ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 2.

УДК 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-256-265

Об идеальной экономической ситуации – росте капитала и функции потребления в некоторых моделях экономического роста

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский

Козко Артём Иванович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Лужина Любовь Михайловна — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: lluzhina@gmail.com

Попов Антон Юрьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

В статье исследуется экономическая модель роста Рамсея — Касса — Купманса. Мы исследовали монотонность функций $C(t)$ и $K(t)$ при специальном начальном условии. Наши результаты получены при помощи вспомогательной системы дифференциальных уравнений, которая аналогична исходной системе дифференциальных уравнений, возникающей в случае постоянства стационарной нормы сбережения.

Ключевые слова: математическая модель экономического роста, задача Рамсея — Касса — Купманса, монотонность функции сбережения и капитала, конкурентные домохозяйства, сепаратриса, стационарная норма сбережения.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Об идеальной экономической ситуации - росте капитала и функции потребления в некоторых моделях экономического роста // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 256–265.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-256-265

About the ideal economic situation - the growth of capital and the function of consumption in some models of economic growth

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii

Kozko Artem Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Luzhina Lyubov Mikhailovna — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: lluzhina@gmail.com
Popov Anton Yurievich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru
Chirskii Vladimir Grigorievich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

The article is devoted to the Ramsey — Kass — Koopmans economic growth model. We investigated the monotonicity of the functions $C(t)$ and $K(t)$ under a special initial condition. Our results are obtained using an auxiliary system of differential equations, which is similar to the original system of differential equations arising in the case of constancy of the stationary rate of savings.

Keywords: mathematical model, Ramsey — Kass — Koopmans problem, monotony of the function of saving and capital, competitive households, stationary savings rate.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii, 2023, "About the ideal economic situation - the growth of capital and the function of consumption in some models of economic growth" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 256–265.

1. Введение и основной результат

В модели Рамсея – Касса – Купманса (см. [1] – [17]), применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $K(t)$ — капитал в момент времени t и $C(t)$ — потребление в момент времени t:

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^{\alpha}(t) - C(t) - x_1 K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2 C(t). \end{cases} \tag{1}$$

В систему входит набор констант a, α, θ и x_1, x_2, характеризующих рассматриваемую экономическую структуру. Вторая группа констант, линейными комбинациями которых являются

$x_1 = x + n + \delta$ и $x_2 = \frac{\delta+\rho}{\theta} + x$, связана с такими характеристиками изучаемой экономической системы (n, x, δ, θ), как темпы прироста населения, развитие уровня технологии, выбывания капитала, а также ставкой временного предпочтения. Подробно с ними и оценками на эти константы можно ознакомиться в [9] –[18].

В большинстве исследований по этой тематике рассматривается значение $\theta > 1$; этот случай будет в центре внимания и в нашей работе.

В [3] мы обнаружили, что система дифференциальных уравнений (1) допускает решение в квадратурах, если константы x_1, x_2, α связаны соотношением

$$\alpha x_1 = x_2. \tag{2}$$

Это соотношение соответствует экономическим структурам со стационарной нормой сбережения. Такие структуры достаточно хорошо изучены и не представляют в настоящее время большого интереса. Поэтому в подавляющем большинстве современных работ, где встречается система (1), изучают общий случай, когда равенство (2) не имеет места. Основной интерес представляют модели, в которых

$$\xi = \alpha x_1 - x_2 > 0. \tag{3}$$

Как правило, число α, являющееся показателем степени в определении производственной функции Кобба – Дугласа

$$f(K) = aK^{\alpha}, \tag{4}$$

лежит в пределах $0.7 \leqslant \alpha \leqslant 0.95$, x_1, x_2 – “небольшие” постоянные $(0,02 \leqslant x_2 \leqslant 0,06)$, причём константа x_1 такова, что αx_1 лишь “немного больше” x_2 (обычно $0.1x_2 \leqslant \xi \leqslant 0.4x_2$).

