ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-276-283

О полиадических числах[1]

В. Г. Чирский

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

Кольцо полиадических чисел можно определять несколькими способами. Можно ввести метризуемую топологию на кольце целых чисел,считая множество идеалов (m) полной системой окрестностей нуля. Полной системой окрестностей в кольце целых чисел является совокупность множеств вида $a+(m)$. Операции сложения и умножения непрерывны в этой топологии и кольцо целых чисел с этой топологией является топологическим кольцом. Пополнение полученного топологического кольца целых чисел - это кольцо полиадических чисел. Равносильное определение - обратный (проективный) предел

$$\varprojlim_{m} \mathrm{Z}/m!\mathrm{Z}.$$

Напоним, что каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda=\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathrm{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Этот ряд сходится в любом поле $p-$ адических чисел Q_p . Обозначая сумму этого ряда в поле Q_p символом $\lambda^{(p)}$, мы получаем, что любое полиадическое число λ можно рассматривать, как элемент прямого произведения колец целых $p-$ адических чисел Z_p по всем простым числам p. Верным является и обратное утверждение, означающее, что кольцо целых полиадических чисел совпадает с этим прямым произведением. Однако доказательства последнего утверждения обнаружить не удалось. Цель рассматриваемой заметки - восполнить этот пробел. Кроме того, рассказано о некоторых применениях полиадических чисел.

Ключевые слова: полиадическое число,прямое произведение,

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

В. Г. Чирский. О полиадических числах // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 276–283.

[1]Работа выполнена при поддержке проекта Ведущие научные школы МГУ.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-276-283

On polyadic numbers

V. G. Chirskii

Chirskii Vladimir Grirorevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

The ring of polyadic numbers can be defined in several ways. One can introduce a metrizable topology on the ring of integers by counting the set of ideals (m) by a complete system of neighborhoods of zero. The complete system of neighborhoods in the ring of integers is a collection of sets of the form $a + (m)$. The operations of addition and multiplication are continuous in this topology and the ring of integers with this topology is a topological ring. Completion of the resulting topological ring of integers - this is the ring of polyadic numbers. An equivalent definition is the inverse (projective) limit

$$\varprojlim_{m} \mathrm{Z}/m!\mathrm{Z}.$$

Let's recall that the canonical decomposition of the polyadic number λ has the form

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathrm{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

This series converges in any field of $p-$ adic numbers Q_p .Denoting the sum of this series in the field Q_p with the symbol $\lambda^{(p)}$, we get that any polyadic number λ can be considered as an element of the direct product of rings of integer $p-$ adic numbers Z_p for all primes p. The converse statement is also true, meaning that the ring of polyadic integers coincides with this direct product. However, evidence of the latter claim could not be found. The purpose of this note is to fill this gap. In addition, some applications of polyadic numbers are described.

Keywords: polyadic number,direct product

Bibliography: 20 titles.

For citation:
V. G. Chirskii, 2023, "On polyadic numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 276–283.

1. Введение

Одно из определений кольца целых полиадических чисел строится следующим образом. На кольце целых чисел можно ввести топологию, считая множество идеалов (m) ((m) обозначает идеал, состоящий из целых чисел, делящихся на число m) полной системой окрестностей нуля. Полной системой окрестностей в кольце целых чисел является совокупность множеств вида $a+(m)$. Операции сложения и умножения непрерывны в этой топологии и кольцо целых чисел с этой топологией является топологическим кольцом. Введённую топологию можно метризовать, положив

$$\rho(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}(\theta_m(x,y))/2^m,$$

