((H-V_1)^+) \leqslant 0, \\ V_1 \geqslant 0, \\ V_2 \in \mathbb{B}_c, \end{cases}$$

то достаточно указать соответствующие (V_1, g_1) и (V_2, g_2), если $||V||_{L^\infty} = c_1 \in [0,c]$. Действительно, положим $V_2 = c_1$, $V_1 = V + c_1$, $g_1 = -l((H-V_1)^+)$. В таком случае $V_1 \geqslant 0$, $V_2 \in \mathbb{B}_c$, а g_1 и g_2 лежат в L^p, поскольку

$$\mathbf{E}\left[|g_1|^p\right] = \mathbf{E}\left[\left|l((H-V_1)^+)\right|^p\right] \leqslant \mathbf{E}\left[|l(H)|^p\right] < \infty.$$

Итак, условие (9) теоремы Аттуша–Брезиса выполняется и имеет место равенство

$$\inf_{V,g \in L^\infty \times L^p} \left\{f_1(V,g) + f_2(V,g)\right\} = - \inf_{\alpha,\beta \in ba \times L^q} \left\{f_1^*(-\alpha,\beta) + f_2^*(\alpha,-\beta)\right\}. \tag{10}$$

Посчитаем сопряженные функционалы:

$$f_1^*(-\alpha,\beta) = \sup_{V,g \in L^\infty \times L^p} \left\{\mathbf{E}\left[-\alpha V + \beta g\right] - \delta_{\{g + l((H-V)^+) \leqslant 0\}} - \delta_{\{V \geqslant 0\}}\right\} =$$

$$= \sup_{V,g \in L^\infty \times L^p} \mathbf{E}\left[-\alpha V + \beta g - \delta_{\{g + l((H-V)^+) \leqslant 0\}} - \delta_{\{V \geqslant 0\}}\right],$$

$$f_2^*(\alpha,-\beta) = \sup_{V,g \in L^\infty \times L^p} \left\{\mathbf{E}\left[\alpha V - \beta g\right] - \delta_{\mathbb{B}_c} - \rho(g)\right\},$$

где $\alpha \in ba(\mathbf{P})$, $\beta \in L^q$.
Пусть α_r — это регулярная компонента α, α_s — сингулярная компонента α. Воспользуемся [11, теоремой 2.6], которая является обобщением [17, теоремы 1], и посчитаем сначала сопряженные функционалы для регулярных компонент α_r.
Начнем с $f_1^*(-\alpha_r, \beta)$. На данном этапе нам понадобится теорема Рокафеллара о перемене мест инфимума и интеграла ([18, теорема 3A], [19, теорема 14.60]). Сформулируем её в первоначальном виде:
Теорема (Рокафеллар).

1) Пусть X — пространство измеримых функций из T в $\mathbb{R}^n$, разложимое относительно σ–конечной меры μ, определенной на σ–алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств T. Пусть $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ — нормальный интегранд. Тогда минимизация $I_f = \int\limits_T f(t,x(t))\mu(dt)$ по X может быть сведена к поточечной минимизации в том смысле, что если $I_f \not\equiv \infty$ на X, имеем

$$\inf_{x \in X} \int\limits_T f(t,x(t))\mu(dt) = \int\limits_T \left[\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(t,x)\right] \mu(dt).$$

При этом, условие разложимости пространства X и условие $I_f \neq \infty$ на X являются излишними, если f удовлетворяет условиям, из которых следует, что X содержит каждую измеримую функцию $x(\cdot)$ такую, что $I_f(x) < +\infty$.

2) Более того, пока это значение инфимума не равно $-\infty$, для $\overline{x} \in X$ имеем

$$\overline{x} \in \arg\min_{x \in X} I_f(x) \iff \overline{x}(t) \in \arg\min f(t,x) \text{ для } \mu - \text{почти каждого } t \in T.$$

В нашей ситуации достаточно положить $T = \Omega$, $X = L^\infty \times L^p$, и учесть, что

$$f(\omega, V(\omega), g(\omega)) = -\alpha_r V + \beta g - \delta_{\{g + l((H-V)^+) \leqslant 0\}} - \delta_{\{V \geqslant 0\}}$$

— это нормальный интегранд.

