ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 3.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-5-25

Обобщенное преобразование Ганкеля на прямой[1]

В. И. Иванов

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет; Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

С 2012 года в гармоническом анализе на прямой со степенным весом интенсивно изучается двупараметрическое (k, a)-обобщенное преобразование Фурье, предложенное S. Ben Saïd, T. Kobayashi, B. Orsted и обобщающее преобразование Данкля ($a = 2$), зависящее только от одного параметра $k \geqslant 0$. Вместе с увеличением разнообразия унитарных преобразований наличие параметра $a > 0$ при $a \neq 2$ приводит к появлению деформационных свойств, например, для функций из пространства Шварца обобщенное преобразование Фурье может не быть бесконечно дифференцируемым или быстро убывающим на бесконечности. Быстрое убывание сохраняется только для последовательности $a = 2/n$, $n \in \mathbb{N}$. Некоторая замена переменной в этом случае улучшает и другие свойства обобщенного преобразования Фурье. Обобщенное преобразование Данкля, получающееся после замены переменной при $a = 2/(2r + 1)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, лишено деформационных свойств и, в значительной степени, уже изучено. В настоящей работе изучается обобщенное преобразование Ганкеля, получающееся после замены переменной при $a = 1/r$, $r \in \mathbb{N}$. Для него описано инвариантное подпространство из быстро убывающих на бесконечности функций, найден дифференциально-разностный оператор, для которого ядро обобщенного преобразования Ганкеля является собственной функцией. На основе новой теоремы умножения для функций Бесселя Boubatra — Negzaoui — Sifi построены два оператора обобщенного сдвига, исследована их L^p-ограниченность и положительность. Для теоремы умножения дано простое доказательство. Определены две свертки, для которых доказаны теоремы Юнга. С помощью сверток определены обобщенные средние, для которых предложены достаточные условия L^p-сходимости и сходимости почти всюду. Исследованы обобщенные аналоги средних Гаусса — Вейерштрасса, Пуассона и Бохнера–Рисса.

Ключевые слова: (k, a)-обобщенное преобразование Фурье, обобщенное преобразование Данкля, обобщенное преобразование Ганкеля, оператор обобщенного сдвига, свертка, обобщенные средние.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
В. И. Иванов. Обобщенное преобразование Ганкеля на прямой // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 3, с. 5–25.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение №073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г. тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 3.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-5-25

Generalized Hankel transform on the line

V. I. Ivanov

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University; Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

Since 2012, in harmonic analysis on the line with a power-law weight, the two-parameter (k,a)-generalized Fourier transform proposed by S. Ben Saïd, T. Kobayashi, B. Orsted has been intensively studied. It generalizes the Dunkl transform depending on only one parameter $k \geqslant 0$. Together with an increase in the variety of unitary transforms, the presence of a parameter $a > 0$ for $a \neq 2$ leads to the appearance of deformation properties, for example, for functions from the Schwartz space, the generalized Fourier transform may not be infinitely differentiable or rapidly decreasing at infinity. The fast decay is preserved only for the sequence $a = 2/n$, $n \in \mathbb{N}$. Some change of variable in this case also improves other properties of the generalized Fourier transform. The generalized Dunkl transform obtained after changing the variable at $a = 2/(2r+1)$, $r \in \mathbb{Z}_+$ is devoid of deformation properties and, to a large extent, has already been studied. In this paper, we study the generalized Hankel transform obtained after a change of variable for $a = 1/r$, $r \in \mathbb{N}$. An invariant subspace of functions rapidly decreasing at infinity is described for it, and a differential-difference operator is found for which the kernel of the generalized Hankel transform is an eigenfunction. On the basis of a new multiplication theorem for the Bessel functions Boubatra–Negzaoui–Sifi, two generalized translation operators are constructed, and their L^p-boundedness and positivity are investigated. A simple proof is given for the multiplication theorem. Two convolutions are defined for which Young's theorems are proved. With the help of convolutions, generalized means are defined, for which sufficient conditions for L^p-convergence and convergence almost everywhere are proposed. Generalized analogs of the Gauss-Weierstrass, Poisson and Bochner–Riesz means are investigated.

Keywords: (k,a)-generalized Fourier transform, generalized Dunkl transform, generalized Hankel transform, generalized translation operator, convolution, generalized means.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
V. I. Ivanov, 2023, “Generalized Hankel transform on the line” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 5–25.

1. Введение

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ и быстро убывающих на бесконечности функций, $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\alpha \geqslant -1/2$, $j_\alpha(x) = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha}J_\alpha(x)$ — нормированная функция Бесселя,

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1), \quad n \geqslant 1,$$

— символ Похгаммера.

Пусть $a>0$, $k\geqslant 0$, $2k+a-1>0$, $\lambda=(2k-1)/a$, $v_{k,a}(x)=|x|^{2k+a-2}$ – степенной вес, $d\mu_{k,a}(x)=c_{k,a}v_{k,a}(x)dx$ – нормированная мера на прямой, $c_{k,a}^{-1}=2a^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)$.

В 2012 г. С. Бен Саид, Т. Кобаяши и Б. Орстед [1] определили двупараметрическое (k,a)-обобщенное унитарное преобразование Фурье, которое в одномерном случае имеет вид

$$\mathcal{F}_{k,a}(f)(y)=\int_{\mathbb{R}}f(x)b_{k,a}(xy)\,d\mu_{k,a}(x), \tag{1}$$

где ядро

$$b_{k,a}(xy)=j_{\lambda}\Big(\frac{2}{a}\,|xy|^{a/2}\Big)+\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+2/a)}\,\frac{xy}{(ai)^{2/a}}\,j_{\lambda+\frac{2}{a}}\Big(\frac{2}{a}\,|xy|^{a/2}\Big). \tag{2}$$

Оно стало обобщением классического преобразования Фурье на случай степенного веса на прямой ($a=2,k=0$), а также обобщением преобразования Данкля ($a=2$) [2]. Но в отличие от преобразований Фурье и Данкля, для которых пространство Шварца является инвариантным, обобщенное преобразование Фурье при $a\neq 2$ обладает деформационными свойствами и пространство Шварца для него не является инвариантным [3]. В частности, $\mathcal{F}_{k,a}(f)$ быстро убывает на бесконечности для любой $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, если только $a=\frac{2}{n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Понятно, что деформационные свойства во многом связаны с аргументом $|xy|^{a/2}$ в ядре (2). Если в (1) и (2) сделать замены

$$(2/a)^{1/2}|x|^{a/2}\mathrm{sign}x\to x,\quad (2/a)^{1/2}|y|^{a/2}\mathrm{sign}y\to y, \tag{3}$$

то мера $d\mu_{k,a}(x)$ перейдет в меру $d\nu_{\lambda}(x)=c_{\lambda}|x|^{2\lambda}\,dx$, $c_{\lambda}^{-1}=2^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1)$, ядро (2) перейдет в ядро

$$e_{k,a}(xy)=j_{\lambda}(xy)+\frac{e^{-i\pi/a}\Gamma(\lambda+1)}{2^{2/a}\Gamma(\lambda+1+2/a)}|xy|^{2/a}\mathrm{sign}(xy)\,j_{\lambda+\frac{2}{a}}(xy),$$

а унитарное преобразование (1) — в унитарное преобразование

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{k,a}(f)(y)=\int_{\mathbb{R}}f(x)e_{k,a}(xy)\,d\nu_{\lambda}(x).$$

Если $a=\frac{2}{2r+1}$, $r\in\mathbb{Z}_{+}$, то функция $e_{k,a}(x)$ будет целой функцией экспоненциального типа 1 и преобразование $\widetilde{\mathcal{F}}_{k,a}$ становится недеформированным. Оно носит название обобщенного преобразования Данкля, так как при $r=0$ получается обычное преобразование Данкля. Свойства обобщенного преобразования Данкля изучены в [3, 4].

В настоящей работе мы остановимся на свойствах преобразования $\widetilde{\mathcal{F}}_{k,a}$ при $a=\frac{1}{r}$, $r\in\mathbb{N}$. Мы назовем его обобщенным преобразованием Ганкеля. Оно имеет вид

$$\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(y)=\int_{\mathbb{R}}f(x)e_{r,\lambda}(xy)\,d\nu_{\lambda}(x), \tag{4}$$

где $\lambda>-1/2$,

$$e_{r,\lambda}(x)=j_{\lambda}(x)+\frac{(-1)^r}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}}x^{2r}\mathrm{sign}x\,j_{\lambda+2r}(x). \tag{5}$$

Хотя функция (5) имеет конечную гладкость в нуле, мы увидим, что преобразование (4) является достаточно содержательным.

Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$, $L^p(\mathbb{R},d\nu_{\lambda})$ — лебегово пространство измеримых комплекснозначных функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p,d\nu_{\lambda}}=\Big(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p\,d\nu_{\lambda}(x)\Big)^{1/p},\ 1\leqslant p<\infty,\quad \|f\|_{\infty}=\mathrm{vrai}\sup_{\mathbb{R}}|f(x)|,\ p=\infty,$$

$C_b(\mathbb{R})$ — множество непрерывных ограниченных функций, $C_0(\mathbb{R})$ — множество непрерывных бесконечно малых на бесконечности функций, $C_K(\mathbb{R})$ — множество непрерывных функций с компактным носителем. Как обычно, показатель p и сопряженный показатель p' связаны соотношением $1/p + 1/p' = 1$.