где $\theta_m(x,y)=0$,если $x-y$ делится на m и $\theta_m(x,y)=1$,если $x-y$ не делится на m. Последовательность целых чисел a_n называется фундаментальной, если для любого натурального числа M найдётся такое натуральное число N , что для всех $m,n>N$ выполняется сравнение $a_m\equiv a_n(modM!)$. Последовательность целых чисел b_n называется нулевой, если для любого натурального числа M найдётся такое натуральное число N , что для всех $m>N$ выполняется сравнение $a_m\equiv 0(modM!)$. Фундаментальные последовательности эквивалентны, если их разность является кулевой последовательностью. Полиадическим числом называется класс эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей целых чисел. Полиадические числа были введены в рассмотрение в 1925 г. Прюфером [1], также см. [2]. На множестве полиадических чисел вводятся операции сложения и умножения, придающие этому множеству структуру коммутативного кольца с единицей и с делителями нуля. Эквивалентное определение кольца полиадических чисел - обратный (проективный) предел. Напомним, что частично упорядоченное множество представляет собой пару $(I,\preceq)$, где $I-$ это множество, а $\preceq$ – рефлексивное $a\preceq a$,транзитивное (из $a\preceq b$ и $b\preceq c$ следует $a\preceq c$)и точное (из $a\preceq b$ и $b\preceq a$ следует $a=b$) бинарное отношение на множестве I. Проективной системой колец называется множество колец R_i, индексы которых принадлежат индуктивному множеству I, такое, что для каждой пары индексов $i\preceq j$ задан гомоморфизм $\psi_{ij}:R_j\mapsto R_i$, удовлетворяющий условиям:$\psi_{ii}-$ тождественное отображение и для любых индексов с условием $i\preceq j\preceq k$ имеем $\psi_{ij}\circ\psi_{jk}=\psi_{ik}$. Кольца $\mathrm{Z}/m!\mathrm{Z}$ образуют проективную систему колец относительно отображений

$$\mathrm{Z}/(m+1)!\mathrm{Z}\mapsto\mathrm{Z}/m!\mathrm{Z}.$$

Кольцо полиадических чисел представляет собой обратный предел

$$\varprojlim_{m}\mathrm{Z}/m!\mathrm{Z}.$$

Легко видеть, что множества $m!\mathrm{Z}$ образуют базу окрестностей нуля. Поэтому определение кольца полиадических чисел, приведенное в начале, совпадает с определением, использующим обратный предел. Каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda=\sum_{n=0}^{\infty}a_n n!,a_n\in\mathrm{Z},0\le a_n\le n.$$

Этот ряд сходится в любом поле $p-$ адических чисел Q_p . Обозначая сумму этого ряда в поле Q_p символом $\lambda^{(p)}$, мы получаем, что любое полиадическое число λ можно рассматривать, как элемент прямого произведения колец целых $p-$ адических чисел Z_p по всем простым числам p. Верным является и обратное утверждение, означающее, что кольцо целых полиадических чисел совпадает с этим прямым произведением. Однако доказательства последнего утверждения обнаружить не удалось. Цель рассматриваемой заметки - восполнить этот пробел.

2. Основной результат

Теорема 1. *Пусть*

$$p_1<p_2<\ldots-$$

упорядоченное множество всех простых чисел. Для любых заданных целых p_i- адических чисел $\Lambda_i,i=1,2,\ldots$ существует полиадическое число λ такое, что $\lambda^{(p_i)}=\Lambda_i,i=1,2,\ldots.$

Иными словами, кольцо полиадических чисел совпадает с прямым произведением колец целых $p-$ адических чисел Z_p по всем простым числам p.

Доказательство.Для доказательства этой теоремы предположим, что

$$\Lambda_i = \sum_{t=0}^{\infty} a_{ti} p_i^t, \Lambda_i^{(k)} = \sum_{t=0}^{k} a_{ti} p_i^t, i = 1, 2, ...$$

Рассмотрим произвольное натуральное число M и обозначим

$$p_1 < p_2 < ... < p_{k(M)}$$

все простые числа, не превосходящие числа M. Применяя китайскую теорему об остатках [3], теорема 5.2 ,мы получаем, что существуют натуральные числа

$$x_1^{(M)}, ..., x_{k(M)}^{(M)}$$

такие, что

$$x_l^{(M)} \equiv 1(mod p_l^M), x_l^{(M)} \equiv 0(mod p_r^M), r, l = 1, 2, ..., k(M), r \neq l. \quad (1)$$