Таким образом, из этой теоремы следует, что

$$\sup_{V,g \in L^\infty \times L^p} \mathbf{E}\left[-\alpha_r V + \beta g - \delta_{\{g + l((H-V)^+) \leqslant 0\}} - \delta_{\{V \geqslant 0\}}\right] =$$

$$= \mathbf{E}\left[\sup_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}} \left\{-\alpha_r x + \beta y - \delta_{\{y + l((H-x)^+) \leqslant 0\}} - \delta_{\{x \geqslant 0\}}\right\}\right]. \qquad (11)$$

Найдем

$$\widetilde{f}_1(-a,b) = \sup_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}} \left\{-ax + by - \delta_{\{y + l((H-x)^+) \leqslant 0\}} - \delta_{\{x \geqslant 0\}}\right\}.$$

Легко получить, что $\widetilde{f}_1(-a,b)$ как преобразование Фенхеля равно 0 на границе первого квадранта, т.е. на множестве $\{a=0, b=0\} \cup \{a>0, b=0\} \cup \{a=0, b>0\}$. Также ясно, что $\widetilde{f}_1(-a,b)$ равно $+\infty$ вне первого квадранта, т.е. на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{a \geqslant 0, b \geqslant 0\}$.
Более подробно рассмотрим случай, когда пара (a,b) принадлежит первому квадранту без границы, т.е. множеству $\{a>0, b>0\}$.
Ясно, что

$$\sup_{x<0, y \in \mathbb{R}} \left\{-ax + by - \delta_{\{y + l((H-x)^+) \leqslant 0\}} - \delta_{\{x \geqslant 0\}}\right\} = -\infty,$$

$$\sup_{x>H, y \in \mathbb{R}} \left\{-ax + by - \delta_{\{y + l((H-x)^+) \leqslant 0\}} - \delta_{\{x \geqslant 0\}}\right\} = -aH,$$

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant H, y \in \mathbb{R}} \left\{-ax + by - \delta_{\{y + l((H-x)^+) \leqslant 0\}} - \delta_{\{x \geqslant 0\}}\right\} = -bu\left(H, \frac{a}{b}\right),$$

где последнее равенство получается, если мы сначала зафиксируем x и возьмем супремум по y, а потом воспользуемся определением функции $u(\cdot,\cdot)$.

Поскольку $u(h,\lambda) \leqslant \lambda h$ и $b>0$, то $-bu\left(H, \frac{a}{b}\right) \geqslant -aH$, поэтому на множестве $\{a>0, b>0\}$

$$\widetilde{f}_1(-a,b) = -bu\left(H, \frac{a}{b}\right).$$

Таким образом, учитывая что $u(h,\lambda) = 0$ при $\lambda = 0$, имеем

$$\widetilde{f}_1(-a,b) = -bu\left(H, \frac{a}{b}\right)\mathbb{I}_{\{b>0\}} + \delta_{\{a \geqslant 0, b \geqslant 0\}}, \qquad (12)$$

$$f_1^*(-\alpha_r, \beta) = \mathbf{E}\left[-\beta u\left(H, \frac{\alpha_r}{\beta}\right)\mathbb{I}_{\{\beta>0\}} + \delta_{\{\alpha_r \geqslant 0, \beta \geqslant 0\}}\right].$$

Учитывая сингулярную компоненту, окончательно получаем, что

$$f_1^*(-\alpha,\beta) = \mathbf{E}\left[-\beta u\left(H, \frac{\alpha_r}{\beta}\right)\mathbb{I}_{\{\beta>0\}} + \delta_{\{\alpha_r \geqslant 0, \beta\geqslant 0\}}\right] + \sup_{V\in L_+^\infty:\, g+l((H-V)^+)\leqslant 0} \int V d(-\alpha_s).$$

