

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 2.

УДК 517.946

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-266-275

Интегрирование уравнения КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций

М. М. Хасанов, И. Д. Рахимов

Хасанов Музаффар Машарипович — кандидат физико-математических наук, Ургенчский государственный университет, (г. Ургенч).

e-mail: hmuzaffar@mail.ru

Рахимов Илхом Давронбекович — аспирант, Ургенчский государственный университет (г. Ургенч).

e-mail: ilxom@urdu.uz

Аннотация

В данной работе рассматривается уравнение КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций. Показано, что уравнение КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций может быть проинтегрировано методом обратной спектральной задачи. Определена эволюция спектральных данных оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом, связанного с решением уравнения КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций. Полученные результаты позволяют применить метод обратной задачи для решения уравнения КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций.

Ключевые слова: КдФ отрицательного порядка, самосогласованный источник, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина - Трубовица.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:

М. М. Хасанов, И. Д. Рахимов. Интегрирование уравнения КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 266–275.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 2.

UDC 517.946

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-266-275

Integration of the KdV equation of negative order with a free term in the class of periodic functions

M. M. Khasanov, I. D. Rakhimov

Khasanov Muzaffar Maksharipovich — candidate of physical and mathematical sciences, Urganch State University (Urganch).

e-mail: hmuzaffar@mail.ru

Rakhimov Ilkhom Davronbekovich — postgraduate student, Urganch State University (Urganch).

e-mail: ilxom@urdu.uz

Abstract

In this paper, we consider the KdV equation of negative order with a free term in the class of periodic functions. It is shown that the KdV equation of negative order with a free term in the class of periodic functions can be integrated by the method of the inverse spectral problem. The evolution of the spectral data of the Sturm-Liouville operator with a periodic potential associated with the solution of a negative-order KdV equation with a free term in the class of periodic functions is determined. The results obtained make it possible to apply the inverse problem method to the solution of the KdV equation of negative order with a free term in the class of periodic functions.

Keywords: KdV of negative order, self-consistent source, inverse spectral problem, Dubrovin - Trubovits system of equations.

Bibliography: 29 titles.

For citation:

M. M. Khasanov, I. D. Rakhimov, 2023, "Integration of the KdV equation of negative order with a free term in the class of periodic functions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 266–275.

1. Введение

Одним из представителей класса вполне интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных, имеющей большое прикладное значение, является уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ). Полная интегрируемость этого уравнения методом обратной задачи, в классе быстроубывающих функций, впервые было установлена в работе [1]. Исследованию уравнения КдФ в классе конечноразрывных периодических и квазипериодических функций посвящены работы [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

В работе [9] В.К. Мельникова с помощью метода обратной задачи рассеяния было проинтегрировано уравнение КдФ с самосогласованным источником, в классе быстроубывающих функций, а в работе [10] изучено уравнение КдФ с самосогласованным источником в классе периодических функций.

В работе [11] исследовалось уравнение КдФ со свободным членом, независимым от пространственной переменной, в классе периодических функций.

Большинство исследований касающихся изучению интегрируемых уравнений с самосогласованным источником связаны с нелинейными эволюционными уравнениями положительного порядка.

Изучению уравнения КдФ отрицательного порядка посвящены работы [12, 13]. В частности, Дж. М. Вероски [12] при изучении симметрий и отрицательных степеней рекурсивного оператора получил следующее уравнение КдФ отрицательного порядка:

$$\begin{cases} q_t = p_x \\ p_{xxx} + 4qp_x + 2q_xp = 0. \end{cases} \quad (1)$$

S.Y. Lou [13] представил дополнительные симметрии, основанные на обратимый рекурсивный оператор системы КдФ, и, в частности, вывел уравнение КдФ отрицательного порядка в следующем виде

$$q_t = 2pp_x, \quad p_{xx} + qp = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{p_{xx}}{p} \right)_t + 2pp_x = 0 \quad (2)$$

Изучение интегрируемых иерархий отрицательного порядка играют важную роль в теории остроконечных солитонов [14, 15]. В работе [16] изучена иерархия уравнения КдФ отрицательного порядка, в частности, уравнений (1) и (2).