При каждом значении M определим натуральное число a_M равенством

$$a_M = \Lambda_1^{(M)} x_1^{(M)} + ... + \Lambda_{k(M)}^{(M)} x_{k(M)}^{(M)}.$$

Докажем, что последовательность чисел a_M фундаментальная и что её предел - искомое полиадическое число. Для этого зафиксируем число M и рассмотрим числа $m > M, n > M$. Им соответствуют числа

$$a_m = \Lambda_1^{(m)} x_1^{(m)} + ... + \Lambda_{k(M)}^{(m)} x_{k(M)}^{(m)} + ... + \Lambda_{k(m)}^{(m)} x_{k(m)}^{(m)},$$

$$a_n = \Lambda_1^{(n)} x_1^{(n)} + ... + \Lambda_{k(M)}^{(n)} x_{k(M)}^{(n)} + ... + \Lambda_{k(n)}^{(n)} x_{k(n)}^{(n)}.$$

Разность этих чисел имеет вид

$$a_m - a_n = (\Lambda_1^{(m)} x_1^{(m)} - \Lambda_1^{(n)} x_1^{(n)}) + ... + (\Lambda_{k(M)}^{(m)} x_{k(m)}^{(m)} - \Lambda_{k(M)}^{(n)} x_{k(M)}^{(n)}) +$$

$$+ \Lambda_{k(M)+1}^{(m)} x_{k(M)+1}^{(m)} + ... + \Lambda_{k(m)}^{(m)} x_{k(m)}^{(m)} - \Lambda_{k(M)+1}^{(n)} x_{k(M)+1}^{(n)} - .... - \Lambda_{k(n)}^{(n)} x_{k(n)}^{(n)}.$$

Пусть $l \leq k(M)$. Если $r > k(M)$, то, согласно (1)

$$x_r^{(M)} \equiv 0(mod p_l^M), r = k(M) + 1, ..., \max(k(m), k(n)), r \neq l. \quad (2)$$

Если $s \leq k(M)$, но $s \neq l$, то , согласно (1),

$$\Lambda_s^{(m)} x_s^{(m)} \equiv 0(mod p_l^M), \Lambda_s^{(n)} x_s^{(n)} \equiv 0(mod p_l^M)$$

и, следовательно,

$$\Lambda_s^{(m)} x_s^{(m)} - \Lambda_s^{(n)} x_s^{(n)} \equiv 0(mod p_l^M).$$

Рассмотрим, далее, разность

$$\Lambda_l^{(m)} x_l^{(m)} - \Lambda_l^{(n)} x_l^{(n)}.$$

Согласно (1)

$$x_l^{(m)} \equiv 1(mod p_l^m) \equiv 1(mod p_l^M), x_l^{(n)} \equiv 1(mod p_l^n) \equiv 1(mod p_l^M).$$

По определению чисел $\Lambda_i^{(k)} = \sum_{t=0}^{k} a_{ti} p_i^t$,

$$\Lambda_l^{(m)} x_l^{(m)} = \sum_{t=0}^{m} a_{ti} p_i^t x_l^{(m)} \equiv \sum_{t=0}^{M} a_{ti} p_i^t (mod p_l^M),$$

$$\Lambda_l^{(n)} x_l^{(n)} = \sum_{t=0}^{n} a_{ti} p_i^t x_l^{(n)} \equiv \sum_{t=0}^{M} a_{ti} p_i^t (mod p_l^M).$$

Таким образом,

$$\Lambda_l^{(m)} x_l^{(m)} - \Lambda_l^{(n)} x_l^{(n)} \equiv 0 (mod p_l^M). \tag{3}$$

Следовательно,согласно (2),(3), для любых $m > M, n > M$ натуральное число $a_m - a_n$ делится на каждое из чисел $p_l^M, l = 1, ..., k(M)$. Поэтому $a_m - a_n$ делится на число $M!$, так как степень, в которой простое число p, меньшее M, входит в разложение числа $M!$ на простые множители, равна

$$\frac{M - S_M}{p-1},$$

где S_M обозначает сумму цифр в $p-$ ичном разложении числаM, а эта величина меньше, чем M. Таким образом, последовательность чисел a_n является фундаментальной. Пусть она задает полиадическое число λ.