Мы будем писать $A \lesssim B$, если выполнено неравенство $A \leqslant cB$ с константой $c > 0$, зависящей только от несущественных параметров. Для функции $f(x)$, заданной на прямой, $f_e(x)$, $f_o(x)$ — ее четная и нечетная части.

В секции 2 для преобразования (4) устанавливается инвариантное подпространство из быстро убывающих на бесконечности функций и находится дифференциально-разностный оператор, для которого ядро $e_{r,\lambda}(xy)$ является собственной функцией по каждой переменной. В секции 3 строятся два оператора обобщенного сдвига. Построения существенно опираются на новую теорему умножения для нормированных функций Бесселя, установленную в 2022 году M.A. Boubatra, S. Negzaoui и M. Sifi [6]. В приложении для нее дается простое доказательство. В секции 4 определяются две свертки и для них приводятся неравенства Юнга. В секциях 5, 6 для обобщенных средних, определяемых с помощью сверток, исследуется сходимость в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ и почти всюду.

2. Некоторые свойства преобразования $\mathcal{F}_{r,\lambda}$

Пусть $\{P_n^{(\alpha)}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — многочлены Гегенбауэра, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-t^2)^{\alpha}$, $\alpha > -1$, и нормированные условием $P_n^{(\alpha)}(1) = 1$,

$$d_{n,\alpha} = \max_{[-1,1]} |P_n^{(\alpha)}(t)|. \tag{6}$$

При $\alpha \geqslant -1/2$, $d_{n,\alpha} = 1$ (см. [3]). С многочленами Гегенбауэра $C_n^{\lambda}(t)$, ортогональными с весом $(1-t^2)^{\lambda-1/2}$ (см. [7, Chap. X, 10.9]), многочлены $P_n^{(\alpha)}(t)$ связаны соотношением

$$\frac{1}{\lambda}\, C_n^{\lambda}(t) = \frac{2\Gamma(2\lambda+n)}{n!\,\Gamma(2\lambda+1)}\, P_n^{(\lambda-1/2)}(t), \quad \lambda > -1/2. \tag{7}$$

Пусть $\lambda > -1/2$, $dm_\lambda(t) = c_\lambda(1-t^2)^{\lambda-1/2}\,dt$ — вероятностная мера на отрезке $[-1, 1]$,

$$c_\lambda^{-1} = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\lambda-1/2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(\lambda+1)}. \tag{8}$$

Приведем некоторые свойства преобразования $\mathcal{F}_{r,\lambda}$, вытекающие из [1, 3, 4].

Обозначим $\|e_{r,\lambda}(xy)\|_\infty = M_{r,\lambda}$. При $\lambda > -1/2$ для $\mathcal{F}_{r,\lambda}$ справедливо представление

$$e_{r,\lambda}(xy) = \int_{-1}^{1} (1 + \mathrm{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda-1/2)}(t))\, e^{-ixyt}\, dm_\lambda(t). \tag{9}$$

Из (6)–(9) вытекают оценки

$$M_{r,\lambda} \leqslant 1 + d_{2r,\lambda-1/2},\ -\frac{1}{2} < \lambda < 0; \quad M_{r,\lambda} = 1,\ \lambda \geqslant 0.$$

Преобразование $\mathcal{F}_{r,\lambda}$ — унитарный оператор, $\mathcal{F}_{r,\lambda}(e^{-|\cdot|^2/2})(y) = e^{-|y|^2/2}$, и для $f \in L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ справедливо обобщенное равенство Планшереля

$$(\mathcal{F}_{r,\lambda}(f), \mathcal{F}_{r,\lambda}(g)) = (f, g),$$

где
$$(f,g)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,d\nu_\lambda(x).$$

Обратный оператор имеет вид
$$(\mathcal{F}_{r,\lambda})^{-1}(g)(x)=\int_{\mathbb{R}} g(y)e_{r,\lambda}(xy)\,d\nu_\lambda(y).$$

Равенство
$$f(x)=\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(y)e_{r,\lambda}(xy)\,d\nu_\lambda(y)$$
справедливо не только в $L^2(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$, но и поточечно, если f принадлежит классу
$$\mathcal{A}=\{f\in C_b(\mathbb{R})\colon f,\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)\in L^1(\mathbb{R},d\nu_\lambda)\}.$$

Неравенство Хаусдорфа–Юнга имеет вид
$$\|\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)\|_{p',d\nu_\lambda}\leqslant M_{r,\lambda}^{\frac{2}{p}-1}\|f\|_{p,d\nu_\lambda},\quad 1\leqslant p\leqslant 2.$$

Укажем дифференциально-разностный оператор, для которого ядро $e_{r,\lambda}(xy)$ является собственной функцией. Пусть
$$\Delta_\lambda f(x)=f''(x)+\frac{2\lambda+1}{x}f'(x)-\Big(\lambda+\frac{1}{2}\Big)\frac{f(x)-f(-x)}{x^2}$$
— лапласиан Данкля [2],
$$\begin{aligned}\Delta_{r,\lambda}f(x)&=\Delta_\lambda f(x)-(2r-1)\Big(\lambda+r+\frac{1}{2}\Big)\frac{f(x)-f(-x)}{x^2}\\&=f''(x)+\frac{2\lambda+1}{x}f'(x)-2r(r+\lambda)\frac{f(x)-f(-x)}{x^2}.\end{aligned}\tag{10}$$

Замечание. *Оператор $\Delta_{r,\lambda}$ получен из оператора $\delta_{k,a}f(x)=|x|^{2-a}\Delta_k f(x)$ при $a=\frac{1}{r}$, $k=\lambda+1/2$.*

Задача. Если $D_\lambda f(x)=f'(x)+(\lambda+1/2)(f(x)-f(-x))/x$, то $D_\lambda^2 f=\Delta_\lambda f$. Для какого оператора $D_{r,\lambda}f$, $D_{r,\lambda}^2 f=\Delta_{r,\lambda}f$? Существование оператора $D_{r,\lambda}f$ основано на том, что для операторов $A=\Delta_\lambda,\Delta_{r,\lambda}$ и подходящих функций квадратичная форма $(Af,f)\leqslant 0$.

Предложение 1. *Справедливы равенства*
$$(\Delta_{r,\lambda})_x e_{r,\lambda}(xy)=-y^2e_{r,\lambda}(xy),\quad \Delta_{r,\lambda}(x^{2r}\mathrm{sign}x)=0.\tag{11}$$

Доказательство. Ядро $e_{r,\lambda}(xy)$ запишем в виде
$$e_{r,\lambda}(xy)=f_1(x)+\frac{(-1)^r}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}}y^{2r}\mathrm{sign}y f_2(x),$$
где
$$f_1(x)=j_\lambda(xy),\quad f_2(x)=x^{2r}\mathrm{sign}x j_{\lambda+2r}(xy).$$
Нужно показать, что
$$\Delta_{r,\lambda}f_1(x)=-y^2f_1(x),\quad \Delta_{r,\lambda}f_2(x)=-y^2f_2(x).\tag{12}$$

Так как ядро $j_\lambda(xy)$ является собственной функцией оператора Бесселя
$$B_\lambda f(x)=f''(x)+\frac{2\lambda+1}{x}f'(x)$$

(см., например, [8]), то равенство $\Delta_{r,\lambda}f_1(x)=-y^2f_1(x)$ выполнено.

Воспользовавшись формулами

$$j_\lambda'(x)=-\frac{x}{2(\lambda+1)}j_{\lambda+1}(x),$$

$$\frac{x^2}{4(\lambda+1)(\lambda+2)}j_{\lambda+2}(x)=j_{\lambda+1}(x)-j_\lambda(x)$$

[3, 8], получим

$$f_2'(x)=2r|x|^{2r-1}j_{\lambda+2r}(xy)-\frac{1}{2(\lambda+2r+1)}|x|^{2r+1}y^2j_{\lambda+2r+1}(xy),$$

$$f_2''(x)=2r(2r-1)x^{2r-2}\mathrm{sign}x j_{\lambda+r}(xy)-\frac{(4r+1)}{2(\lambda+2r+1)}y^2x^{2r}\mathrm{sign}x j_{\lambda+2r+1}(xy)$$

$$+\frac{(xy)^2}{4(\lambda+2r+1)(\lambda+2r+2)}y^2x^{2r}\mathrm{sign}x j_{\lambda+2r+2}(xy)=2r(2r-1)x^{2r-2}\,\mathrm{sign}x j_{\lambda+r}(xy)$$

$$-\frac{(4r+1)}{2(\lambda+2r+1)}y^2x^{2r}\mathrm{sign}x j_{\lambda+2r+1}(xy)+y^2x^{2r}\mathrm{sign}x(j_{\lambda+2r+1}(xy)-j_{\lambda+2r}(xy))$$

$$=2r(2r-1)x^{2r-2}\,\mathrm{sign}x j_{\lambda+r}(xy)+\frac{(2\lambda+1)}{2(\lambda+2r+1)}y^2x^{2r}\mathrm{sign}x j_{\lambda+2r+1}(xy)$$

$$-y^2x^{2r}\mathrm{sign}x j_{\lambda+2r}(xy),\quad \frac{f_2(x)-f_2(-x)}{x^2}=2x^{2r-2}\,\mathrm{sign}x j_{\lambda+2r}(xy).$$

Отсюда и из (10) вытекает (12) для f_2. Первое равенство в (7) получено. Второе равенство в (11) получается из (12) для f_2 при $y=0$. Предложение 1 доказано.