В связи с тем, что в [3] мы решили в квадратурах задачу Коши для более общих систем, нежели (1) с соотношение (2), а именно

$$\begin{cases} \dot{K} = f(K) - bC - x_3 K, \\ \dot{C} = \alpha\theta^{-1}\left(\frac{f(K)}{K}\right)C - x_2 C, \quad \text{где } x_3 = \frac{x_2}{\alpha},\ b > 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$K(0) = K_0,\ C(0) = C_0, \tag{6}$$

мы там же предложили в случае (3) заменить систему уравнений (1) системой уравнений (5), отличающейся от (1) множителем b перед C в правой части первого уравнения, равным

$$b = 1 + \frac{\xi K_0}{\alpha C_0}, \tag{7}$$

а также заменой x_1 на $\frac{x_2}{\alpha}$ в том же уравнении. Такой выбор параметра b обусловлен тем, что из равенства (7) следует совпадение значений правых частей первых уравнений систем (1) и (5) в начальный момент времени. А поскольку вторые уравнения этих систем одинаковы, то мы имеем “близость” решений задачи Коши для систем (1) и (5) с совпадающими начальными условиями (6) при “относительно небольших” временах.

В этой работе мы изучаем вопрос о монотонности функций $C(t)$ и $K(t)$ – компонент решения задачи Коши (5), (6). Данный вопрос постоянно привлекает внимание исследователей моделей экономического роста. Обычно рассматривают модели, в которых “заложено” возрастание компонент решения $(K(t),\ C(t))$ в самом начале процесса, и выясняют, каких значений могут достичь, возрастая, эти функции, и сколь долго будет длиться их возрастание. Из (5), (6) видно, что положительность $\dot{C}(0)$ равносильна справедливости неравенства

$$\frac{\alpha}{\theta}\frac{f(K_0)}{K_0} > x_2, \tag{8}$$

Это условие в дальнейшем предполагается выполненным. Из (5), (6) также видно, что положительность $\dot{K}(0)$ равносильна справедливости неравенства

$$f(K_0) > bC_0 + x_3K_0,$$

а значит заведомо $f(K_0) > bC_0$. Обычно предполагают, что

$$f(K_0) \geqslant \frac{\theta}{\theta-1}bC_0, \tag{9}$$

(В частности, если $\theta = 2$, то $f(K_0) \geqslant 2bC_0$, а если $\theta = 3$, то $f(K_0) \geqslant 1.5bC_0$.)

Множитель $\frac{\theta}{\theta-1}$ (напомним, что у нас $\theta > 1$) появился в (9) не случайно. В случае, когда в (9) достигается равенство, мы получили следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $\theta > 1$, и выполняются условие* (8) *и равенство*

$$f(K_0) = \frac{\theta}{\theta-1}bC_0. \tag{10}$$

Тогда решение $(K(t),\ C(t))$ задачи Коши (5), (6) *существует на всём луче $[0,\ +\infty)$, обе компоненты его возрастают и стремятся к следующим пределам:*

$$\lim_{t\to+\infty} K(t) = \left(\frac{a\alpha}{x_2\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \lim_{t\to+\infty} C(t) = \frac{\theta-1}{b}\left(\frac{a}{\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{x_2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{11}$$

На луче $0 \leqslant t \leqslant +\infty$ справедливы тождества

$$C(t) = \frac{\theta-1}{b\theta}f(K(t)), \quad \int\limits_{K_0}^{K(t)} \frac{du}{\theta^{-1}f(u) - (\frac{x_2}{\alpha})u} = t \tag{12}$$

Замечание 4. *Теорема 1 означает, что на фазовой плоскости (см. рис. 1) мы попадаем на сепаратрису — единственную интегральную кривую, обладающую свойством бесконечного монотонного возрастания сразу обеих функций $C(t)$ и $K(t)$ – компонент решения задачи Коши* (5), (6). *Таким образом мы попадаем в идеальную экономическую ситуацию, когда с ростом времени у нас растёт как потребление, так и капитал. Причём этот процесс продолжается до бесконечности и в итоге обе функциии стремятся к конечным значениям* (11) *с ростом времени на бесконечности.*

2. Доказательство теоремы

Покажем, что если в 1-е и 2-е уравнения системы (5) подставить функцию $C(t)$, определённую в (12), то эти уравнения окажутся совпадающими. Действительно, первое уравнение системы (5) примет вид

$$\dot{K}(t) = \frac{1}{\theta}f(K(t)) - \frac{x_2}{\alpha}K(t). \tag{13}$$

Если же продифференцировать выражение C через K из (12) по t, то получим

$$\dot{C}(t) = \frac{\theta-1}{b\theta}\dot{K}(t)\alpha aK^{\alpha-1}(t) = \alpha\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}C(t) \Rightarrow \frac{\dot{C}}{C} = \alpha\frac{\dot{K}}{K}. \tag{14}$$