Посчитаем теперь $f_2^*(\alpha_r,-\beta)$:

$$f_2^*(\alpha_r,-\beta) = \sup_{V,g\in L^\infty\times L^p}\left\{\mathbf{E}\left[\alpha_r V - \beta g\right] - \delta_{\mathbb{B}_c} - \rho^L(g)\right\} =$$

$$= \sup_{V\in\mathbb{B}_c\cap L^\infty}\mathbf{E}\left[\alpha_r V\right] + \sup_{g\in L^p}\left\{\mathbf{E}\left[-\beta g\right] - \rho(g)\right\} = c\sup_{V\in\mathbb{B}_1\cap L^\infty}\mathbf{E}\left[\alpha_r V\right] + \sup_{g\in L^p}\left\{\mathbf{E}\left[-\beta g\right] - \rho(g)\right\}.$$

Поскольку $f_1^*(-\alpha,\beta) = +\infty$, если $\mathbf{P}(\alpha_r < 0) > 0$ или $\mathbf{P}(\beta < 0) > 0$, в дальнейшем будем считать без ограничения общности, что $\alpha_r \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$ п.н.

Первое слагаемое в сумме оставим без изменений, для подсчета второго слагаемого воспользуемся утверждением 1. Таким образом,

$$f_2^*(\alpha_r,-\beta) = c\sup_{V\in\mathbb{B}_1\cap L^\infty}\mathbf{E}\left[\alpha_r V\right] + \gamma^{\min}(\beta.\mathbf{P}) + \delta_{\{\mathbf{E}[\beta]=1\}}.$$

Учитывая сингулярную компоненту, окончательно получаем, что

$$f_2^*(\alpha,-\beta) = c\sup_{V\in\mathbb{B}_1\cap L^\infty}\mathbf{E}\left[\alpha_r V\right] + \gamma^{\min}(\beta.\mathbf{P}) + \delta_{\{\mathbf{E}[\beta]=1\}} + \sup_{V\in\mathbb{B}_c\cap L^\infty}\int V d\alpha_s.$$

Таким образом, из формулы (10) и [11, теоремы 2.6] получается следующее представление для $\mathbf{SH}(c)$:

$$\mathbf{SH}(c) = -\inf_{\alpha,\beta\in ba\times L^q}\left\{\mathbf{E}\left[-\beta u\left(H,\frac{\alpha_r}{\beta}\right)\mathbb{I}_{\{\beta>0\}} + \delta_{\{\alpha_r\geqslant 0,\beta\geqslant 0\}}\right] + \right.$$

$$+c\sup_{V\in\mathbb{B}_1\cap L^\infty}\mathbf{E}\left[\alpha_r V\right] + \gamma^{\min}(\beta.\mathbf{P}) + \delta_{\{\mathbf{E}[\beta]=1\}} +$$

$$\left. + \sup_{V\in L_+^\infty:\, g+l((H-V)^+)\leqslant 0}\int V d(-\alpha_s) + \sup_{V\in\mathbb{B}_c\cap L^\infty}\int V d\alpha_s\right\}.$$

Теперь заметим, что оба супремума

$$\sup_{V\in L_+^\infty:\, g+l((H-V)^+)\leqslant 0}\int V d(-\alpha_s) \text{ и } \sup_{V\in\mathbb{B}_c\cap L^\infty}\int V d\alpha_s$$

не могут быть отрицательными, поскольку мы всегда можем положить $V = 0$. Значит, оба супремума неотрицательны.