Пусть для $r\in\mathbb{N}$

$$\mathcal{S}_r(\mathbb{R})=\{f(x)=F_1(x)+x^{2r}\mathrm{sign}x F_2(x)\colon\ F_1,F_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}),\ F_1,F_2-\text{четные}\}. \tag{13}$$

Отметим, что $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})\subset\mathcal{A}$ и $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ плотно в пространствах $L^p(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$, $1\leqslant p<\infty$.

Теорема 1. *Если $f\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, то $\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)$, $\Delta_{r,\lambda}f\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Если $f\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, то согласно (4), (5), (13)

$$\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(y)=\int_{\mathbb{R}}F_1(x)j_\lambda(xy)\,d\nu_\lambda(x)+\frac{(-1)^ry^{2r}\mathrm{sign}y}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}}\int_{\mathbb{R}}x^{4r}F_2(x)j_{\lambda+2r}(xy)\,d\nu_\lambda(x).$$

Так как

$$\int_{\mathbb{R}}F_1(x)j_\lambda(xy)\,d\nu_\lambda(x),\ \int_{\mathbb{R}}x^{4r}F_2(x)j_{\lambda+2r}(xy)\,d\nu_\lambda(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$$

(см. [2]), то $\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$.

Далее, применяя (11), (13), получим

$$\Delta_{\lambda,r}f(x)=F_1''(x)+(2\lambda+1)\frac{F_1'(x)}{x}+x^{2r}\mathrm{sign}x\Big(F_2''(x)+(4r+2\lambda+1)\frac{F_2'(x)}{x}\Big)$$

$$+F_2(x)\Delta_{\lambda,r}(x^{2r}\mathrm{sign}x)=G_1(x)+x^{2r}\mathrm{sign}x\,G_2(x),$$

где

$$G_1(x)=F_1''(x)+(2\lambda+1)\frac{F_1'(x)}{x}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}),\quad G_2(x)=F_2''(x)+(4r+2\lambda+1)\frac{F_2'(x)}{x}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$$

и $G_1(x)$, $G_2(x)$ — четные функции. Следовательно, $\Delta_{\lambda,r}f\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$. Теорема 1 доказана.

Предложение 2. *Если* $f\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ *и* $n\in\mathbb{N}$, *то*

$$\int_{\mathbb{R}}\Delta^n_{\lambda,r}f(x)e_{r,\lambda}(xy)\,d\nu_\lambda(x)=(-1)^ny^{2n}\int_{\mathbb{R}}f(x)e_{r,\lambda}(xy)\,d\nu_\lambda(x).$$

Доказательство. Для $n=1$ предложение 2 доказывается как равенство (6.7) в [3], опираясь на теорему 5.6 из [1]. Для $n>1$ предложение 2 вытекает из теоремы 1.

3. Операторы обобщенного сдвига

При построении операторов обобщенного сдвига будем следовать работам [4, 5]. Для $x,y\in\mathbb{R}$ рассмотрим два оператора обобщенного сдвига

$$\tau^yf(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e_{r,\lambda}(yz)e_{r,\lambda}(xz)\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)\,d\nu_\lambda(z)\tag{14}$$

и

$$T^yf(x)=\frac{\tau^yf(x)+\tau^{-y}f(x)}{2}=\int_{-\infty}^{\infty}j_\lambda(yz)e_{r,\lambda}(xz)\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)\,d\nu_\lambda(z).\tag{15}$$

В пространстве $L^2(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$ для них справедливы оценки

$$\|\tau^yf\|_{2,d\nu_\lambda}\leqslant M_{r,\lambda}\|f\|_{2,d\nu_\lambda},\quad \|T^yf\|_{2,d\nu_\lambda}\leqslant\|f\|_{2,d\nu_\lambda},\quad y\in\mathbb{R},\quad \lambda>-\frac{1}{2}.$$

Получим для операторов (14), (15) интегральные представления. Напомним теорему сложения Гегенбауэра для нормированной функции Бесселя [9, Chap. XI, 11.4]:

$$j_\lambda(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+\lambda}{\lambda}\frac{x^k}{2^k(\lambda+1)_k}j_{\lambda+k}(x)\frac{y^k}{2^k(\lambda+1)_k}j_{\lambda+k}(y)C_k^\lambda(t),$$

где $\lambda>-1/2$, $A=\sqrt{x^2+y^2-2xyt}$, $x,y\in\mathbb{R}_+$, $|t|\leqslant 1$.

Используя ортогональность многочленов Гегенбауэра, из теоремы сложения легко получаются следующие теоремы умножения Гегенбауэра [9, Chap. XI, 11.41]:

$$j_\lambda(xz)j_\lambda(yz)=\int_{-1}^{1}j_\lambda(Az)\,dm_\lambda(t),\tag{16}$$

$$\frac{(xz)^{2r}j_{\lambda+2r}(xz)}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}}\frac{(yz)^{2r}j_{\lambda+2r}(yz)}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}}=\int_{-1}^{1}j_\lambda(Az)P_{2r}^{(\lambda-1/2)}(t)\,dm_\lambda(t).\tag{17}$$

Использование многочлена $P_{2r}^{(\lambda-1/2)}(t)$ в (17) дает более компактную форму записи.

Новая теорема умножения [6], записанная нами с использованием многочленов Гегенбауэра $P_n^{(\lambda-1/2)}(x)$, имеет вид:

$$(xz)^{2r}j_{\lambda+2r}(xz)j_\lambda(yz)=\int_{-1}^{1}j_{\lambda+2r}(Az)(Az)^{2r}P_{2r}^{(\lambda-1/2)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)\,dm_\lambda(t).\tag{18}$$

Левые части (16)–(18) являются четными по x, y. Правые части также четным образом зависят от x, y. В этом можно убедиться, делая в интегралах замены переменных $t\to-t$; $x\to-x$, $t\to-t$; $y\to-y$, $t\to-t$. Следовательно, равенства (16)–(18) справедливы при $x,y\in\mathbb{R}$.

Ввиду важности теоремы умножения (18) в приложении для нее приводится более простое чем в [6] доказательство.

Если $f_e(x)$, $f_o(x)$ — четная и нечетная составляющие функции $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, то применяя (5), (16)–(18) и используя для краткости обозначение $\lambda_0=\lambda-1/2$, получим

$$e_{r,\lambda}(yz)e_{r,\lambda}(xz)=j_\lambda(xz)j_\lambda(yz)$$
$$+\frac{(-1)^r}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}}\Big\{(xz)^{2r}\mathrm{sign}(xz)j_{\lambda+2r}(xz)j_\lambda(yz)+(yz)^{2r}\mathrm{sign}(yz)j_{\lambda+2r}(yz)j_\lambda(xz)\Big\}$$
$$+\frac{(xz)^{2r}\mathrm{sign}x j_{\lambda+2r}(xz)}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}}\frac{(yz)^{2r}\mathrm{sign}y j_{\lambda+2r}(yz)}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}}$$
$$=\int_{-1}^1\Big\{(e_{r,\lambda}(Az))_e(1+\mathrm{sign}(xy)P_{2r}^{(\lambda_0)}(t))$$
$$+(e_{r,\lambda}(Az))_o\Big(\mathrm{sign}xP_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)+\mathrm{sign}yP_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{y-xt}{A}\Big)\Big)\Big\}\,dm_\lambda(t)$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\Big\{e_{r,\lambda}(Az)\Big(1+\mathrm{sign}(xy)P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)$$
$$+\mathrm{sign}xP_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)+\mathrm{sign}yP_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{y-xt}{A}\Big)\Big)+e_{r,\lambda}(-Az)\Big(1+\mathrm{sign}(xy)P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)$$
$$-\mathrm{sign}xP_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)-\mathrm{sign}yP_{2r_0}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{y-xt}{A}\Big)\Big)\Big\}\,dm_\lambda(t). \tag{19}$$

Аналогично,

$$j_\lambda(yz)e_{r,\lambda}(xz)=j_\lambda(xz)j_\lambda(yz)+\frac{(-1)^r(xz)^{2r}\mathrm{sign}(xz)}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}}j_{\lambda+2r}(xz)j_\lambda(yz)$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\Big\{e_{r,\lambda}(Az)+e_{r,\lambda}(-Az)\,\mathrm{sign}xP_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)\Big\}\,dm_\lambda(t).$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\Big\{e_{r,\lambda}(Az)\Big(1+\mathrm{sign}xP_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)\Big)$$
$$+e_{r,\lambda}(-Az)\Big(1-\mathrm{sign}xP_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)\Big)\Big\}\,dm_\lambda(t). \tag{20}$$

Отметим, что при $|t|\leqslant 1$

$$1-\frac{(x-yt)^2}{A^2}=\frac{(1-t^2)y^2}{A^2}\geqslant 0,\quad \frac{|x-yt|}{A}\leqslant 1. \tag{21}$$

Пусть $x,y\in\mathbb{R}$. Опираясь на (19) и (20), определим два линейных оператора

$$\tau_1^yf(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\Big\{f(A)\Big(1+\mathrm{sign}(xy)P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)$$
$$+\mathrm{sign}xP_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)+\mathrm{sign}yP_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{y-xt}{A}\Big)\Big)$$
$$+f(-A)\Big(1+\mathrm{sign}(xy)P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)-\mathrm{sign}xP_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)-\mathrm{sign}yP_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{y-xt}{A}\Big)\Big)\Big\}\,dm_\lambda(t) \tag{22}$$

и

$$T_1^yf(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\Big\{f(A)\Big(1+\mathrm{sign}xP_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)\Big)$$

$$+f(-A)\Big(1-\mathrm{sign}xP_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)\Big)\Big\}\,dm_\lambda(t). \tag{23}$$

На подпространстве четных функций

$$\tau_1^yf(x)=\int_{-1}^1 f(A)\big(1+\mathrm{sign}(xy)P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)\big)\,dm_\lambda(t). \tag{24}$$

Оператор (22) навеян соответствующим оператором в работах [10, 11]. Из (23) и (24) вытекает, что оператор τ_1^y на четных функциях и оператор T_1^y при $\lambda\geqslant 0$ положительные и $T_!^{-y}=T_1^y$ при $\lambda>-1/2$.