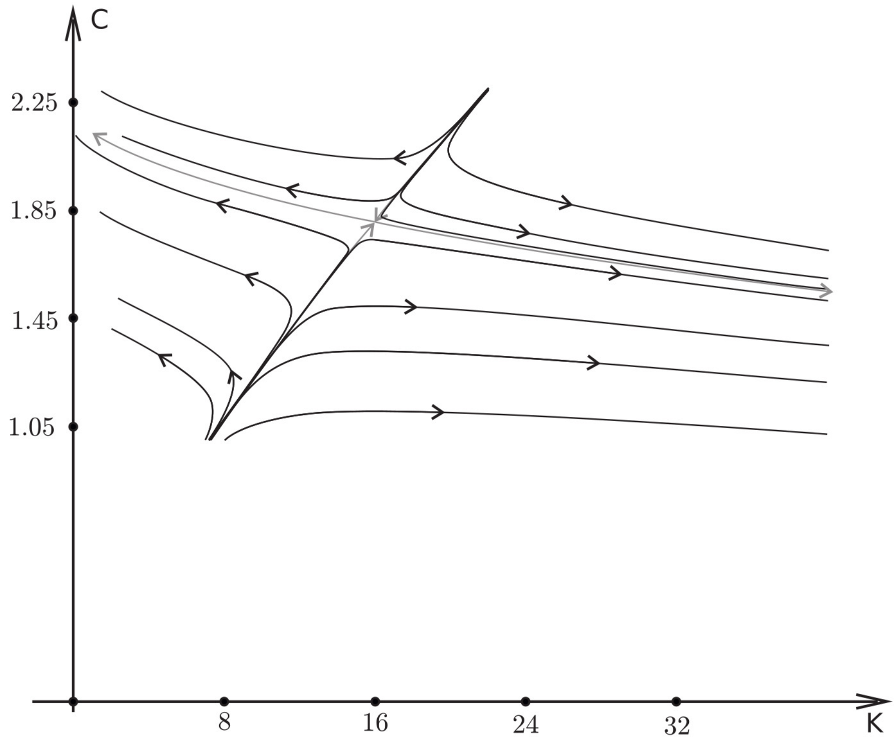

Рис. 1: Фазовый портрет. Построен для так называемых "эталонных значений": $\alpha = 3/4$, $\theta = 3$, $n = 0.01$, $\delta = 0.05$, $x = 0.02$, $x_1 = 0.08$, $x_2 = 13/300$, $a = 26/75$.

Второе уравнение системы (5), будучи переписано в равносильной форме (после деления обеих частей на положительную функцию $C(t)$) имеет вид

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{\alpha}{\theta}\frac{f(K)}{K} - x_2. \tag{15}$$

После подстановки выражения (14) для логарифмической производной функции C в левую часть уравнения (15) получим уравнение

$$\frac{\alpha \dot{K}}{K} = \frac{\alpha}{\theta}\frac{f(K)}{K} - x_2 \Rightarrow \dot{K} = \frac{1}{\theta}f(K) - \frac{x_2}{\alpha}K,$$

которое совпадает с (13).

Осталось проверить, что решением задачи Коши

$$\frac{dK}{dt} = \frac{f(K)}{\theta} - \frac{x_2 K}{\alpha},\ K(0) = K_0, \tag{16}$$

является функция $K(t)$, определяемая вторым соотношением (12). Для этого проинтегрируем уравнение (16), разделив в нём переменные:

$$\int \frac{dK}{\theta^{-1}f(K) - (\frac{x_2}{\alpha})K} = \int dt.$$

Затем воспользуемся начальным условием $K(0) = K_0$ и учтём, что вследствие неравенства (8) знаменатель подынтегральной функции положителен в начальной точке K_0, остаётся положительным на интервале

$$K_0 < K < K_+,\ \text{где } K_+ = \left(\frac{a\alpha}{x_2\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

и в точке K_+ обращается в нуль. Заметим далее, что продолжаемость функции $K(t)$ на всю положительную полуось следует из расходимости к $+\infty$ несобственного интеграла

$$\int\limits_{K_0}^{K_+} \frac{du}{\frac{1}{\theta}f(u) - (\frac{x_2}{\alpha})u}.$$

На рис. 2 мы изобразили график функции $h(t) = \int\limits_{K_0}^{t} \frac{du}{\frac{1}{\theta}f(u)-(\frac{x_2}{\alpha})u}$ для $t \in [K_0; K_+)$. Отсюда сразу же получаем первое равенство (11), а из него и выражения (12) $C(t)$ через $K(t)$ следует второе равенство (11). Теорема полностью доказана.