В работах [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22] были изучены гамильтонова структура, бесконечное множество законов сохранения, N-солитонные, квазипериодические волновые решения для уравнения КдФ отрицательного порядка.

В данной работе метод обратной спектральной задачи применяется к интегрированию уравнения КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций.

Рассмотрим следующее уравнение КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций

$$\begin{cases} q_t = 2pp_x + f(t) \\ pq + p_{xx} = 0, \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in R^1 \quad (3)$$

с начальным условием

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad (4)$$

где $q_0(x)$, $p_0(t)$ и $f(t) \in C[0, \infty)$ заданные действительные функции. Требуется найти действительные функции $q(x, t)$ и $p^2(x, t)$, которые π - периодические по переменной x :

$$p^2(x + \pi, t) \equiv p^2(x, t), q(x + \pi, t) \equiv q(x, t), t \geq 0, \quad x \in R^1 \quad (5)$$

и удовлетворяют условиям гладкости:

$$\begin{aligned} q(x, t) &\in C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0), \\ p(x, t) &\in C_x^2(t > 0) \cap C(t \geq 0). \end{aligned} \quad (6)$$

Цель данной работы дать процедуру построения решения $q(x, t)$ задачи (3)-(6), в рамках обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим коэффициентом.

2. Необходимые сведения о прямой и обратной спектральной задаче для оператора штурма-лиувилля с периодическим коэффициентом

В этом пункте, для полноты изложения, приведем некоторые основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29].

Рассмотрим следующий оператор Штурма-Лиувилля на всей прямой

$$Ly \equiv -y'' + (-q(x))y = \lambda y, \quad x \in R^1, \quad (7)$$

где $q(x)$ - действительная непрерывная π -периодическая функция.

Обозначим через $c(x, \lambda)$ и $s(x, \lambda)$ решения уравнения (7) удовлетворяющие начальным условиям $c(0, \lambda) = 1$, $c'(0, \lambda) = 0$ и $s'(0, \lambda) = 1$. Функция $\Delta(\lambda) = c(\pi, \lambda) + s'(\pi, \lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла.

Спектр оператора (7) чисто непрерывный и совпадает со следующим множеством

$$E = \{\lambda \in R^1 : -2 \leq \Delta(\lambda) \leq 2\} = [\lambda_0, \lambda_1] \cup [\lambda_2, \lambda_3] \cup \dots \cup [\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}] \cup \dots$$

Интервалы $(-\infty, \lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n = 1, 2, \dots$ называются лакунами. Здесь $\lambda_0, \lambda_{4k-1}, \lambda_{4k}$ - собственные значения периодической задачи ($y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi)$), а $\lambda_{4k+1}, \lambda_{4k+2}$ - собственные значения антипериодической задачи ($y(0) = -y(\pi), y'(0) = -y'(\pi)$) для уравнения (7).

Пусть $\xi_n, n = 1, 2, \dots$ корни уравнения $s(\pi, \lambda) = 0$. Отметим, что $\xi_n, n = 1, 2, \dots$ совпадают с собственными значениями задачи Дирихле ($y(0) = y(\pi) = 0$) для уравнения (7), кроме того выполняются следующие включения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}], n = 1, 2, \dots$.

Числа $\xi_n, n = 1, 2, \dots$ вместе со знаками $\sigma_n = \text{sign}\{s'(\pi, \xi_n) - c(\pi, \xi_n)\}, n = 1, 2, \dots$ называются спектральными параметрами задачи (7). Спектральные параметры $\xi_n, \sigma_n, n = 1, 2, \dots$ и границы $\lambda_n, n = 0, 1, 2, \dots$ спектра называются спектральными данными оператора (7). Восстановление коэффициента $q(x)$ по спектральным данным называется обратной спектральной задачей для оператора (7).