С другой стороны, двойственная задача имеет решение, значит для тех α, при которых достигается инфимум, мы можем положить $\alpha_s = 0$. Таким образом,

$$\mathbf{SH}(c) = -\inf_{\alpha,\beta\in L^1\times L^q}\left\{\mathbf{E}\left[-\beta u\left(H,\frac{\alpha}{\beta}\right)\mathbb{I}_{\{\beta>0\}} + \delta_{\{\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0\}}\right] + \right.$$

$$\left. +c\sup_{V\in\mathbb{B}_1\cap L^\infty}\mathbf{E}\left[\alpha V\right] + \gamma^{\min}(\beta.\mathbf{P}) + \delta_{\{\mathbf{E}[\beta]=1\}}\right\} =$$

$$= -\inf_{\alpha,\beta\in L_+^1\times L_+^q}\left\{\mathbf{E}\left[-\beta u\left(H,\frac{\alpha}{\beta}\right)\mathbb{I}_{\{\beta>0\}}\right] + c\sup_{V\in\mathbb{B}_1\cap L^\infty}\mathbf{E}\left[\alpha V\right] + \gamma^{\min}(\beta.\mathbf{P}) + \delta_{\{\mathbf{E}[\beta]=1\}}\right\} = \mathbf{F}(c).$$

Равенство $\mathbf{SH}(c) = \mathbf{F}(c)$ доказано. Теперь всё готово для того, чтобы доказать равенство $\mathbf{SH(c)} = \sup\limits_{\lambda>0} \{\mathbf{DH}(\lambda) - \lambda c\}$.

Отметим, что в статье [20] двойственная задача $\mathbf{DH}(\lambda)$ рассматривается для $\lambda > 0$, но можно определить её и для $\lambda = 0$, поскольку в этой ситуации $\mathbf{DH}(\lambda)$ принимает тривиальный вид:

$$\mathbf{DH}(0) := \sup_{Q \in \mathcal{Q}^{\min}} \left\{ -\gamma^{\min}(Q) \right\}.$$

В [20, предложение 3.3] и [20, лемма 4.1] доказано, что для любого $\lambda > 0$ задача $\mathbf{DH}(\lambda)$ имеет решение $(m^*, Q^*) \in \mathcal{D} \times \mathcal{Q}^{\min}$, а также что $\mathbf{DH}(\lambda) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ является вогнутой функцией по λ. Эти доказательства можно модифицировать для случая $\lambda = 0$. Действительно, существование решения следует из того, что можно взять в доказательстве [20, предложение 3.3] в качестве оптимального решения пару $(m^*, Q^*) \in \mathcal{D} \times \mathcal{Q}^{\min}$, где $m^* = 0$ п.н., а вогнутость следует из того, что в доказательстве [20, лемма 4.1] можно положить $\lambda = 0$ и учесть, что в этом тривиальном случае функция $bu(h, \lambda \frac{a}{b})$ является вогнутой на множестве $\left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2_+ | b > 0\right\}$ (см. также пункт 3 леммы 1). Следовательно, $\mathbf{DH}(\lambda) - \lambda c$ является вогнутой функцией при $\lambda \in [0, +\infty)$ и

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} \{\mathbf{DH}(\lambda) - \lambda c\} = \sup_{\lambda > 0} \{\mathbf{DH}(\lambda) - \lambda c\}.$$

Таким образом, докажем что $\mathbf{SH}(c) = \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \{\mathbf{DH}(\lambda) - \lambda c\}$. Неравенство

$$\mathbf{SH}(c) \geqslant \sup_{\lambda \geqslant 0} \{\mathbf{DH}(\lambda) - \lambda c\} \tag{13}$$

доказывается аналогично доказательству [20, формулы (5.3)]. Из неравенства (13) получаем, что

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} \sup_{m \in \mathcal{D}} \sup_{Q \in \mathcal{Q}^{\min}} \left\{ \mathbf{E}_Q \left[u\left(H, \lambda \frac{m}{\frac{dQ}{d\mathbf{P}}}\right)\right] - \gamma^{\min}(Q) - \lambda c \right\} \leqslant \mathbf{SH}(c) =$$

$$= \mathbf{F}(c) = \sup_{\alpha, \beta \in L^1_+ \times L^q_+} \left\{ \mathbf{E}\left[\beta u\left(H, \frac{\alpha}{\beta}\right) \mathbb{I}_{\{\beta > 0\}}\right] - c \sup_{V \in \mathbb{B}_1 \cap L^\infty} \mathbf{E}\left[\alpha V\right] - \gamma^{\min}(\beta.\mathbf{P}) - \delta_{\{\mathbf{E}[\beta]=1\}} \right\}, \tag{14}$$