Для оценки L^p-норм операторов (22)–(24) определим некоторые вспомогательные операторы.

Пусть функция $g\colon[-1,1]\to[-1,1]$ – четная и измеримая по Борелю, функция $\psi(x,y)\colon$ $\colon\mathbb{R}^2\to[-1,1]$ – нечетная по x, функция $\varphi(t,x,y)\colon[-1,1]\times\mathbb{R}^2\to[-1,1]$ и $g(\varphi(-t,-x,y))=$ $=g(\varphi(-t,x,-y))=g(\varphi(t,x,y))$, функции ψ,φ — измеримые по Лебегу, и линейные операторы T_g^y, $\widetilde{T}_g^y$, определены равенствами

$$T_g^yf(x)=\frac12\int_{-1}^1\big\{f(A)\big(1+\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big)$$
$$+f(-A)\big(1-\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big\}\,dm_\lambda(t), \tag{25}$$
$$\widetilde{T}_g^yf(x)=\int_{-1}^1 f(A)\big(1+\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big)\,dm_\lambda(t). \tag{26}$$

Лемма 1. *Для всех $n\in\mathbb{N}$ и $y\in\mathbb{R}$ операторы $T_g^yf(x)$, $\widetilde{T}_g^yf(x)$ положительные. Если $f\in L^p(\mathbb{R},d\mu_{k,a})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, то*

$$\|T_g^yf\|_{p,d\mu_{k,a}}\leqslant\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \tag{27}$$

если дополнительно $\int_{-1}^1 g(\varphi(t,x,y))\,dm_\lambda(t)=0$ для всех x,y, то

$$\|\widetilde{T}_g^yf\|_{p,d\mu_{k,a}}\leqslant\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}. \tag{28}$$

Если функция $\psi(x,y)$ четная по y, то и операторы T_g^y, $\widetilde{T}_g^y$ четные по y.

Доказательство. Если $f(x)\geqslant 0$, то $T_g^yf(x)\geqslant 0$, $\widetilde{T}_g^yf(x)\geqslant 0$.

Если $p=\infty$, то согласно (25)

$$\|T_g^yf\|_\infty\leqslant\frac12\sup_x\int_{-1}^1\big\{\big(1+\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big)$$
$$+\big(1-\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big)\big\}\,dm_\lambda(t)\|f\|_\infty=\|f\|_\infty.$$

Аналогичное неравенство справедливо и для оператора $\widetilde{T}_g^yf$ при дополнительном условии, что среднее значение функции $g(\varphi(t,x,y))$ по t равно нулю.

Если $p=1$, то делая замены $x\to -x$, $t\to -t$, и учитывая свойства функций A, g, ψ, φ, получим

$$\begin{aligned}2\int_{-\infty}^\infty|T_g^yf(x)|\,d\nu_\lambda(x)&\leqslant\int_0^\infty\int_{-1}^1\Big\{|f(A)|\big(1+\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big)\\&\quad+|f(-A)|\big(1-\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big)\Big\}\,dm_\lambda(t)d\nu_\lambda(x)\\&\quad+\int_0^\infty\int_{-1}^1\big\{|f(A)|\big(1-\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big)\\&\quad+|f(-A)|\big(1+\psi(x,y)g(\varphi(t,x,y))\big)\big\}\,dm_\lambda(t)d\nu_\lambda(x)\\&=2\int_0^\infty\int_{-1}^1\{|f(A)|+|f(-A)|\}\,dm_\lambda(t)d\nu_\lambda(x).\end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^\infty \int_{-1}^1 |f(A)|\,dm_\lambda(t)d\nu_\lambda(x) \leqslant \int_0^\infty |f(x)|\,d\nu_\lambda(x)$$

(см., например, [12]), то

$$\|T_g^y f\|_{1,d\mu_{k,a}} \leqslant \int_0^\infty |f(x)|\,d\mu_{k,a}(x) + \int_0^\infty |f(-x)|\,d\mu_{k,a}(x) = \|f\|_{1,d\mu_{k,a}}.$$

Аналогичное неравенство справедливо и для оператора $\widetilde{T}_g^y f$.

По интерполяционной теореме Рисса–Торина неравенства (27), (28) выполнены для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Если $\psi(x,y)$ — четная относительно y, то при замене $y \to -y$, $t \to -t$, интегралы (25), (26) не изменятся, поэтому $T_g^{-y} = T_g^y$, $\widetilde{T}_g^{-y} = \widetilde{T}_g^y$. Лемма 1 доказана.

Пусть

$$M_{\lambda,r}^\tau = \begin{cases} 1 + 3d_{2r,\lambda_0}, & -1/2 < \lambda < 0, \\ 4, & \lambda \geqslant 0, \end{cases}$$

$$M_{\lambda,r}^T = \begin{cases} 1 + d_{2r,\lambda_0}, & -1/2 < \lambda < 0, \\ 1, & \lambda \geqslant 0. \end{cases}$$

Для линейных операторов (22), (23) справедливы оценки

$$|\tau_1^y f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\big(1 + 3d_{2r,\lambda_0}\big) \int_{-1}^1 \{|f(A)| + |f(-A)|\}\,dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0,$$

$$|\tau_1^y f(x)| \leqslant 2 \int_{-1}^1 \{|f(A)| + |f(-A)|\}\,dm_\lambda(t), \quad \lambda \geqslant 0,$$

$$|T_1^y f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\big(1 + d_{2r,\lambda_0}\big) \int_{-1}^1 \{|f(A)| + |f(-A)|\}\,dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0,$$

$$|T_1^y f(x)| \leqslant \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Big\{|f(A)|\Big(1 + \operatorname{sign} x\, P_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x - yt}{A}\Big)\Big)$$

$$+|f(-A)|\Big(1 - \operatorname{sign} x\, P_{2r}^{(\lambda_0)}\Big(\frac{x - yt}{A}\Big)\Big)\Big\}\,dm_\lambda(t), \quad \lambda \geqslant 0.$$

На подпространстве четных функций

$$|\tau_1^y f(x)| \leqslant \big(1 + d_{2r,\lambda_0}\big) \int_{-1}^1 |f(A)|\,dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0.$$

$$|\tau_1^y f(x)| \leqslant \int_{-1}^1 |f(A)|\big(1 + \operatorname{sign}(xy)\, P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)\big)\,dm_\lambda(t), \quad \lambda \geqslant 0.$$

Применяя лемму 1 для $g(t) = 0$, $P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)$, $\psi(x,y) = \operatorname{sign} x$, $\operatorname{sign}(xy)$, $\varphi(t,x,y) = t$, $(x - yt)/A$, и учитывая (21), приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $y \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$, $\lambda > -1/2$, линейные операторы* (22) *и* (23) *ограничены в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ и для их норм справедливы оценки*

$$\|\tau_1^y\|_{p\to p} \leqslant M_{\lambda,r}^\tau, \quad \|T_1^y\|_{p\to p} \leqslant M_{\lambda,r}^T. \tag{29}$$

На подпространстве четных функций

$$\|\tau_1^y\|_{p\to p} \leqslant M_{\lambda,r}^T.$$

Оценки L^p-норм оператора обобщенного сдвига для (k,a)-обобщенного преобразования Фурье, аналогичного оператору τ^y, при $\lambda\geqslant 0$ получены в [6].

Лемма 2. *Линейные операторы* (14) *и* (22), *а также* (15) *и* (23), *как операторы из* $L^2(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$ *в* $L^2(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$, *совпадают.*

Доказательство. Пусть $R>0$, $f\in L^2(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$,

$$S_R(x,f)=\int_{-R}^{R}\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)e_{r,\lambda}(xz)\,d\nu_\lambda(z)$$

— частичный интеграл для $f(x)$. Согласно (19), (22) $\tau_1^y e_{r,\lambda}(xz)=e_{r,\lambda}(xz)e_{r,\lambda}(yz)$, поэтому

$$\begin{aligned}\tau_1^y S_R(x,f)&=\int_{-R}^{R}\tau_1^y e_{r,\lambda}(xz)\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)\,d\nu_\lambda(z)\\&=\int_{-R}^{R}e_{r,\lambda}(xz)e_{r,\lambda}(yz)\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)\,d\nu_\lambda(z)=\tau^y S_R(x,f).\end{aligned}$$

Из ограниченности операторов τ_1^y, τ^y в $L^2(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$, $\tau_1^y f(x)=\tau^y f(x)$. Случай операторов (15) и (23) разбирается аналогично. Лемма 2 доказана.