Спектр оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q(x + \tau)$ не зависит от действительного параметра τ , а спектральные параметры зависят от τ : $\xi_n(\tau), \sigma_n(\tau), n = 1, 2, \dots$. Спектральные параметры удовлетворяют следующей системе уравнений Дубровина

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_n}{d\tau} &= 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \\ &\times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (8)$$

Система уравнений Дубровина и следующая формула следов

$$q(\tau, t) = -\lambda_0 - \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau, t))$$

дают метод решения обратной задачи.

3. Эволюция спектральных параметров

Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q(x, t)$ решение задачи (3)-(6). Тогда границы спектра $\lambda_n(t), n \geq 0$ следующего оператора

$$L(t)y \equiv -y'' + (-q(x, t))y = \lambda y, \quad x \in R^1 \quad (9)$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{\lambda}_n(t) = -f(t), \quad n \geq 0, \quad (10)$$

а спектральные параметры $\xi_n(t), n \geq 1$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_n &= 2(-1)^{n+1}\sigma_n(t) \left\{ \frac{1}{2\xi_n} p^2(0, t) \right\} \times \\ &\times \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \\ &\times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}} - f(t), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (11)$$

где знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}(t), \lambda_{2n}(t)]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \quad n \geq 1,$$

где $\xi_n^0, \sigma_n^0, n \geq 1$ - спектральные параметры оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q_0(x)$.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы мы будем использовать метод работы [11]. Вводя обозначение

$$G(x, t) = f(t),$$

уравнение (3) можно переписать в виде

$$\begin{cases} q_t = 2pp_x + G(x, t) \\ pq + p_{xx} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Обозначим через $y_n(x, t)$, $n = 1, 2, \dots$ ортонормированные собственные функции задачи Дирихле ($y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$) для уравнения (9), соответствующие собственным значениям $\xi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$.

Дифференцируя по t тождество $(L(t)y_n, y_n) = \xi_n$, и используя симметричность оператора $L(t)$, имеем

$$\dot{\xi}_n = - \int_0^\pi q_t(x, t) y_n^2(x, t) dx. \quad (13)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение пространства $L_2(0, \pi)$. Подставляя (12) в (13) находим

$$\dot{\xi}_n = -2 \int_0^\pi y_n^2(x, t) p p_x dx - \int_0^\pi y_n^2(x, t) G(x, t) dx. \quad (14)$$

Интегрируя по частям первый интеграл в равенстве (14), имеем

$$2 \int_0^\pi y_n^2 p p_x dx = \int_0^\pi y_n^2 d(p^2) = y_n^2 p^2|_0^\pi - 2 \int_0^\pi y_n y'_n p^2 dx = -2 \int_0^\pi y_n y'_n p^2 dx,$$

из уравнения (9) следует следующее равенство

$$y_n = -\frac{1}{\xi_n} (y_n'' + q y_n). \quad (15)$$

Используя эти тождества и второе уравнение (12), получим

$$2 \int_0^\pi y_n^2 p p_x dx = \frac{1}{2\xi_n} [(y'_n)^2(\pi, t) - (y'_n)^2(0, t)] p^2(0, t). \quad (16)$$

Теперь займемся вычислением второго интеграла в равенстве (14):

$$\int_0^\pi G y_n^2 dx = f(t). \quad (17)$$

Подставляя выражения (16) и (17) в (14) получим равенство

$$\dot{\xi}_n = [(y'_n)^2(\pi, t) - (y'_n)^2(0, t)] \times \left\{ -\frac{1}{2\xi_n} p^2(0, t) \right\} - f(t). \quad (18)$$

Используя (18) и равенство

$$(y'_n)^2(\pi, t) - (y'_n)^2(0, t) = 2(-1)^n \sigma_n(t) \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \\ \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, \quad (19)$$

получим (11).