Из выражения в формуле (14) следует, что

$$\mathbf{F}(c) \leqslant \sup_{\lambda \geqslant 0} \sup_{m \in D} \sup_{\beta \in L^q_+} \left\{ \mathbf{E}\left[\beta u\left(H, \lambda \frac{m}{\beta}\right) \mathbb{I}_{\{\beta > 0\}}\right] - \gamma^{\min}(\beta.\mathbf{P}) - \delta_{\{\mathbf{E}[\beta]=1\}} - \lambda c \right\}. \tag{15}$$

Действительно, правая часть (14) увеличится, если вместо α мы введем две переменные

$$\lambda = \sup_{V \in \mathbb{B}_1 \cap L^\infty} \mathbf{E}\left[\alpha V\right], \quad m = \begin{cases} \frac{\alpha}{\lambda}, & \text{если } \mathbf{P}(\alpha = 0) < 1, \\ 0, & \text{если } \alpha = 0 \text{ п.н.}, \end{cases}$$

и заметим, что $\frac{\alpha}{\sup\limits_{V \in \mathbb{B}_1 \cap L^\infty} \mathbf{E}[\alpha V]} \in \mathcal{D}$. Остаётся заметить, что левая часть неравенства (14) совпадает с правой частью неравенства (15). Поэтому

$$\mathbf{SH}(c) = \mathbf{F}(c) = \sup_{\lambda \geqslant 0} \{\mathbf{DH}(\lambda) - \lambda c\}.$$

Займемся теперь вопросом нахождения явного вида оптимального решения $\widehat{V}$ исходной задачи (2). Подчеркнем, что мы используем то обстоятельство, что решение как исходной, так и двойственной задачи существует. Пусть $(\widehat{V}, \widehat{g})$ — решение исходной задачи (8), $(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta})$

— решение двойственной задачи (7). Поскольку прямая и двойственная задачи имеют решение и справедливо равенство $\mathbf{SH}(c) = \mathbf{F}(c)$, то для двух данных пар решений справедливы следующие два равенства, получающиеся из неравенств Юнга:

$$\begin{cases} f_1(\widehat{V}, \widehat{g}) + f_1^*(-\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}) = \mathbf{E}\left[-\widehat{\alpha}\widehat{V} + \widehat{\beta}\widehat{g}\right], \\ f_2(\widehat{V}, \widehat{g}) + f_2^*(\widehat{\alpha}, -\widehat{\beta}) = \mathbf{E}\left[\widehat{\alpha}\widehat{V} - \widehat{\beta}\widehat{g}\right]. \end{cases} \tag{16}$$

Подробно распишем первое равенство из этой системы:

$$\mathbf{E}\left[\delta_{\left\{\widehat{g}+l((H-\widehat{V})^+)\leqslant 0\right\}}\right] + \mathbf{E}\left[\delta_{\left\{\widehat{V}\geqslant 0\right\}}\right] + \mathbf{E}\left[-\widehat{\beta}u\left(H, \frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\beta}}\right)\mathbb{I}_{\left\{\widehat{\beta}>0\right\}} + \delta_{\left\{\widehat{\alpha}\geqslant 0, \widehat{\beta}\geqslant 0\right\}}\right] = \mathbf{E}\left[-\widehat{\alpha}\widehat{V} + \widehat{\beta}\widehat{g}\right].$$

Из этого равенства следует, что в случае конечности выпуклых индикаторов, мы имеем равенство:

$$\mathbf{E}\left[-\widehat{\beta}u\left(H, \frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\beta}}\right)\mathbb{I}_{\left\{\widehat{\beta}>0\right\}}\right] = \mathbf{E}\left[-\widehat{\alpha}\widehat{V} + \widehat{\beta}\widehat{g}\right]. \tag{17}$$

