ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-214-227

Об оценках Быковского для отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток[1]

А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Кормачева Антонина Николаевна — Швейцария (г. Цюрих).
e-mail: juska789@mail.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

Данная работа посвящена получению оценок типа оценок Быковского для отклонения обобщённой параллелепипедальной сетки. В ней продолжены исследования аналогичные тем, что ранее мы выполнили для оценок меры качества и количественной меры параллелепипедальной сетки.

Основная идея, используемая в данной работе, восходит к работе В. А. Быковского (2002 год) об оценке погрешности приближенного интегрирования по параллелепипедальным сеткам и её обобщению в работе О. А. Горкуши и Н. М. Добровольского (2005 год) на случай гиперболической дзета-функции произвольной решётки. Центральное место в этих работах играет множество Быковского, состоящее из локальных минимумов второго рода, и суммы по этим множествам.

Как и в работе «Об оценках Быковского для меры качества оптимальных коэффициентов» был обнаружен эффект, что в оценках отклонения появляется множитель с логарифмическим порядком роста, который стал входить в определение модифицированной суммы Быковского.

Методом работы является объединение подходов из работы «Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток» (1984 год) с подходами 2005 года.

Намечены дальнейшие пути для получения уточнения полученных оценок.

Ключевые слова: функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка, множество Быковского, сумма Быковского, локальные минимумы решётки, минимальные решения сравнения.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Об оценках Быковского для отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 214–227.

[1]Исследование выполнено РНФ № 23-21-00317 по теме «Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближенном анализе».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-214-227

On Bykovsky estimates for deviations of generalized parallelepipedal grids[2]

A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

Kormacheva Antonina Nikolaevna — Switzerland (Zurich).
e-mail: juska789@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

This paper is devoted to obtaining estimates of the type of Bykovsky estimates for the deviation of a generalized parallelepipedal grid. It continues the studies similar to those that we previously performed to assess the quality measure and the quantitative measure of the parallelepipedal grid.

The main idea used in this paper goes back to the work of V. A. Bykovsky (2002) on estimating the error of approximate integration over parallelepipedal grids and its generalization in the work of O. A. Gorkusha and N. M. Dobrovolsky (2005) for the case of a hyperbolic zeta function of an arbitrary lattice. The central place in these works is played by the Bykovsky set, consisting of local minima of the second kind, and sums over these sets.

As in the work "On Bykovsky estimates for a measure of the quality of optimal coefficients the effect was found that a multiplier with a logarithmic order of growth appears in the deviation estimates, which began to include the definition of the modified Bykovsky sum.

The method of work is to combine the approaches from the work "Estimates of deviations of generalized parallelepipedal grids"(1984) with the approaches of 2005.

Further ways to obtain clarification of the received estimates are outlined.

Keywords: quality function, generalized parallelepipedal grid, Bykovsky set, Bykovsky sum, local lattice minima, minimal comparison solutions.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2023, “On Bykovsky estimates for a measure of the quality of optimal coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 214–227.

Посвящается 65-летию
Виктора Алексеевича Быковского.

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by the RSF No. 23-21-00317 on the topic “Number geometry and Diophantine approximations in the number-theoretic method in approximate analysis”.

1. Введение

Метод оптимальных коэффициентов появился в 1959 году и первые публикации Н. М. Коробова [12] и Н. С. Бахвалова [1] были сделаны в 4 выпуске Вестника Московского университета.

Параллелепипедальные сетки $M(\vec{a},p)$, состоящие из точек

$$M_k=\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right)\qquad(k=1,2,\ldots,p),\tag{1}$$

имеют простой вид, но требуется не только условие взаимной простоты коэффициентов сетки ($(a_j,p)=1$ $(j=1,2,\ldots,s)$), но и выполнение принципиального условия оптимальности, которое формулируется в терминах основной меры качества $S_p(a_1,\ldots,a_s)$ набора коэффициентов $(a_1,\ldots,a_s)$. $S_p(z_1,\ldots,z_s)$ выражается через сумму[3]

$$S_p(z_1,\ldots,z_s)=\sum_{m_1,\ldots,m_s=-p_1}^{p_2}{}'\frac{\delta_p(z_1m_1+\ldots+z_sm_s)}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s},\tag{2}$$

где $z_1,\ldots,z_s$ – произвольные целые, $\overline{m}=\max(1,|m|)$ для любого вещественного m, $p_1=\left[\frac{p-1}{2}\right]$, $p_2=\left[\frac{p}{2}\right]$ и символ Коробова $\delta_p(b)$ задан равенствами

$$\delta_p(b)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad b\not\equiv0\pmod p,\\ 1, & \text{если}\quad b\equiv0\pmod p.\end{cases}\tag{3}$$