Известно, что границы $\lambda_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ спектра оператора (9) совпадают либо с собственными значениями периодической задачи, либо антипериодической задачи для уравнения Штурма-Лиувилля (9). Обозначив через $v_n(x, t)$ нормированную собственную функцию, соответствующую собственному значению $\lambda_n(t)$, периодической или антипериодической задачи для уравнения Штурма-Лиувилля (9), действуя вышеприведенным образом, выводим равенства (10). Теорема доказана.

Следствие 1. Если мы вместо $q(x, t)$ рассмотрим $q(x + \tau, t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи не зависят от параметров τ и t , а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от τ и t : $\xi_n = \xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n = \sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \geq 1$. В этом случае, система (9) примет вид

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \left\{ \frac{1}{2\xi_n} p^2(\tau, t) \right\} \times \\ \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \\ \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2} - f(t)}, \quad n \geq 1. \quad (20)$$

Здесь

$$s(\pi, \lambda, t, \tau) = \pi \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k(t, \tau) - \lambda}{k^2}. \quad (21)$$

Учитывая формулы следов

$$q(\tau, t) = -\lambda_0 - \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau, t)), \quad (22)$$

$$p^2(\tau, t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \frac{\partial \xi_k(s, t)}{\partial t} ds - \int_0^{\tau} f(s) ds + p_0^2(t). \quad (23)$$

Следствие 2. Эта теорема дает метод решения задачи (3)-(6). Действительно, обозначим через $\lambda_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t)$, $n = 1, 2, \dots$, спектральные данные задачи

$$-y'' + (-q(x + \tau, t))y = \lambda y, \quad x \in R^1.$$

Найдём спектральные данные λ_n^0 , $n = 0, 1, 2, \dots$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n = 1, 2, \dots$ для уравнения

$$-y'' + (-q_0(x + \tau))y = \lambda y, \quad x \in R^1.$$

Решая уравнения (9) с начальными условиями $\lambda_n(t)|_{t=0} = \lambda_n^0$, $n = 1, 2, \dots$ находи

$$\lambda_n(t) = \lambda_n^0 - \int_0^t f(s)ds, \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Далее, решаем задачу Коши $\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)$, $n = 1, 2, \dots$ для системы уравнений Дубровина (20). По формуле следов (22) находим решение $q(x, t)$ задачи (3)-(6) и по формуле (23) определим $p^2(x, t)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett.. 1967. Vol. 19, № 19, P. 1095-1097.
2. Новиков С.П. Периодическая задача Кортевега-де Фриза I // Функц. анализ и прил.. 1974. Т. 8, № 3. С. 54-66.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно периодический аналоги много-солитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза // ЖЭТФ. 1974. Т. 67, № 12, С. 2131-2143.
4. Марченко В.А. Периодическая задача Кортевега-де Фриза // Мат. сб.. 1974. Т. 95, № 3. С. 331-356.
5. Дубровин Б.А. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов // Функц. анализ и прил.. 1975. Т. 9, № 3. С. 41-51.
6. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N -солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза // Теорет. мат. физ.. 1975. Т. 23, № 1. С. 51-68.
7. Lax P. Periodic solutions of the KdV equations // Lecture in Appl. Math. AMS. 1974. Vol. 15. P. 85-96.
8. Lax P. Periodic Solutions of the KdV equation // Comm. Pure and Appl. Math.. 1975. Vol. 28. P. 141-188.
9. Мельников В.К. Метод интегрирования уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником // Препринт. Дубна. 1988.
10. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об уравнении Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций // Теорет. мат. физ.. 2010. Т. 164, № 2. С. 214-221.
11. Яхшимуратов А.Б. Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза со специальным свободным членом в классе периодических функций // Уфимский матем. журнал. - Уфа. 2011. Т. 3. № 4. С. 144-150.
12. Verosky J.M. Negative powers of Olver recursion operators // J. Math. Phys. 1991. Vol. 32. P. 1733-1736.
13. Lou S.Y. Symmetries of the KdV equation and four hierarchies of the integrodifferential KdV equations // J. Math. Phys. 1994. Vol. 35. P. 2390-2396.