Таким образом, операторы (22), (23) являются продолжениями операторов (14), (15) на пространства $L^p(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$, $p\neq 2$. В дальнейшем операторы (22), (23) будем обозначать τ^y, T^y соответственно. В силу (15) оператор T^y четный относительно y.

Теорема 3. *Для всех* $1\leqslant p\leqslant\infty$, $x\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\lambda>-1/2$, *справедливы оценки*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}}|T^y f(x)|^p\,d\nu_\lambda(y)\Big)^{1/p}\leqslant\big(1+d_{2r,\lambda_0}\big)\big\|f\big\|_{p,d\nu_\lambda},\quad -\frac{1}{2}<\lambda<0,\tag{30}$$

$$\Big(\int_{\mathbb{R}}|T^y f(x)|^p\,d\nu_\lambda(y)\Big)^{1/p}\leqslant\big\|f\big\|_{p,d\nu_\lambda},\quad \lambda\geqslant 0.\tag{31}$$

Доказательство. Для $x\in\mathbb{R}$ рассмотрим линейный оператор $B^x f(y)=T^y f(x)$. Неравенство (30) вытекает из оценки

$$|B^x f(y)|\leqslant\frac{1}{2}\big(1+d_{2r,\lambda_0}\big)\int_{-1}^{1}\{|f(A)|+|f(-A)|\}\,dm_\lambda(t),\quad -\frac{1}{2}<\lambda<0,$$

и леммы 1.

При $\lambda\geqslant 0$ применяем интерполяционную теорему Рисса–Торина. Как и в лемме 2, $\|B^x f\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$, поэтому достаточно доказать (31) для $p=1$. Так как $T^{-y}=T^y$, то

$$\|B^x f\|_{1,d\nu_\lambda}=\sup\Big\{\int_{\mathbb{R}}T^y f(x)\overline{g(y)}\,d\nu_\lambda(y)\colon \|g\|_\infty\leqslant 1,\ g\in C_K(\mathbb{R}),\ g-\text{четная}\Big\}.$$

Применяя равенство Планшереля и (14), (15), получим

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}T^y f(x)\overline{g(y)}\,d\nu_\lambda(y)&=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)\overline{e_{r,\lambda}(xz)\mathcal{F}_{r,\lambda}(g)(z)}\,d\nu_\lambda(z)\\&=\int_{\mathbb{R}}f(y)\overline{\tau^x g(y)}\,d\nu_\lambda(y),\end{aligned}$$

поэтому

$$\|B^x f\|_{1,d\nu_\lambda}\leqslant\|f\|_{1,d\nu_\lambda}\sup\big\{\|\tau^x g(y)\|_\infty\colon \|g\|_\infty\leqslant 1,\ g\in C_K(\mathbb{R}),\ g-\text{четная}\big\}.$$

Если $\|g\|_\infty \leqslant 1$, то согласно (24)

$$\|\tau^x g(t)\|_\infty \leqslant \int_{-1}^{1}(1 - P_{2r}^{(\lambda_0)}(t))\,dm_\lambda(t) = 1$$

и неравенство (31) при $p = 1$ выполнено. Теорема 3 доказана.

Соберем вместе некоторые свойства операторов обобщенного сдвига. Далее до конца статьи $\lambda > -1/2$, $r \in \mathbb{N}$.

Предложение 3. *Для операторов обобщенного сдвига τ^y, T^y справедливы следующие свойства:*

1) *если* $\lambda \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$, *то* $T^y f(x) \geqslant 0$;

2) $\tau^0 f(x) = T^0 f(x) = f(x)$;

3) $\tau^y 1 = T^y 1 = 1$;

4) $\tau^y e_{r,\lambda}(xz) = e_{r,\lambda}(yz) e_{r,\lambda}(xz)$, $T^y e_{r,\lambda}(xz) = j_\lambda(yz) e_{r,\lambda}(xz)$;

5) *если* $f, g \in L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, *то*

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^y f(x) g(x)\,d\nu_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \tau^{-y} g(x)\,d\nu_\lambda(x),$$
$$\int_{\mathbb{R}} T^y f(x) g(x)\,d\nu_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) T^y g(x)\,d\nu_\lambda(x);$$

6) *если* $f \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, *то*

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^t f(x) d\nu_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu_\lambda(x),$$
$$\int_{\mathbb{R}} T^t f(x) d\nu_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu_\lambda(x);$$

7) *если* $\delta > 0$, $\operatorname{supp} f \subset [-\delta, \delta]$, $|y| \leqslant \delta$, *то*

$\operatorname{supp} \tau^y f$, $\operatorname{supp} T^y f \subset [-|y| - \delta, |y| + \delta]$,

если $|y| > \delta$, *то*

$\operatorname{supp} \tau^y f$, $\operatorname{supp} T^y f \subset [-|y| - \delta, -|y| + \delta] \bigcup [|y| - \delta, |y| + \delta]$.

Доказательство проводится как в [4].

4. Свертки

С помощью операторов τ^y и T^y определим две свертки

$$(f *_\tau g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau^x g(y)\,d\nu_\lambda(y), \tag{32}$$

$$(f *_T g)(x) = \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) g(y)\,d\nu_\lambda(y). \tag{33}$$

В (33) предполагается, что функция $g(x)$ четная.

Приведем без доказательств некоторые свойства сверток. Доказательства проводятся как в [4]. Для сверток справедливы неравенства Юнга.

Теорема 4. *Пусть $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $1/p + 1/q \geqslant 1$ и $1/s = 1/p + 1/q - 1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $g \in L^q(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, то*

$$\|(f *_\tau g)\|_{s,d\nu_\lambda} \leqslant M_{r,\lambda}^\tau \|f\|_{p,d\nu_\lambda} \|g\|_{q,d\nu_\lambda}, \tag{34}$$

$$\|(f *_T g_e)\|_{s,d\nu_\lambda} \leqslant M^T_{r,\lambda}\|f\|_{p,d\nu_\lambda}\|g_e\|_{q,d\nu_\lambda}. \tag{35}$$

При доказательстве неравенств (34) и (35) используются оценки (29).

Предложение 4. *Если $f \in \mathcal{A}$, $g \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ и g — четная, то для всех $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$(f *_\tau g)(x) = (f *_T g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \tau^y f(x) g(y)\, d\nu_\lambda(y), \tag{36}$$

$$\mathcal{F}^\lambda_r(f *_\tau g)(y) = \mathcal{F}^\lambda_r(f *_T g)(y) = \mathcal{F}^\lambda_r(f)(y)\mathcal{F}^\lambda_r(g)(y).$$

Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p < \infty$, то $(f *_\tau g)(x) = (f *_T g)(x)$ почти всюду.

5. Обобщенные средние. L^p-сходимость

В этой секции мы следуем [4]. Пусть $\varepsilon > 0$, $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}^\lambda_r(\varphi)$, $\varphi, \widehat{\varphi} \in \mathcal{A}$, $\varphi(0) = 1$, $\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \mathcal{F}^\lambda_r(\varphi(\varepsilon(\cdot)))(y)$. Тогда

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-2(\lambda+1)}\widehat{\varphi}\big(\varepsilon^{-1}y\big), \quad \widehat{\varphi}_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \cap C_0(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\nu_\lambda(y) = 1.$$

Под $L^\infty(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ далее будем понимать $C_0(\mathbb{R})$. Для $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, с помощью свертки (32) определим (r, λ)-обобщенные средние

$$\Phi^\tau_\varepsilon f(x) = (f *_\tau \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\tau^x \widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\nu_\lambda(y). \tag{37}$$

Функцию φ назовем генератором обобщенных средних (37). Если функция $\varphi(x)$ — четная, то согласно предложению 4 почти всюду

$$\Phi^\tau_\varepsilon f(x) = \Phi^T_\varepsilon f(x) = (f *_T \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} T^y f(x)\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\nu_\lambda(y) = 2\int_0^\infty T^y f(x)\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\nu_\lambda(y).$$

При рассмотрении средних $\Phi^T_\varepsilon f(x)$ будем всегда предполагать, что генератор четный.

В силу (34), (35)

$$\|\Phi^\tau_\varepsilon f\|_{p,d\nu_\lambda} \leqslant M^\tau_{r,\lambda}\|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1,d\nu_\lambda}\|f\|_{p,d\nu_\lambda}, \tag{38}$$

$$\|\Phi^T_\varepsilon f\|_{p,d\nu_\lambda} \leqslant M^T_{r,\lambda}\|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1,d\nu_\lambda}\|f\|_{p,d\nu_\lambda}. \tag{39}$$

Исследуем L^p-сходимость обобщенных средних. Пусть

$$\omega_\tau(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda} = \sup_{|y|\leqslant\delta}\|\tau^y f - f\|_{p,d\nu_\lambda}, \quad \omega_T(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda} = \sup_{|y|\leqslant\delta}\|T^y f - f\|_{p,d\nu_\lambda}$$

– модули непрерывности функции $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Лемма 3. *Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то*

$$\omega_\tau(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda} \leqslant \big(1 + M^\tau_{r,\lambda}\big)\|f\|_{p,d\nu_\lambda}, \quad \omega_T(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda} \leqslant \big(1 + M^T_{r,\lambda}\big)\|f\|_{p,d\nu_\lambda}, \tag{40}$$

$$\lim_{\delta\to0}\omega_\tau(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda} = 0, \quad \lim_{\delta\to0}\omega_T(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda} = 0. \tag{41}$$

Доказательство. Применяя (29), получим (40). Равенство (41) докажем для модуля непрерывности $\omega_\tau(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda}$ Второе равенство будет доказываться аналогично. Так как для $f, g \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$

$$|\,\omega_\tau(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda} - \omega_\tau(\delta, g)_{p,d\nu_\lambda}| \leqslant \big(1 + M^\tau_{r,\lambda}\big)\|f - g\|_{p,d\nu_\lambda},$$

равенство (41) можно доказывать для функций из плотного множества $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$.