В то же самое время, из (12) следует, что будет выполняться следующее неравенство Юнга:

$$\delta_{\left\{\widehat{g}+l((H-\widehat{V})^+)\leqslant 0\right\}} + \delta_{\left\{\widehat{V}\geqslant 0\right\}} - \widehat{\beta}u\left(H, \frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\beta}}\right)\mathbb{I}_{\left\{\widehat{\beta}>0\right\}} + \delta_{\left\{\widehat{\alpha}\geqslant 0, \widehat{\beta}\geqslant 0\right\}} \geqslant -\widehat{\alpha}\widehat{V} + \widehat{\beta}\widehat{g}.$$

В случае конечности выпуклых индикаторов это неравенство принимает вид:

$$-\widehat{\beta}u\left(H, \frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\beta}}\right)\mathbb{I}_{\left\{\widehat{\beta}>0\right\}} \geqslant -\widehat{\alpha}\widehat{V} + \widehat{\beta}\widehat{g} \text{ п.н..} \tag{18}$$

С учетом равенства (17) и неравенства (18) получаем, что

$$-\widehat{\beta}u\left(H, \frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\beta}}\right)\mathbb{I}_{\left\{\widehat{\beta}>0\right\}} = -\widehat{\alpha}\widehat{V} + \widehat{\beta}\widehat{g} \text{ п.н.} \iff$$

$$\iff \sup_{x,y\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\left\{-\widehat{\alpha}x + \widehat{\beta}y - \delta_{\{y+l((H-x)^+)\leqslant 0\}} - \delta_{\{x\geqslant 0\}}\right\} = -\widehat{\alpha}\widehat{V} + \widehat{\beta}\widehat{g} \text{ п.н.}$$

Из последнего равенства можно получить, что $\widehat{g} = -l((H-\widehat{V})^+)$ п.н., а $\widehat{V}$ удовлетворяет равенству

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left\{-\widehat{\alpha}x - \widehat{\beta}l((H-x)^+)\right\} = -\widehat{\alpha}\widehat{V} - \widehat{\beta}l((H-\widehat{V})^+) \text{ п.н.} \tag{19}$$

Справедливо и обратное рассуждение. А именно, если $(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta})$ — решение двойственной задачи (7) и $\widetilde{g} = -l((H-\widetilde{V})^+)$, а $\widetilde{V}$ удовлетворяет равенству (19), то пара $(\widetilde{V}, \widetilde{g})$ является решением задачи (8). Действительно, в таком случае $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widetilde{V}$ и $\widetilde{g}$ удовлетворяют первому равенству системы (16) и, следовательно, с учётом неравенств Юнга, удовлетворяют второму равенству системы (16).

Если дополнительно известно, что функция l дифференцируема, то из уравнения (19) для $\widehat{V}$ можно найти явный вид:

$$\widehat{V} = \left(H - (l^*)'\left(\frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\beta}}\right)\right)^+ \mathbb{I}_{\left\{\widehat{\beta}>0\right\}} \text{ п.н.}$$

Для того, чтобы провести обратное рассуждение в этом случае, воспользуемся леммой 1. Из пункта 2 леммы 1 следует, что функционал, который фигурирует в представлении двойственной задачи $\mathbf{F}(c)$ из формулы (14), является строго вогнутым, поэтому двойственная задача

$\mathbf{F}(c)$ имеет единственное решение. Следовательно, и прямая задача (8) также имеет единственное решение. Таким образом, если $(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta})$ — решение двойственной задачи (7), то

$$\widetilde{V} = \left(H - (l^*)' \left(\frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\beta}}\right)\right)^+ \mathbb{I}_{\{\widehat{\beta}>0\}} \text{ п.н. и } \widetilde{g} = -l((H - \widehat{V})^+) \text{ п.н.}$$

будут являться решением задачи (8), поскольку $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widetilde{V}$ и $\widetilde{g}$ удовлетворяют системе (16).