Осталось доказать, что для любого простого числа p_i выполняется равенство $\lambda^{p_i} = \Lambda^i$. Это сразу следует из того, что частичная сумма a_M ряда λ в поле поле p_i- адических чисел Q_{p_i} равна $\Lambda_i^{(M)}$. Предел этих частичных сумм равен Λ_i. Теорема доказана.

3. Заключение

Теория полиадических чисел развивалась и применялась в нескольких направлениях.

Элементы классического анализа и теории аналитических функций в полиадической области, теория меры и интеграла, их приложения к задачам вероятностной теории чисел приведены в работах [3, 4].

Полиадические числа широко применяются в теории абелевых групп [5]-[10] . Достаточно заметить, что $Z-$адическое пополнение любой абелевой группы A, т.е. соответствующий обратный предел, является модулем над кольцом полиадических чисел. Также любая периодическая абелева группа является модулем над кольцом полиадических чисел. Отметим псевдорациональные числа - элементы кольца полиадических чисел, для которых существуют целые числа $a, b, b \neq 0$такие, что для всех, кроме конечного числа, простых чисел p в кольце Z_p выполняется равенство $ba^{(p)} = a$.

Доказанная в работе теорема о том, что кольцо полиадических чисел совпадает с прямым произведением колец целых $p-$ адических чисел Z_p по всем простым числам p составляет основу многих исследований по теории трансцендентных чисел в полиадической области [11]-[20]. Полиадическое число λ называется бесконечно трансцендентным, если для любого ненулевого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле Q_p выполняется неравенство $P(\lambda^p) \neq 0$. Рассмотрим интересный пример. Пусть в обозначениях теоремы $\Lambda_n = n$. Соответствующее полиадическое число λ является бесконечно трансцендентным, так как многочлен не может обратиться в ноль на бесконечном множестве точек.При этом все его координаты - целые числа! Другой важный пример бесконечно трансцендентного числа - ряд Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty} n!$. Бесконечная трансцендентность этого числа доказана в работе [12].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Prüfer H. Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie.//Math.Ann.94.-1925.-№ 3-4.-pp.-198-243.
2. Постников А. Г. введение в аналитическую теорию чисел.-М.: «Наука».-1971.-416 с.
3. Новоселов Е. В. Основы классического анализа и теории аналитических функций в полиадической области.// Известия вузов. Математика.-1963.-№ 5.-с.-71-88.
4. Новоселов Е. В. Новый метод в вероятностной теории чисел.// ИАН СССР, сер. Математика.-1964.-т.-28.-№ 2.-с.-307-364.
5. Fomin A. A. Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers.//Abelian Groups and Modules.Trends in Math. Birkhäeuser,Basel.-1999.-pp.87-100.
6. Fomin A. A. Quotient divisible mixed groups.//Abelian Groups, Rings and Modules. Amer. Math. Soc. Series Contemporary Mathematics.-2001.-v.273.-pp.117-128.
7. Крылов П. А.,Пахомова Е. Г. Абелевы группы и регулярные модули.//Матем.заметки.-2001.-т.69.-№ 3.-с.402-411.
8. Тимошенко Т. А. Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел.//Журнал СФУ, сер.Математика и физика,-2011.-т.4.-№ 4.-с.198-214.
9. Царев А. В. Модули над кольцом псевдорациональных чисел и факторно делимые группы.// Алгебра и анализ,-2006.-т.18.-№ 4.-с.541-550.
10. Царев А. В.Некоторые морфизмы модулей над кольцом псевдорациональных чисел и факторно делимые группы.// СФУ,матем. журн.-2008.-т.49.-№ 4.-с.945-953.
11. Bertrand D., Chirskii V. G.,Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series.//Annales Fac.Sci.Toulouse.-2004.-v.13.-№ 2.-pp.241-260.
12. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers. // Russ. J. Math. Phys. 2019.- v.26, № 3, pp.286-305.
13. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric $F-$ series. // Russ. J. Math. Phys. 2020.- v.27, № 2, pp.175-184.
14. Чирский В. Г.Арифметические свойства рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром.// Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2020.-т.494- с. 69-70.
15. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter. //Russ. J. Math. Phys. 2021.- v.28, № 3, pp.293-302.
16. Чирский В. Г.Новые задачи теории трансцендентных полиадических чисел.// Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2022.-т.505.- с. 63-65.
17. Чирский В. Г.Арифметические свойства значений обобщенных гипергеометрических рядов с полиадическим трансцендентными параметрами.// Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2022.-т.506- с. 95-107.
18. Юденкова Е. Ю.Бесконечная линейная и алгебраическая независимость знгачений F-рядов в полиадических лиувиллевых точках.//Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 334 – 346.