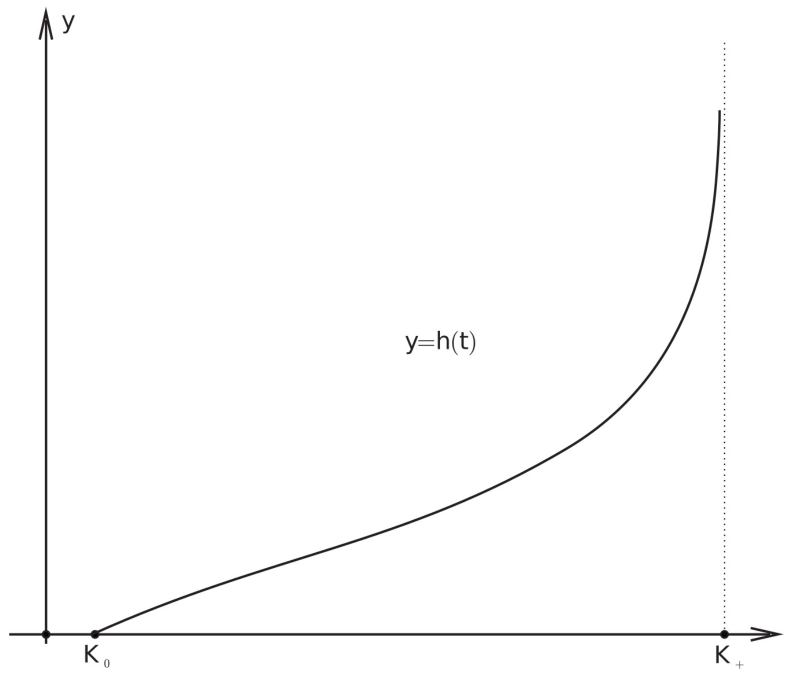

Рис. 2: График функции $h(t)$. Построен для "эталонных значений".

Завершая параграф, выясним, во сколько раз увеличиваются значения $K(t)$ и $C(t)$ по сравнению с начальными значениями этих функций по завершении экономической деятельности (то есть при больших временах) при наличии специального соотношения (10) между K_0 и C_0. Ответ мы выразим через постоянную H, которую определим следующим образом

$$H = \frac{\alpha}{\theta}\frac{f(K_0)}{x_2 K_0}.$$

Напомним, что положительность $\dot{C}(0)$ равносильна неравенству $H > 1$.

Выше мы доказали, что предел при $t \to +\infty$ функции $K(t)$ равен

$$K_+ = \left(\frac{a\alpha}{x_2\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{\alpha a K_0^\alpha}{\theta x_2 K_0^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{\alpha f(K_0)}{\theta x_2 K_0}K_0^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = H^{\frac{1}{1-\alpha}}K_0. \tag{17}$$

Отношение предела $C_+ = \lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ к C_0 проще всего выразить, воспользовавшись не равенством (11), а только что выведенным равенством (17), затем первым тождеством (12) и равенством (10), согласно которому

$$C_+ = \frac{\theta-1}{b\theta}f(K_+) = \frac{\theta-1}{b\theta}a(H^{\frac{1}{1-\alpha}}K_0)^\alpha = \frac{\theta-1}{b\theta}aK_0^\alpha H^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \frac{\theta-1}{b\theta}f(K_0)H^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = C_0 H^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{18}$$

Отсюда заключаем, что первоначальное значение $C(t)$ умножается в пределе на $H^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, а первоначальное значение $K(t)$ умножается на $H^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

3. Заключение

Обсудим содержание и итоги проведенного исследования. Вопрос о монотонности компонент решения задачи Коши для системы уравнений (1) является актуальным и обсуждается во многих работах. Однако, нам не известны какие-либо результаты теоретического характера на эту тему: в основном, в упомянутых статьях анализируется поведение приближённых решений системы, найденных численными методами для различных значений экономических параметров.