В работе [5] было дано следующее определение обобщённой параллелепипедальной сетки. Пусть $s>1$ и Λ произвольная s-мерная решётка. Если $\vec{\lambda}_1=(\lambda_{1\,1},\ldots,\lambda_{1\,s})$, $\ldots$, $\vec{\lambda}_s=(\lambda_{s\,1},\ldots,\lambda_{s\,s})$ — базис решётки Λ, то взаимную решётку Λ^* можно задать взаимным базисом $\vec{\lambda}_1^*=(\lambda_{1\,1}^*,\ldots,\lambda_{1\,s}^*)$, $\ldots$, $\vec{\lambda}_s^*=(\lambda_{s\,1}^*,\ldots,\lambda_{s\,s}^*)$, который однозначно характеризуется соотношениями

$$(\vec{\lambda}_\nu,\vec{\lambda}_\mu)=\begin{cases}1, & \text{если}\ \nu=\mu,\\ 0, & \text{если}\ \nu\neq\mu.\end{cases}\tag{4}$$

Определение 1. *Параллелепипедальной сеткой I типа или просто обобщённой параллелепипедальной сеткой решётки Λ будем называть сетку $M(\Lambda)$, состоящую из точек взаимной решётки Λ^*, лежащих в s-мерном единичном полуоткрытом кубе $G_s=[0;1)^s$.*

Рассмотрим характеристическую функцию $\chi(\vec{x},\vec{\alpha})$ прямоугольной области $\Pi(\vec{\alpha})=[0;\alpha_1)\times\ldots\times[0;\alpha_s)$. Локальным отклонением $D(M(\Lambda),\vec{\alpha})$ называется величина

$$D(M(\Lambda),\vec{\alpha})=\sum_{k=0}^{N-1}\chi(\vec{x_k},\vec{\alpha})-N\cdot\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_s,$$

где $N=|M(\Lambda)|$ – количество точек обобщённой параллелепипедальной сетки решётки Λ. Отклонением сетки $M(\Lambda)$ называется величина

$$D_s(M(\Lambda))=\sup_{\vec{\alpha}\in[0;1]^s}|D(M(\Lambda),\vec{\alpha})|.$$

В работе [5] была доказана теорема об оценке величины отклонения сетки $M(\Lambda)$ через детерминант решётки Λ и величину её гиперболического параметра $q(\Lambda)$. Напомним, что гиперболическим параметром решётки Λ называется величина

$$q(\Lambda)=\min_{\vec{x}\in\Lambda\setminus\{\vec{0}\}}\overline{x}_1\ldots\overline{x}_s,$$

где для вещественных x величина $\overline{x}=\max(1,|x|)$.

[3]Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1,\ldots,m_s)\neq(0,\ldots,0)$.

Теорема 1. *Пусть для решётки Λ справедливо неравенство $q(\Lambda) > 1$, тогда для отклонения обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ решётки Λ справедливо неравенство*

$$D_s(M(\Lambda)) \leqslant 2\left(4^{s-1} + \frac{2\det\Lambda}{q(\Lambda)}(11 + 5\ln(2\det\Lambda))^s\right), \tag{5}$$

$$N = \det\Lambda + \theta(\Lambda)\left(4^{s-1} + \frac{2\det\Lambda}{q(\Lambda)}(11 + 5\ln(2\det\Lambda))^s\right), \tag{6}$$

где N — количество точек обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ решётки Λ и $|\theta(\Lambda)| \leqslant 1$.

Данная теорема является аналогом обобщённой теоремы Н. С. Бахвалова об оценке сверху гиперболической дзета-функции произвольной решётки [4].

В работе [2] В. А. Быковский получил принципиально новые оценки для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования с помощью квадратурных формул с параллелепипедальными сетками на классе E_s^α. Фактически В. А. Быковский получил оценки сверху и снизу для гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения через сумму по конечному множеству минимальных решений, которое мы в своих работах называем множеством Быковского. В работе [3] оценки Быковского были перенесены на случай гиперболической дзета-функции произвольной решётки.

Цель данной работы — получить аналог оценок Быковского для отклонения обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ решётки Λ с $\det\Lambda > 1$ и $q(\Lambda) > 1$.

2. Множество Быковского и вспомогательные леммы

Рассмотрим в s-мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$ произвольную решётку $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ с базисом $\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s$, который является линейно независимой системой векторов:

$$\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = \left\{ m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s \,\middle|\, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ненулевая точка $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_s) \in \Lambda$ называется локальным минимумом второго рода, если не существует другой ненулевой точки $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_s) \in \Lambda$, для которой

$$\overline{y_1} \leqslant \overline{x_1}, \ldots, \overline{y_s} \leqslant \overline{x_s}; \quad \overline{y_1} + \ldots + \overline{y_s} < \overline{x_1} + \ldots + \overline{x_s}.$$

Минимальным множеством решётки Λ назовем множество $B(\Lambda)$, состоящее из всех локальных минимумов $\vec{x}$ второго рода.