14. Degasperis A., Procesi M. Asymptotic integrability, in symmetry and perturbation theory // edited by A. Degasperis and G. Gaeta, World Scientific. 1999. P. 23-37.
15. G. P., Qiao Z.J. Cuspons and smooth solitons of the Degasperis-Procesi equation under inhomogeneous boundary condition // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 2007. Vol. 10. P. 205-225.
16. Qiao Z.J., Fan E.G. Negative-order Kortewe-de Vries equations // Phys. Rev. 2012. Vol. 86. P. 016601.
17. Chen J.B. Quasi-periodic solutions to a negative-order integrable system of 2-component KdV equation // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.. 2018. Vol. 15. No. 03. P. 1-34.
18. Qiao Z.J., Li J.B. Negative-order KdV equation with both solitons and kink wave solutions // Euro. Phys. Lett. 2011. Vol. 94. P. 50003.
19. Zhao S., Sun Y. A Discrete negative order potential Korteweg-de Vries equation // Z. Naturforsch. 2016. Vol. 71(12)A. P. 1151-1158.
20. Chen J. Quasi-periodic solutions to the negative-order KdV hierarchy // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 2019. Vol. 15. P. 1850040.
21. Rodriguez M., Li J., Qiao Z. Negative Order KdV equation with no solitary traveling waves // Mathematics. 2022. Vol. 10. P. 48.
22. Wazwaz A. Negative-order KdV equations in (3+1) dimensions by using the KdV recursion operator // Waves Random Complex Media. 2017. Vol. 27. P. 768.
23. Kuznetsova M. Necessary and sufficient conditions for the spectra of the Sturm-Liouville operators with frozen argument // Applied Mathematics Letters. 2022. Vol. 131. P. 108035.
24. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка // В 2-х т. - М.: ИЛ. 1961. Т. 2. С. 556.
25. Magnus W., Winkler W. Hill's equation // New York: Interscience Wiley. 1966.
26. Станкевич И.В. Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла // ДАН СССР. 1970. Т. 192, № 1. С. 34-37.
27. Марченко В.А., Островский И.В. Характеристика спектра оператора Хилла // Мат. сб.. 1975. Т. 97. С. 540-606.
28. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potentials // Comm. Pure and Appl. Math.. 1977. Vol. 30. P. 321-337.
29. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака // М.: "Наука" 1988.

REFERENCES

1. Gardner C.S. Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. 1967, "Method for solving the Korteweg-de Vries equation", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 19, № 19, pp. 1095-1097.
2. Novikov S.P. 1974, "The periodic problem for the Korteweg—de vries equation", *Funct Anal Its Appl*, vol. 8, pp. 236–246.