□

4. Заключение

Таким образом, методами выпуклого анализа нам удалось получить результаты статьи [20], но при более слабых условиях, накладываемых на функцию $l(\cdot)$. При доказательстве существенным оказался тот факт, что и прямая, и двойственная задачи имеют решения. Более того, был получен другой вид двойственной задачи, отличающийся от рассматриваемого в статье [20], а также была получена характеризация решения прямой задачи через решение двойственной задачи. Автор благодарит доктора физико-математических наук, профессора А. А. Гущина за внимание к работе и за обсуждение результатов данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Attouch H., Brézis H. Duality for the sum of convex functions in general banach spaces // Aspects of mathematics and its applications. 1986. Vol. 34. P. 125-133.

2. Brannath W., Schachermayer W. A Bipolar Theorem for Subsets of $L_0^+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ // Séminaire de Probabilités XXXIII. Lecture Notes in Mathematics. 1999. Vol 1709. P. 349-354.

3. Cheridito P., Li T. Risk measures on Orlicz hearts // Mathematical Finance. 2009. Vol. 19, №2. P. 189-214.

4. Delbaen F., Schachermayer W. The Mathematics of Arbitrage. Springer, Berlin, Heidelberg. 2006. P. 371.

5. Föllmer H., Leukert P. Efficient hedging: Cost versus shortfall risk // Finance & Stochastics, 2000. Vol. 4, №2, P. 117-146.

6. Gushchin A. A. A characterization of maximin tests for two composite hypotheses // Mathematical Methods of Statistics, 2015, Vol. 24, №2. P. 110-121.

7. Gushchin A. A., Mordecki E. Bounds on option prices for semimartingale market models // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2002. Vol. 237. P. 73-113.

8. Gushchin A. A., Leshchenko S. S. Testing hypotheses for measures with different masses: Four optimization problems // Theory Probab. Math. Stat. 2020. Vol. 101. P. 109–117.

9. Hernández-Hernández D., Treviño-Aguilar E. Efficient hedging of European options with robust convex loss functionals: A dual-representation formula // Mathematical Finance. 2011. Vol. 21, №1. P. 99-115.

10. Kirch M. Efficient Hedging in Incomplete Markets under Model Uncertainty. PhD thesis, Humboldt Universitat zu Berlin. 2002. P. 144.

11. Kozek A. Convex Integral Functionals on Orlicz Spaces // Annales Societatis Mathematicae Polonae. Series I: Commentationes Mathematicae. 1979. Vol. 21. P. 109-135.

12. Nakano Y. Minimizing coherent risk measures of shortfall in discrete-time models under cone constraints // Applied Mathematical Finance. 2003. Vol. 10, №2. P. 163-181.

13. Nakano Y. Efficient hedging with coherent risk measure // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2004. Vol.293, №1. P. 345-354.

14. Nakano Y. Partial hedging for defaultable claims // Advances in Mathematical Economics. 2011. Vol. 14. P. 127-145.

15. Rudloff B. Convex hedging in incomplete markets // Applied Mathematical Finance. 2007. Vol.14, №5. P. 437-452.

16. Rudloff B. Coherent hedging in incomplete markets // Quantitative Finance. 2009. Vol. 9, №2. P. 197-206.

17. Rockafellar R. T. Integrals which are convex functionals, II // Pacific J. Math. 1971. Vol. 39. P. 439-469.

18. Rockafellar R. T. Integral functionals, normal integrands and measurable selections // Springer, Berlin, Heidelberg, In Nonlinear Operators and the Calculus of Variations. Lecture Notes in Mathematics. 1976. Vol 543. P. 157-207.

19. Rockafellar R. T., Wets R. Variational analysis. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1998. P. 736

20. Treviño-Aguilar E. Duality in a problem of static partial hedging under convex constraints // SIAM Journal on Financial Mathematics. 2015. Vol. 6. P. 1152-1170.

21. Xu M. Minimizing shortfall risk using duality approach — an application to partial hedging in incomplete markets. PhD thesis, Carnegie Mellon University. 2004. P. 93.