Из дискретности решётки и теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что для произвольной решётки её минимальное множество $B(\Lambda)$ конечно и не пусто, при этом $\overline{x_j} < \det\Lambda$ $(j = 1, \ldots, s)$.

Пусть $\vec{x}_j = (x_{1\,j}, \ldots, x_{s\,j})$ $\quad (1 \leqslant j \leqslant r,\ r = r(\Lambda))$ есть все локальные минимумы второго рода из минимального множества $B(\Lambda)$ решётки Λ. Так как для любого локального минимума второго рода $\vec{x}$ точка $-\vec{x}$ также является локальным минимумом второго рода, то $r(\Lambda)$ — чётное натуральное число. Через $B^*(\Lambda)$ обозначим множество локальных минимумов второго рода, где из каждой пары $\vec{x}$ и $-\vec{x}$ взят ровно один. Таким образом

$$B(\Lambda) = B^*(\Lambda) \bigcup -B^*(\Lambda). \tag{7}$$

Если $r^*(\Lambda) = |B^*(\Lambda)|$, то $r(\Lambda) = 2r^*(\Lambda)$. Будем предпологать, что нумерация локальных минимумов согласована с разбиением (7): $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda)$ $(j = 1, \ldots, r^*)$ и $\vec{x}_{j+r^*} = -\vec{x}_j \in -B^*(\Lambda)$ $(j = 1, \ldots, r^*)$. Ясно, что для гиперболического параметра решётки справедливо равенство

$$q(\Lambda) = \min_{1 \leqslant j \leqslant r} \overline{x}_{1\,j} \ldots \overline{x}_{s\,j}.$$

Обозначим через $\Pi(\vec{a},\vec{x})$ прямоугольный $s-$мерный полуоткрытый параллелепипед вида

$$\Pi(\vec{a},\vec{x}) = \left\{ \vec{y} \;\middle|\; \begin{cases} a_\nu \leqslant y_\nu < a_\nu + \overline{x}_\nu & \text{при } a_\nu \geqslant 0 \\ a_\nu < y_\nu \leqslant a_\nu + \overline{x}_\nu & \text{при } a_\nu < 0 \end{cases} \ (\nu = 1,\dots,s) \right\},$$

а через $N_\Lambda(\vec{a},\vec{x})$ — количество точек решётки Λ, лежащих в этом параллелепипеде.

Полагаем $\vec{1} = (1,\dots,1)$, $G_s = [0,1)^s$ — полуоткрытый единичный s-мерный куб, $K_s = [-1,1]^s$ — s-мерный куб объёма 2^s, $N(\Lambda)$ — количество ненулевых точек решётки Λ, лежащих в этом кубе. Следующая лемма в другой формулировке была доказана в [4].

Лемма 1. *Если гиперболический параметр решетки $q(\Lambda) > 1$, то $\det\Lambda > 1$ и для точки $\vec{a}$ и для любого локального минимума $\vec{x}_j \in B(\Lambda)$ справедливо неравенство*

$$N_\Lambda(\vec{a},\vec{x}_j) \leqslant 1. \tag{8}$$

Доказательство. См. [4]. □

Для доказательства теоремы 1 в работе [5] использовались следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть гладкая функция $f(\vec{x})$ обращается в ноль вместе со своими производными $\frac{\partial^{n_1+\ldots+n_s}}{\partial x_1^{n_1}\ldots\partial x_1^{n_s}} f(\vec{x}$ $(0 \leqslant n_1,\dots,n_s \leqslant 1)$ на границе s-мерного прямоугольного параллелепипеда $[a_1;b_1]\times\ldots\times[a_s;b_s]$ и обращается тождественно в ноль вне его.*

Тогда для погрешности приближенного интегрирования квадратурной формулы

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \ldots \int\limits_{a_s}^{b_s} dx_s f(\vec{x}) = \frac{1}{\det\Lambda} \sum_{\vec{x}\in\Lambda^*} f(\vec{x}) - R(f) \tag{9}$$

справедливо равенство

$$R(f) = {\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}' \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \ldots \int\limits_{a_s}^{b_s} dx_s f(\vec{x}) e^{-2\pi i(\vec{y},\vec{x})}. \tag{10}$$