3. Dubrovin B.A., Novikov S.P. 1974, "Periodic and conditionally periodic analogues of multisoliton solutions of the Korteweg-de Vries equation", *ZhETF.*, vol. 67, № 12, pp. 2131-2143.
4. Marchenko V.A. 1974, "Korteweg-de Vries periodic problem", *Math. Stat.*, vol. 95, № 3, pp. 331-356.
5. Dubrovin B.A. 1975, "Periodic Problem for the Korteweg-de Vries Equation in the Class of Finite-Gap Potentials", *Funct. analysis and application*, vol. 9, № 3, pp. 41-51.
6. Its A.R., Matveev V.B. 1975, "Finite-gap Schrödinger operators and N -soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation", *Teoret. mat. Phys.*, vol. 23, № 1, pp. 51-68.
7. Lax P. 1974, "Periodic solutions of the KdV equations", *Lecture in Appl. Math. AMS.*, vol. 15, pp. 85-96.
8. Lax P. 1975, "Periodic Solutions of the KdV equation", *Comm. Pure and Appl. Math.*, vol. 28, pp. 141-188.
9. Melnikov V.K. 1988, "Method for integrating the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source", *Preprint. Dubna.*
10. Khasanov A.B., Yakhshimuratov A.B. 2010, "On the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions", *Teoret. mat. Phys.*, vol. 164, № 2, pp. 214-221.
11. Yakhshimuratov A.B. 2011, "Integration of the Korteweg-de Vries equation with a special free term in the class of periodic functions", *Ufimskii Matem. magazine. - Ufa.*, vol. 3, № 4, pp. 144-150.
12. Verosky J.M. 1991, "Negative powers of Olver recursion operators", *J. Math. Phys.*, vol. 32, pp. 1733-1736.
13. Lou S.Y. 1994, "Symmetries of the KdV equation and four hierarchies of the integrodifferential KdV equations", *J. Math. Phys.*, vol. 35, pp. 2390-2396.
14. Degasperis A., Procesi M. 1999, "Asymptotic integrability, in symmetry and perturbation theory", *edited by A. Degasperis and G. Gaeta, World Scientific.*, pp. 23-37.
15. G. P., Qiao Z.J. 2007, "Cuspons and smooth solitons of the Degasperis-Procesi equation under inhomogeneous boundary condition", *Mathematical Physics, Analysis and Geometry.*, vol. 10, pp. 205-225.
16. Qiao Z.J., Fan E.G. 2012, "Negative-order Kortewe-de Vries equations", *Phys. Rev.*, vol. 86, pp. 016601.
17. Chen J.B. 2018, "Quasi-periodic solutions to a negative-order integrable system of 2-component KdV equation", *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, vol. 15, № 03, pp. 1-34.
18. Qiao Z.J., Li J.B. 2011, "Negative-order KdV equation with both solitons and kink wave solutions", *Euro. Phys. Lett.*, vol. 94, pp. 50003.
19. Zhao S., Sun Y. A 2016, "Discrete negative order potential Korteweg-de Vries equation", *Z. Naturforsch.*, vol. 71(12)A. pp. 1151-1158.
20. Chen J. 2019, "Quasi-periodic solutions to the negative-order KdV hierarchy", *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, vol. 15, pp. 1850040.

21. Rodriguez M., Li J., Qiao Z. 2022, "Negative Order KdV equation with no solitary traveling waves", *Mathematics.*, vol. 10, pp. 48.
22. Wazwaz A. 2017, "Negative-order KdV equations in (3+1) dimensions by using the KdV recursion operator", *Waves Random Complex Media.*, vol. 27, pp. 768.
23. Kuznetsova M. 2022, "Necessary and sufficient conditions for the spectra of the Sturm-Liouville operators with frozen argument", *Applied Mathematics Letters.*, vol. 131, pp. 108035.
24. Titchmarsh E.Ch. 1961, "Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations", *In 2 vols. - M.: IL.*, vol. 2, pp. 556.
25. Magnus W., Winkler W. 1966, "Hill's equation", *New York: Interscience Wiley.*
26. Stankevich I.V. 1970, "On a Problem of Spectral Analysis for the Hill Equation", *DAN SSSR.*, vol. 192, № 1, pp. 34-37.
27. Marchenko V.A., Ostrovsky I.V. 1975, "Characterization of the spectrum of the Hill operator", *Math. Sat.*, vol. 97. pp. 540-606.
28. Trubowitz E. 1977, "The inverse problem for periodic potentials", *Comm. Pure and Appl. Math.*, vol. 30, pp. 321-337.
29. Levitan B.M., Sargsyan I.S. 1988, "Sturm-Liouville and Dirac operators", *M.: Nauka.*

Получено: 13.02.2023

Принято в печать: 14.06.2023