Основная трудность в этой тематике состоит в том, что компоненты решения системы дифференциальных уравнений (1), судя по всему, в общем случае не могут быть записаны в удобной для изучения их поведения аналитической форме. Тем не менее, мы обнаружили, что если в системе уравнений (1) постоянную x_1 заменить на $\frac{x_2}{\alpha}$, то полученная система допускает решение в квадратурах, но не только она! В [3] мы выяснили, что после такой замены константы x_1 решение в квадратурах допускает целый класс систем, в которых вычитаемое C в первом уравнении заменено на bC, где b – произвольная положительная постоянная. Это обстоятельство даёт возможность заменить первое уравнение системы (1) первым уравнение решаемой в квадратурах системы (5) (вторые уравнения систем (1) и (5) при этом совпадают), выбрав величину b по формуле (7), чтобы обеспечить равенство значений правых частей этих уравнений в начальный момент времени. Последнее должно повлечь за собой малое отличие решений задач Коши для систем (1) и (5) с одинаковыми условиями (6). Теоретическую оценку уклонения решения задачи Коши (1), (6) от решения задачи Коши (5), (6) ещё предстоит получить. Проведенные нами численные эксперименты показывают, что при наиболее востребованных в приложениях значениях экономических параметров α, θ, x_1, x_2 и соотношениях между $f(K_0)$ и C_0 относительное отличие решений упомянутых задач Коши на довольно больших промежутках времени лежит в пределах $1\%-2\%$. Эта погрешность, как часто бывает в математическом моделировании, сопоставима с погрешностью, даваемой самой моделью в описании реально происходящего процесса.

В этой работе мы продемонстрировали эффективность перехода от системы (1) к близкой ей системе (5) в вопросе изучения монотонности решений задачи Коши. Пока мы рассмотрели случай $\theta > 1$. В этом случае нами обнаружено “критическое соотношение” (10) для начальных условий (6), при выполнении которого обе компоненты решения задачи Коши (5), (6) возрастают на всей положительной полуоси (естественно, при выполнении условия (8)). Кроме того, $K(t)$ и $C(t)$ в случае равенства (10) ограничены; их пределы на бесконечности нами найдены.

Таким образом, при произвольном значении параметра $\theta > 1$, мы нашли соотношение между $f(K_0)$ и C_0, выполнение которого влечёт за собой возрастание обеих компонент решения задачи Коши (5), (6). Подчеркнём, что сформулированные выше результаты получены благодаря найденному в [3] интегральному тождеству, в которое входит функция $C(t)$.

В дальнейшем мы планируем продолжить исследование монотонности компонент решения задачи Коши (5), (6): в частности, изучить поведение компонент $C(t)$, $K(t)$ не только в случае $f(K_0) > \theta(\theta-1)^{-1}$ в C_0, но и $f(K_0) < \theta(\theta-1)^{-1}$ в C_0. Заслуживает внимания также задача нахождения или оценки максимальных значений (или точных верхних граней) $K(t)$ и $C(t)$ на положительной полуоси; пока это сделано только при выполнении равенства (10) (см. окончание §2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Acemoglu Daron. The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth // Princeton: Princeton University Press. 2009. pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.

2. Bénassy Jean-Pascal. The Ramsey Model. Macroeconomic Theory // New York: Oxford University Press. 2011. P. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.

3. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Метод приближённого решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея — Касса — Купманса, основанный на решении в квадратурах одного подкласса сходных систем // Чебышевский сборник. 2022;23(4):115-125. *https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-115-125.*

4. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея —Касса —Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник. 2019;20(4):197-207. *https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207.*

5. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея —Касса — Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том 182. С. 39–44. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44

6. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея —Касса — Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

7. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея–Касса–Купманса // Чебышевский сборник. 2019. Vol 20(4), С. 188-196. *https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.*

8. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник. 2022. Vol 23(1), С. 118-129. *https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-1-118-129.*

9. Rahul Giri. Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey —Cass —Koopmans Model // *http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.*

10. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.