22. Xu M. Risk Measure Pricing and Hedging in Incomplete Markets // Ann. Finance. 2006. Vol. 2, №1. P. 51-71.

REFERENCES

1. Attouch H., Brézis H. 1986, “Duality for the sum of convex functions in general banach spaces“, *Aspects of mathematics and its applications*, vol. 34, pp. 125-133.

2. Brannath W., Schachermayer W. 1999, “A Bipolar Theorem for Subsets of $L_0^+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$“, *Séminaire de Probabilités XXXIII. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1709, pp. 349-354.

3. Cheridito P., Li T. 2009, “Risk measures on Orlicz hearts“, *Mathematical Finance*, vol. 19, no. 2, pp. 189-214.

4. Delbaen F., Schachermayer W. 2006, “The Mathematics of Arbitrage“, *Springer, Berlin, Heidelberg*, pp. 371.

5. Föllmer H., Leukert P. 2000, “Efficient hedging: Cost versus shortfall risk“, *Finance & Stochastics*, vol. 4, no. 2, pp. 117-146.

6. Gushchin A. A. 2015, “A characterization of maximin tests for two composite hypotheses“, *Mathematical Methods of Statistics*, vol. 24, no. 2, pp. 110-121.

7. Gushchin A. A., Mordecki E. 2002, “Bounds on option prices for semimartingale market models“, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 237, pp. 73-113.

8. Gushchin A. A., Leshchenko S. S. 2020, “Testing hypotheses for measures with different masses: Four optimization problems“, *Theory Probab. Math. Stat.*, vol. 101, pp. 109–117.

9. Hernández-Hernández D., Treviño-Aguilar E. 2011, “Efficient hedging of European options with robust convex loss functionals: A dual-representation formula“, *Mathematical Finance*, vol. 21, no. 1, pp. 99-115.

10. Kirch M. 2002, “Efficient Hedging in Incomplete Markets under Model Uncertainty“, *PhD thesis, Humboldt Universitat zu Berlin*, pp. 144.

11. Kozek A. 1979, “Convex Integral Functionals on Orlicz Spaces“, *Annales Societatis Mathematicae Polonae. Series I: Commentationes Mathematicae*, vol. 21, pp. 109-135.

12. Nakano Y. 2003, “Minimizing coherent risk measures of shortfall in discrete-time models under cone constraints“, *Applied Mathematical Finance*, vol. 10, no. 2, pp. 163-181.

13. Nakano Y. 2004, “Efficient hedging with coherent risk measure“, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 293, no. 1, pp. 345-354.

14. Nakano Y. 2011, “Partial hedging for defaultable claims“, *Advances in Mathematical Economics*, vol. 14, pp. 127-145.

15. Rudloff B. 2007, “Convex hedging in incomplete markets“, *Applied Mathematical Finance*, vol. 14, no. 5, pp. 437-452.

16. Rudloff B. 2009, “Coherent hedging in incomplete markets“, *Quantitative Finance*, vol. 9, no. 2, pp. 197-206.

17. Rockafellar R. T. 1971, “Integrals which are convex functionals, II“, *Pacific J. Math*, vol. 39, pp. 439-469.

18. Rockafellar R. T. 1976, “Integral functionals, normal integrands and measurable selections“, *Springer, Berlin, Heidelberg, In Nonlinear Operators and the Calculus of Variations. Lecture Notes in Mathematics*, vol 543, pp. 157-207.

19. Rockafellar R. T., Wets R. 1998, “Variational analysis“, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, pp. 736.

20. Treviño-Aguilar E. 2015, “Duality in a problem of static partial hedging under convex constraints“, *SIAM Journal on Financial Mathematics*, vol. 6, pp. 1152-1170.

21. Xu M. 2004, “Minimizing shortfall risk using duality approach — an application to partial hedging in incomplete markets“, *PhD thesis, Carnegie Mellon University*, pp. 93.

22. Xu M. 2006, “Risk Measure Pricing and Hedging in Incomplete Markets“, *Ann. Finance*, vol. 2, no. 1, pp. 51-71.

Получено: 31.10.2022
Принято в печать: 12.09.2023