Пусть $f\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$. Для функции Бесселя $j_\lambda'(z)=-zj_{\lambda+1}(z)/(2(\lambda+1))$, поэтому $|j_\lambda(z)-1|\leqslant\leqslant|z|/(2(\lambda+1))$ и из (4) $|e_{r,\lambda}(y,z)-1|\lesssim|yz|$.

Так как $\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)$ быстро убывает на бесконечности, то согласно (14) и ограниченности $M_{r,\lambda}$

$$|\tau^y f(x)-f(x)|\leqslant\int_{\mathbb{R}}|e_{r,\lambda}(xz)||e_{r,\lambda}(yz)-1||\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)|\,d\nu_\lambda(z)$$

$$\lesssim\int_{\mathbb{R}}|e_{r,\lambda}(yz)-1||\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)|\,d\nu_\lambda(z)\lesssim\int_{\mathbb{R}}|yz||\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)|\,d\nu_\lambda\lesssim|y|. \tag{42}$$

Отсюда вытекает (41) при $p=\infty$.

Рассмотрим случай $p<\infty$. Так как из (5) и (13) для всех y произведение $e_{r,\lambda}(yz)f(z)\in\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, то по теореме 1 $\tau^y f(x)\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$. Получим равномерные оценки по y. Для любого натурального m, $(\Delta_{r,\lambda})_z^m(e_{r,\lambda}(yz)\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z))$ является конечной линейной комбинацией функций вида

$$|y|^{\alpha_s}j_{\lambda+s}(yz)f_s(z),\quad |y|^{\beta_s}\mathrm{sign}y j_{\lambda+s}(yz)g_s(z),\quad \alpha_s,\beta_s\geqslant0,\ f_s,g_s\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R}),$$

и согласно предложению 2 равномерно по $|y|\leqslant1$

$$|\tau^y f(x)|\lesssim|x|^{-2m},\quad |f(x)|\lesssim|x|^{-2m}.$$

Отсюда и из (42) для $R>0$ и $m\in\mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}}|\tau^y f(x)-f(x)|^p\,d\nu_\lambda(x)\lesssim|y|^p\int_{-R}^{R}d\nu_\lambda+\int_{|x|\geqslant R}|x|^{-2mp}\,d\nu_\lambda(x).$$

Следовательно, (41) выполнено. Лемма 3 доказана.

Теорема 5. *Пусть $\widehat{\varphi}=\mathcal{F}_{r,\lambda}(\varphi)$, функции $\varphi,\widehat{\varphi}\in\mathcal{A}$, $\varphi(0)=1$. Если $f\in L^p(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$ при $1\leqslant p<\infty$ или $f\in C_0(\mathbb{R})$ при $p=\infty$, то*

$$\lim_{\varepsilon\to0}\|f-\Phi_\varepsilon^\tau f\|_{p,d\nu_\lambda}=0.$$

Доказательство. Учитывая (38) и теорему Банаха–Штейнгауза, теорему 5 достаточно доказывать на плотном множестве $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$. Если $f\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, то в силу (36)

$$\Phi_\varepsilon^\tau f(x)=(f*_\tau\widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(y)\tau^x\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\,d\nu_\lambda(y)=\int_{\mathbb{R}}\tau^y f(x)\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\,d\nu_\lambda(y),$$

поэтому

$$\|f-\Phi_\varepsilon^\tau f\|_{p,d\nu_\lambda}=\Big\|\int_{\mathbb{R}}(\tau^{\varepsilon y}f(x)-f(x))\widehat{\varphi}(y)\,d\nu_\lambda(y)\Big\|_{p,d\nu_\lambda}$$

$$\leqslant\int_{\mathbb{R}}\|\tau^{\varepsilon y}f(x)-f(x)\|_{p,d\nu_\lambda}|\widehat{\varphi}(y)|\,d\nu_\lambda(y)\leqslant\int_{\mathbb{R}}\omega_\tau(\varepsilon y,f)_{p,d\nu_\lambda}|\widehat{\varphi}(y)|\,d\nu_\lambda(y).$$

Утверждение теоремы 6 вытекает из (40), (41) и оценки

$$\int_{\mathbb{R}}\omega_\tau(\varepsilon y,f)_{p,d\nu_\lambda}|\widehat{\varphi}(y)|\,d\nu_\lambda(y)$$

$$\leqslant\omega_\tau(\varepsilon R,f)_{p,d\nu_\lambda}\int_{|y|\leqslant R}|\widehat{\varphi}(y)|\,d\nu_\lambda(y)+\big(1+M_{r,\lambda}^\tau\big)\|f\|_{p,d\nu_\lambda}\int_{|y|\geqslant R}|\widehat{\varphi}(y)|\,d\nu_\lambda(y).$$

Теорема 5 доказана.

Следствие. *Если в условиях теоремы 5 функция φ — четная, то, учитывая неравенство* (39),

$$\lim_{\varepsilon\to0}\|f-\Phi_\varepsilon^T f\|_{p,d\nu_\lambda}=0.$$

Обобщенные средние $\Phi_\varepsilon^\tau f$, для которых имеет место сходимость в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, назовем регулярными.

В [13] рассмотрены следующие примеры средних для преобразования Данкля с четными генераторами: средние Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера–Рисса. Они будут примерами средних и для обобщенного преобразования Ганкеля, как и для обобщенного преобразования Данкля [4]. Для обобщенных средних Гаусса–Вейерштрасса $\varphi(x) = \widehat{\varphi}(x) = e^{-x^2/2} \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$. Для обобщенных средних Пуассона

$$\varphi(x) = e^{-|x|} \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda), \quad \widehat{\varphi}(y) = \frac{c_\lambda}{(1+y^2)^{\lambda+3/2}} \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda).$$

Таким образом, обобщенные средние Гаусса–Вейерштрасса и Пуассона являются регулярными. Для обобщенных средних Бохнера–Рисса

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1-|x|^2)^\delta, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases} \qquad \widehat{\varphi}(y) = c_{\lambda,\delta} j_{\lambda+\delta+1}(y), \quad \delta > 0.$$

Генератор $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$. Так как $|\widehat{\varphi}(y)| \lesssim (1+|y|)^{-(\lambda+\delta+3/2)}$, то $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, если только $\delta > \delta_0 = \lambda + 1/2$. Число δ_0 называют критическим показателем. Если $\delta > \delta_0$, то обобщенные средние Бохнера–Рисса являются регулярными.

6. Обобщенные средние. Сходимость почти всюду

Пусть $\varphi, \widehat{\varphi} \in \mathcal{A}$, $\varphi(0) = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p < \infty$, $\Phi_\varepsilon^\tau f(x)$ — обобщенные средние (37),

$$\Phi^\tau f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |\Phi_\varepsilon^\tau f(x)|$$

— мажоранта обобщенных средних,

$$d_f(\alpha) = \int_{\{x \in \mathbb{R} \colon |f(x)| > \alpha\}} d\nu_\lambda(x)$$

— функция распределения f, $L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ — множество измеримых функций, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{p,\infty,d\nu_\lambda} = \sup\{\alpha (d_f(\alpha))^{\frac{1}{p}} \colon \alpha > 0\}$$

(неравенство треугольника выполняется с константой, большей единицы [14, Sect. 1.4.1]).

Пространство $L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ называют слабым L^p-пространством, так как имеет место строгое вложение $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \subset L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ и $\|f\|_{p,\infty,d\nu_\lambda} \leqslant \|f\|_{p,d\nu_\lambda}$.

При исследовании сходимости почти всюду обобщенных средних $\Phi_\varepsilon^\tau f(x)$ будем опираться на следующее утверждение типа теоремы Банаха–Штейнгауза (см., например, [14, Theorem 2.1.14]).

Предложение 5. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$, множество $D \subset L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ плотно в $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$. Если для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ выполнено неравенство*

$$\|\Phi^\tau f\|_{p,\infty,d\nu_\lambda} \lesssim \|f\|_{p,d\nu_\lambda} \tag{43}$$

и для любой $f \in D$ обобщенные средние $\Phi_\varepsilon^\tau f(x)$ сходятся к $f(x)$ почти всюду, то они сходятся к $f(x)$ почти всюду для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$.

Неравенство (43) называют слабым L^p-неравенством. По теореме 6 в качестве множества D можно взять $C_0(\mathbb{R})$. В этом случае будет иметь место даже равномерная сходимость. Для доказательства неравенства (43) нам понадобится максимальная функция Харди–Литтлвуда.