11. Groth Christian and Koch Karl-Josef and Steger Thomas Michael. Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006) // CESifo Working Paper Series No. 1701. Available at SSRN: *https://ssrn.com/abstract=899250.*

12. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory. Vol. 44, No. 2, 2010.

13. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: *http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf, 2010.*

14. Romer D. Advanced Macroeconomics. 3rd ed. // New York: McGraw-Hill/Irwin. 2006. P. 651.

15. Robert J. Barro. Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model // The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press. 1999. Vol. 114, No 4. P. 1125-1152.

16. King Robert G., and Sergio Rebelo. Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model // American Economic Review. 1993. Vol. 83, September. P. 908-931.

17. Pierre-Olivier Gourinchas. Notes for Econ202A: The Ramsey —Cass —Koopmans Model // UC Berkeley Fall 2014 *https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf*

18. Эглит Я.Я., Эглите К.Я., Дудин В.С., Юрченко Е.А. Функция потребления и оценивание её параметров по эксперементальным данным // Транспортное дело России. 2022. No. 2, С. 7-9. DOI: 10.52375/20728689_2022_2_7.

REFERENCES

1. Acemoglu, Daron. 2009, “The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth”, *Princeton: Princeton University Press.* pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.

2. Bénassy, Jean-Pascal. 2011, “The Ramsey Model. Macroeconomic Theory”, *New York: Oxford University Press.* pp. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.

3. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2022, “The method of approximate solution of a system of differential equations from the Ramsey–Kass–Koopmans model, based on the solution in quadratures of one subclass of similar systems”, *Chebyshevskii Sbornik.* vol.23(4), September. pp. 115-125. (In Russ.) *https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-115-125.*

4. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, “Optimal exponent in the Ramsey —Kass —Koopmans problem with logarithmic utility function”, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 20(4), September. pp. 197-207. (In Russ.) *https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207.*

5. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2020, “On the Ramsey —Kass —Koopmans problem for consumer choice”, *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic review.* vol. 182, September, pp. 39-44. (In Russ.) DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44.

6. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, The model of the problem Ramsey —Kass —Koopmans // *Moscow state pedagogical University (Moscow). Classical and modern geometry, materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of V. T. Bazylev. under the editorship of A. V. Tsarev. Moscow.* pp. 87-88.

7. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, “Assessment of the necessary initial economic resource in the Ramsey —Kass —Koopmans problem”, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 20(4), September, pp. 188-196. (In Russ.) *https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.*

8. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2022, “The consumption function in the Ramsey—-Kass—-Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function”, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 23(1), September, pp. 118-129. (In Russ.) *https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.*

9. Rahul, Giri. “Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey —Cass —Koopmans Model”, 2018, *https://gente.itam.mx/rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ ramsey-cass-koopmans_model.pdf.*

10. Barro, Robert J., Sala-i-Martin, Xavier. 2003, “Economic growth (2nd ed.)”, *Massachusetts: MIT Press*, ISBN 9780262025539.

11. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2006, “Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006)”, *CESifo Working Paper Series*, no. 1701. Available at SSRN: *https://ssrn.com/abstract=899250.*

12. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2010, “When Economic Growth is Less than Exponential”, *Economic Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 213-242.

13. Groth, C. 2010, “Chapter 10: The Ramsey Model”, *Available at: http://web.econ.ku.dk/okocg/ VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf.*

14. Romer, D. 2006, “Advanced Macroeconomics. 3rd ed”, *New York: McGraw-Hill/Irwin*, pp. 651.

15. Robert J. Barro. 1999, “Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model”, *The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press*, vol. 114, no. 4, pp. 1125-1152.

16. King Robert, G., and Sergio Rebelo. 1993, “Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model”, *American Economic Review.* vol. 83, September, pp. 908-931.

17. Pierre-Olivier, Gourinchas. 2014, “Notes for Econ202A: The Ramsey —Cass —Koopmans Model”, *UC Berkeley Fall*, *https://eml.berkeley.edu/ webfac/gourinchas/e202a_f14/ Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf.*

18. Eglit Y., Eglite K., Dudin V., Yurchenko E. 2022, “Consumption function and estimation of its parameters from experimental data”, *Transport business in Russia.* vol. 2, pp. 7-9.

Получено: 10.04.2023
Принято в печать: 14.06.2023