19. Матвеев В. Ю., Свойства элементов прямых произведений полей// Чебышевский сборник. -2019.-т.20.- вып. 2.-с. 383 – 390.

20. Крупицын Е. С.Арифметические свойства рядов некоторых классов.//Чебышевский сборник. -2019.-т. 20.- вып. 2.-с. 374 – 382.

REFERENCES

1. Prüfer H.1925. “Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie“,*Math.Ann*, Vol, 94,№ 3-4. pp.198-243.

2. Postnikov A.G. 1971.“Introduction to Analytic Number Theory “,*Nauka.*,416 pp.

3. Novoselov. E.V.1963.“A new method in probabilistic number theory.“,*Izvestiya vuzov, Math.*, № 5, pp.71-78.

4. Novoselov. E.V.1964.“Fundamentals of classical analysis and theory of analytic functions in polyadic domain.“*IAN SSSR, Math.*,Vol.28 № 2, pp.307-364.

5. Fomin A.A.1999. “Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers“, *Abelian Groups and Modules.Trends in Math. Birkhäeuser,Basel*, pp.87-100.

6. Fomin A.A.2001. “Quotient divisible mixed groups“, *Abelian Groups, Rings and Modules. Amer. Math. Soc. Series Contemporary Mathematics*, Vol.273. pp.117-128.

7. Krylov P.A.,Pahomova E.G. 2001. “ Abelian groups and regular modules“, *(*Math. Zametki). Vol. 69.№ 3.pp.402-411.

8. Timoshenko T.A. V. G.,2011. “Projective modules over the ring of pseudo-rational numbers“, *(*J.SFU, nath.,phys.),Vol.4. № 4,pp.541-550.

9. Tsarev A. V. 2006. “Modules over the ring of pseudo-rational numbers and factor divisible groups“, *Algebra and Analysis.*, Vol.18, № 4, pp.945-953.

10. Tsarev A. V. 2008. “ Certain morphisms of modules over the ring of pseudo-rational numbers“, *SFU.Math.J*, Vol.49, № 4, pp.198-214.

11. Bertrand D., Chirskii V.G.,Yebbou. J. 2004.“ Effective estimates for global relations on Euler-type series“*Annales Fac.Sci.Toulouse.*-v.13.-№ 2.-pp.241-260.

12. Chirskii V.G.2019. “ Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers.“, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.26, № 3, pp.286-305.

13. Chirskii V.G.2020. “ Arithmetic properties of generalized hypergeometric F- series“, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.27, № 2, pp.175-184.

14. Chirskii V.G.2020. “ Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter“, *Dokl. Math.*, Vol.102, № 2, pp.412-413.

15. Chirskii V.G.2021. “ Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter“, *Russ.J.Math.Phys.*, Vol.28, № 3, pp.293-302.

16. Chirskii V.G.2022. “ New Problems in the Theory of Transcendental Polyadic Numbers“, *Dokl. Math.*, Vol.106, № 1, pp.265-267.

17. Chirskii V.G.2022. “ Arithmetic Properties of the Values of Generalized Hypergeometric Series with Polyadic Transcendental Parameter “, *Dokl. Math.*, Vol.106, № 2, pp.386-397.

18. Yudenkova E. Yu.2021.“ Infinite linear and algebraic independence pf values of F-series at polyadic Liouvillean point .“, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, № 2, pp.334-346.

19. Matveev V. Yu. 2019. “ Properties of elements of direct products of fields“, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, № 2, pp.383-390.

20. Krupitsin E. S. 2019. “ Arithmetic properties of series of certain classes“, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, № 2, pp.374-382.

Получено: 03.03.2023
Принято в печать: 14.06.2023