Пусть $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества $E\subset\mathbb{R}$. Для функции $f\in\in L^p(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ и (r,λ)-обобщенного преобразования Ганкеля максимальную функцию $\mathcal{M}_{r,\lambda}f$ определим с помощью свертки (32)

$$\mathcal{M}_{r,\lambda}f(x)=\sup_{s>0}\frac{\left|\int_{\mathbb{R}}f(y)\tau^x\chi_{[-s,s]}(y)\,d\nu_\lambda(y)\right|}{\int_{\mathbb{R}}\chi_{[-s,s]}(y)d\nu_\lambda(y)}.$$

Применяя предложение 4 и четность оператора T^y по y, получим

$$\mathcal{M}_{r,\lambda}f(x)=\sup_{s>0}\frac{\left|\int_{\mathbb{R}}T^yf(x)\chi_{[-s,s]}(y)d\nu_\lambda(y)\right|}{\int_{\mathbb{R}}\chi_{[-s,s]}(y)d\nu_\lambda(y)}=\sup_{s>0}\frac{\left|\int_0^\infty T^yf(x)\chi_{[0,s]}(y)d\nu_\lambda(y)\right|}{\int_0^\infty\chi_{[0,s]}(y)d\nu_\lambda(y)}.$$

Лемма 4. *Если $\lambda,y\geqslant 0$, $\gamma>0$, $\varphi(x)$ — четный генератор, справедлива оценка $|\widehat{\varphi}(y)|\lesssim(1+y)^{-(2\lambda+2+\gamma)}$ и $f\in L^p(\mathbb{R}^d,d\nu_\lambda)$, $1\leqslant p<\infty$, то для почти всех $x\in\mathbb{R}$*

$$\Phi^\tau f(x)\lesssim\mathcal{M}_{r,\lambda}|f|(x).$$

Доказательство. Согласно предложениям 3, 4, T^y — положительный оператор и для почти всех x, $(f*_\tau\widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)=(f*_T\widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)$. Отсюда $|T^yf(x)|\leqslant T^y|f|(x)$ и

$$\Phi^\tau f(x)=\Phi^Tf(x)\leqslant\sup_{\varepsilon>0}(|f|*_T|\widehat{\varphi}_\varepsilon)|(x),\quad \mathcal{M}_{r,\lambda}f(x)\leqslant\mathcal{M}_{r,\lambda}|f|(x).$$

Следовательно, мы можем далее считать, что $f(x),\widehat{\varphi}(y)\geqslant 0$.

Используя разложение

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\chi_{[\varepsilon2^j,\varepsilon2^{j+1}]}(y)$$

и равенство $\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)=\varepsilon^{-2(\lambda+1)}\widehat{\varphi}(\varepsilon^{-1}y)$, получим

$$\int_0^\infty T^yf(x)\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\,d\nu_\lambda(y)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty T^yf(x)\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\chi_{[\varepsilon2^j,\varepsilon2^{j+1}]}(y)\,d\nu_\lambda(y)$$

$$\lesssim\sum_{j=-\infty}^{\infty}(1+2^j)^{-\gamma}\Big(\frac{2^j}{1+2^j}\Big)^{2(\lambda+1)}\frac{\int_0^\infty T^yf(x)\chi_{[0,\varepsilon2^{j+1}]}(y)\,d\nu_\lambda(y)}{\int_0^\infty\chi_{[0,\varepsilon2^{j+1}]}(y)\,d\nu_\lambda(y)}$$

$$\lesssim\sum_{j=0}^{\infty}\big(2^{-\gamma j}+2^{-2(\lambda+1)j}\big)\mathcal{M}_{r,\lambda}f(x)\lesssim\mathcal{M}_{r,\lambda}f(x).$$

Лемма 4 доказана.

Для максимальной функции Харди–Литтлвуда $M_{k,a}f$ обобщенного преобразования Фурье при $a=\frac{1}{r}$ справедливо слабое L^1-неравенство и сильное L^p-неравенство при $1<p<\infty$ [15]. С помощью замен переменных (3) убеждаемся, что аналогичные утверждения справедливы и для максимальной функции Харди–Литтлвуда $\mathcal{M}_{r,\lambda}f$ обобщенного преобразования Ганкеля. Следовательно, в условиях леммы 4 для мажоранты обобщенных средних $\Phi^\tau f$ справедливо неравенство (43) и мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Пусть $\lambda\geqslant 0$, $\gamma>0$, четные функции $\varphi,\widehat{\varphi}\in\mathcal{A}$, $\varphi(0)=1$, и $|\widehat{\varphi}(y)|\lesssim\lesssim(1+|y|)^{-(2\lambda+2+\gamma)}$. Если $f\in L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$, $1\leqslant p<\infty$, то почти всюду*

$$\lim_{\varepsilon\to0}\Phi_\varepsilon^\tau f(x)=f(x).$$

Учитывая оценки для обобщенных преобразований Ганкеля генераторов обобщенных средних Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона и Бохнера–Рисса при $\delta>\delta_0$, мы получаем их сходимость почти всюду для функций из $L^p(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$, $1\leqslant p<\infty$, если $\lambda=r(2k-1)\geqslant 0$ или $k\geqslant 1/2$.

7. Приложение

В этой секции дается простое доказательство теоремы умножения Boubatra–Negzaoui–Sifi [6] для нормированных функций Бесселя, используемой при получении интегрального представления операторов обобщенного сдвига для (k,a)-обобщенного преобразования Фурье, обобщенного преобразования Данкля и обобщенного преобразования Ганкеля.

Теорема 7. *Если $n\in\mathbb{N}$, $\lambda>-1/2$, $x,y\in\mathbb{R}_+$, $|t|\leqslant 1$, $A=\sqrt{x^2+y^2-2xyt}$, то*

$$x^n j_{\lambda+n}(x)j_\lambda(y)=\int_{-1}^{1} j_{\lambda+n}(A)A^n P_n^{(\lambda-1/2)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)\,dm_\lambda(t). \tag{44}$$

При $n=0$, $P_0^{(\lambda-1/2)}(t)=1$, получается известная теорема умножения Гегенбауэра [9, Chap. XI, 11.41]:

$$j_\lambda(x)j_\lambda(y)=\int_{-1}^{1} j_\lambda(A)\,dm_\lambda(t), \tag{45}$$

которая позволяет записать оператор обобщенного сдвига

$$\tau^y f(x)=\int_{-1}^{1} f(A)\,dm_\lambda(t)$$

для преобразования Ганкеля

$$\mathcal{H}_\lambda(f)(y)=2\int_0^\infty f(x)j_\lambda(xy)\,d\nu_\lambda(x).$$

При $n=1$, $P_1^{(\lambda-1/2)}(t)=t$, получается теорема умножения

$$xj_{\lambda+1}(x)j_\lambda(y)=\int_{-1}^{1} j_{\lambda+1}(A)(x-yt)\,dm_\lambda(t), \tag{46}$$

которая вместе с теоремами умножения Гегенбауэра (45) и

$$xyj_{\lambda+1}(x)j_{\lambda+1}(y)=4(\lambda+1)^2\int_{-1}^{1} j_{\lambda+1}(A)t\,dm_\lambda(t)$$

позволяет получить интегральное представление оператора обобщенного сдвига

$$\tau^y f(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big\{f(A)\Big(1+\frac{x+y}{A}\Big)+f(-A)\Big(1-\frac{x+y}{A}\Big)\Big\}(1-t)\,dm_\lambda(t)$$

для одномерного преобразования Данкля (см., например, [16]).

Формула (46) получается дифференцированием по x обеих частей равенства (45). И в общем случае искомую теорему умножения будем доказывать по индукции, дифференцируя (44) и используя следующие свойства нормированных функций Бесселя $j_\lambda(x)$

$$j_\lambda'(x)=-\frac{x}{2(\lambda+1)}j_{\lambda+1}(x), \tag{47}$$

$$\frac{x^2}{4(\lambda+1)(\lambda+2)}j_{\lambda+2}(x)=j_{\lambda+1}(x)-j_\lambda(x), \tag{48}$$

и многочленов Гегенбауэра

$$(P_n^{(\lambda-1/2)}(x))'=\frac{n(n+2\lambda)}{2\lambda+1}P_{n-1}^{(\lambda+1/2)}(x), \tag{49}$$

$$(n+2\lambda)P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(x)=2(n+\lambda)xP_n^{(\lambda-1/2)}(x)-nP_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(x), \tag{50}$$

$$(1-t^2)P_{n-1}^{(\lambda+1/2)}(x)=\frac{2\lambda+1}{2(n+\lambda)}\Big(P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(x)-P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(x)\Big). \tag{51}$$

Равенство (49) и рекуррентное соотношение (50) можно найти в [17, Chap. 4, 4.7], [18, Lecture 1, 1.5]. Соотношение (51) и даже в более общем виде для многочленов Якоби имеется в [17, Chap. 4, 4.5].

Нам понадобится еще одно свойство из [6], для которого мы также приведем более простое доказательство. Отметим, что $A'=A'_x=(x-ty)/A$.

Лемма 5. Для всех $n\in\mathbb{N}$ справедливо равенство

$$(A^nP_n^{(\lambda-1/2)}(A'))'=nA^{n-1}P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A'). \tag{52}$$

Доказательство. Так как для производных по x

$$(A')^2+AA''=(AA')'=(x-ty)'=1,$$

то согласно (49)–(51)

$$(A^nP_n^{(\lambda-1/2)}(A'))'=nA^{n-1}A'P_n^{(\lambda-1/2)}(A')+\frac{n(n+2\lambda)}{2\lambda+1}A^nA''P_{n-1}^{(\lambda+1/2)}(A')$$

$$=nA^{n-1}\Big\{A'P_n^{(\lambda-1/2)}(A')+\frac{n+2\lambda}{2\lambda+1}(1-(A')^2)P_{n-1}^{(\lambda+1/2)}(A')\Big\}$$

$$=nA^{n-1}\Big\{\frac{n+2\lambda}{2(n+\lambda)}P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A')+\frac{n}{2(n+\lambda)}P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A')$$

$$+\frac{n+2\lambda}{2(n+\lambda)}\Big(P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A')-P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A')\Big)\Big\}=nA^{n-1}P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A').$$

Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 7. Доказательство теоремы будем вести индукцией по n. При $n=0,1$ (45) верно. Пусть (44) верно для всех параметров меньше или равных n. Продифференцируем обе части равенства (45) по x.

Для производной левой части в силу (47), (48), получим

$$(x^nj_{\lambda+n}(x)j_\lambda(x))'=nx^{n-1}j_{\lambda+n}(x)j_\lambda(y)-\frac{x^{n+1}}{2(\lambda+n+1)}j_{\lambda+n+1}(x)j_\lambda(y)$$

$$=nx^{n-1}\Big(j_{\lambda+n-1}(x)-\frac{x^2j_{\lambda+n+1}(x)}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)}\Big)j_\lambda(y)-\frac{x^{n+1}j_{\lambda+n+1}(x)}{2(\lambda+n+1)}j_\lambda(y)$$

$$=nx^{n-1}j_{\lambda+n-1}(x)j_\lambda(y)-\frac{(n+2\lambda)x^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)}j_{\lambda+n+1}(x)j_\lambda(y). \tag{53}$$

Применяя для производной подинтегральной функции в правой части последовательно (48), (52), (50) и (49), получим

$$(j_{\lambda+n}(A)A^nP_n^{\lambda-1/2}(A'))'=-\frac{A^{n+1}}{2(\lambda+n+1)}j_{\lambda+n+1}(A)A'P_n^{(\lambda-1/2)}(A')$$

$$+nj_{\lambda+n}(A)A^{n-1}P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A')=-\frac{(n+2\lambda)A^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)}j_{\lambda+n+1}(A)P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A')$$

$$-\frac{nA^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)}j_{\lambda+n+1}(A)P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A')+nj_{\lambda+n}(A)A^{n-1}P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A')$$

$$= -\frac{(n+2\lambda)A^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(A) P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A')$$
$$-nA^{n-1}\big(j_{\lambda+n}(A) - j_{\lambda+n-1}(A)\big) P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') + n j_{\lambda+n}(A) A^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A')$$
$$= n j_{\lambda+n-1}(A) A^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') - \frac{(n+2\lambda)A^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(A) P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A').$$

Отсюда и из (52), (53)

$$n x^{n-1} j_{\lambda+n-1}(x) j_\lambda(y) - \frac{(n+2\lambda)x^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(x) j_\lambda(y)$$
$$= \int_{-1}^{1} \Big\{ n j_{\lambda+n-1}(A) A^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A')$$
$$- \frac{(n+2\lambda)A^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(A) P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A') \Big\}\, dm_\lambda(t).$$

В силу индуктивного предположения

$$x^{n+1} j_{\lambda+n+1}(x) j_\lambda(y) = \int_{-1}^{1} j_{\lambda+n+1}(A) A^{n+1} P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A')\, dm_\lambda(t).$$

Теорема 7 доказана.

8. Заключение

В работе изучены такие свойства обобщенного преобразования Ганкеля, как инвариантное подпространство из быстро убывающих на бесконечности функций, дифференциально-разностный оператор, для которого ядро является собственной функцией, операторы обобщенного сдвига, свертки, обобщенные средние и их сходимость в пространствах L^p и почти всюду. Все это говорит о начале построения гармонического анализа в пространствах L^p на прямой со степенным весом, зависящим от двух параметров (k, a), для которых $a = 1/r$, $r \in \mathbb{N}$, $k > 1/2 - 1/(4r)$. В дальнейшем в этих пространствах нужно будет исследовать аппроксимативные свойства обобщенных средних, модельные интегральные операторы такие, как потенциал Рисса и преобразование Рисса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ben Saïd S., Kobayashi T., Orsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.

2. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2002. Vol. 1817. P. 93–135.

3. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S. On the kernel of the (κ, a)-Generalized Fourier transform // Forum of Mathematics, Sigma. 2023. Vol. 11: e72 1–25. Published online by Cambridge University Press: 14 August 2023. Doi: https://doi.org/10.1017/fms.2023.69.

4. Иванов В. И. Недеформированное обобщенное преобразование Данкля на прямой // Матем. заметки. 2023. Т. 114, № 4. С. 509-–524.

5. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive Lp-Bounded Dunkl-Type Generalized Translation Operator and Its Applications // Constr. Approx. 2019. Vol. 49, no. 3. P. 555–605.

6. Boubatra M. A., Negzaoui S., Sifi M. A new product formula involving Bessel functions // Integral Transforms Spec. Funct. 2022. Vol. 33, no. 3. P. 247–263.

7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. М.: Наука, 1966. 297 с.

8. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S. Uncertainty principles for eventually constant sign bandlimited functions // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2020. Vol. 52, no. 5. P. 4751-4782.

9. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. 798 с.

10. Mejjaoli H. Deformed Stockwell transform and applications on the reproducing kernel theory // Int. J. Reprod. Kernels. 2022. Vol. 1, no. 1. P. 1–39.

11. Mejjaoli H., Trimèche K. Localization Operators and Scalogram Associated with the Deformed Hankel Wavelet Transform // Mediterr. J. Math. 2023. Vol. 20, no. 3. Article 186.

12. Платонов С. С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.

13. Thangavelu S., Xu Y. Convolution operator and maximal function for Dunkl transform // J. d'Analyse. Math. 2005. Vol. 97. P. 25–55.

14. Grafacos L. Classical Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics 249. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2008. 489 p.

15. Ben Saïd S., Negzaoui S. Norm inequalities for maximal operators // Journal of Inequalities and Applications. 2022. Article number: 134. https://doi.org/10.1186/s13660-022-02874-1.

16. Чертова Д. В. Теоремы Джексона в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ со степенным весом // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып. 3. С. 100–116.

17. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.

18. Горбачев Д. В, Иванов В. И. Лекции о квадратурных формулах и их применении в экстремальных задачах. Тула: Изд-во ТулГУ, 2022. 196 с.

REFERENCES

1. Saïd S., Kobayashi T., Orsted B., 2012, “Laguerre semigroup and Dunkl operators”, *Compos. Math.*, vol. 148, no. 4, pp. 1265–1336.

2. Rösler M., 2002, “Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions”, *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.

3. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S., 2023, “On the kernel of the (κ, a)-Generalized Fourier transform”, *Forum of Mathematics, Sigma*, vol. 11: e72 1–25. Published online by Cambridge University Press: 14 August 2023. Doi: https://doi.org/10.1017/fms.2023.69.

4. Ivanov V. I., 2023, “Undeformed generalized Dunkl transform on the line”, *Math. Notes.*, vol. 114, no. 4, pp. 509–524.

5. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2019, “Positive *Lp*-Bounded Dunkl-Type Generalized Translation Operator and Its Applications”, *Constr. Approx.*, vol. 49, no. 3. P. 555–605.

6. Boubatra M. A., Negzaoui S., Sifi M., 2022, “A new product formula involving Bessel functions” , *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 33, no. 3, pp. 247–263.

7. Bateman H., Erdŕelyi A., 1953, “Higher Transcendental Functions, Vol. II” , *New York: McGraw Hill Book Company*, 414 p.

8. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S., 2020, “Uncertainty principles for eventually constant sign bandlimited functions” , *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 52, no. 5, pp. 4751-4782.

9. Watson G. N., 1995, “A Treatise on the Theory of Bessel Functions” , *Cambridge: Cambridge University Press*, 804 p.

10. Mejjaoli H., 2022, “Deformed Stockwell transform and applications on the reproducing kernel theory” , *Int. J. Reprod. Kernels*, vol. 1, no. 1, pp. 1–39.

11. Mejjaoli H., Trimèche K., 2023, “Localization Operators and Scalogram Associated with the Deformed Hankel Wavelet Transform” , *Mediterr. J. Math.*, vol. 20, no. 3, Article 186.

12. Platonov S. S., 2007, “Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line” , *Izv. Math.*, vol. 71, no. 5, pp. 1001–1048.

13. Thangavelu S., Xu Y., 2005, “Convolution operator and maximal function for Dunkl transform” , *J. d’Analyse. Math.*, vol. 97, pp. 25–55.

14. Grafacos L., 2008, “Classical Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics 249” , *New York: Springer Science+Business Media, LLC*, 489 p.

15. Ben Saïd S., Negzaoui S., 2022, “Norm inequalities for maximal operators” , *Journal of Inequalities and Applications*, Article number: 134, https://doi.org/10.1186/s13660-022-02874-1.

16. Chertova D. V., 2009, “Jackson’s theorems in space with power weight” , *Bulletin of Tula State University. Natural Sciences.*, iss. 3, pp. 100–116. (In Russ.)

17. Szegö G., 1959, “Orthogonal polynomials” , *New York: Amer. Math. Soc.*, 440 p.

18. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2022, “Lectures on quadrature formulas and their application in extremal problems” , *Tula: Tula State University*, 196 p. (In Russ.)

Получено: 21.06.2023
Принято в печать: 12.09.2023