Доказательство. См. [5]. □

Пусть $0 < \Delta < 0,25$ и $\vec{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_s)$, $\vec{\beta} = (\beta_1,\dots,\beta_s)$ произвольные фиксированные точки из s-мерного куба $\left[-1-\frac{\Delta}{2}; 1+\frac{\Delta}{2}\right]^s$ такие, что $\Delta < \beta_j - \alpha_j < 1 + \Delta$ $(j = 1,\dots,s)$. Положим $\delta = \Delta/2$. Для каждого $j = 1,\dots,s$ определим функции $\psi_{0j}(x)$, $\psi_j(x)$ следующими соотношениями

$$\psi_{0j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha_j < x < \beta_j, \\ 0 & \text{при } x \notin (\alpha_j;\beta_j), \end{cases} \tag{11}$$

$$\psi_j(x) = \frac{1}{2\delta} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \psi_{0j}(x+z)dz. \tag{12}$$

Лемма 3. *Для каждой функции $\psi_j(x)$, определенной равенством (12) справедливы соотношения*

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 1 & \textit{при } x \in (\alpha_j+\delta;\beta_j-\delta), \\ 0 & \textit{при } x \notin (\alpha_j-\delta;\beta_j+\delta), \\ \frac{x+\delta-\alpha_j}{2\delta} & \textit{при } x \in [\alpha_j-\delta;\alpha_j+\delta], \\ \frac{\delta+\beta_j-x}{2\delta} & \textit{при } x \in [\beta_j-\delta;\beta_j+\delta]. \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Действительно, при $x \in (\alpha_j + \delta; \beta_j - \delta)$ имеем:

$$\psi_j(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \psi_{0j}(x+z)dz = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} 1dz = 1.$$

При $x \notin (\alpha_j - \delta; \beta_j + \delta)$ имеем:

$$\psi_j(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \psi_{0j}(x+z)dz = \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} 0dz = 0.$$

При $x \in [\alpha_j - \delta; \alpha_j + \delta]$ имеем:

$$\psi_j(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \psi_{0j}(x+z)dz = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\alpha_j}^{x+\delta} 1dz = \frac{x+\delta-\alpha_j}{2\delta}.$$

Наконец, при $x \in [\beta_j - \delta; \beta_j + \delta]$ имеем:

$$\frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \psi_{0j}(x+z)dz = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{x-\delta}^{\beta_j} 1dz = \frac{\delta+\beta_j-x}{2\delta}.$$

□

Лемма 4. *Для любого действительного σ и интеграла*

$$J_j(\sigma) = \int\limits_{-1-\Delta}^{1+\Delta} \psi_j(x) e^{-2\pi i\sigma x}dx \tag{14}$$

справедливы соотношения

$$J_j(\sigma) = \beta_j - \alpha_j \quad \textit{при } \sigma = 0, \tag{15}$$

$$J_j(\sigma) = \frac{\sin 2\pi\sigma\delta}{2\pi\sigma\delta} e^{-\pi i\sigma(\beta_j+\alpha_j)} \frac{\sin \pi\sigma(\beta_j - \alpha_j)}{\pi\sigma} \quad \textit{при } \sigma \neq 0. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть

$$J_{1j}(\sigma) = \int\limits_{\alpha_j-\delta}^{\beta_j+\delta} \psi_j(x) e^{-2\pi i\sigma x}dx.$$

Тогда $J_j(\sigma) = J_{1j}(\sigma)$, так как $\beta_j + \delta = \beta_j + \frac{\Delta}{2} \leqslant 1 + \Delta$, $\alpha_j - \delta = \alpha_j - \frac{\Delta}{2} \geqslant -1 - \Delta$ и $\psi_j(x) = 0$ при $x \notin (\alpha_j - \delta; \beta_j + \delta)$.

Далее имеем

$$J_{1j}(\sigma) = \int\limits_{\alpha_j-\delta}^{\beta_j+\delta} \psi_j(x) e^{-2\pi i\sigma x}dx =$$

$$= \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\alpha_j-\delta}^{\beta_j+\delta}\left(\int\limits_{-\delta}^{\delta} \psi_{0j}(x+z)dz\right) e^{-2\pi i\sigma x}dx = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\alpha_j-2\delta}^{\beta_j+2\delta} \psi_{0j}(z)\left(\int\limits_{\max(\alpha_j-\delta,z-\delta)}^{\min(\beta_j+\delta,z+\delta)} e^{-2\pi i\sigma x}dx\right)dz =$$

$$= \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j}\left(\int\limits_{\max(\alpha_j-\delta,z-\delta)}^{\min(\beta_j+\delta,z+\delta)} e^{-2\pi i\sigma x}dx\right)dz = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j}\left(\int\limits_{z-\delta}^{z+\delta} e^{-2\pi i\sigma x}dx\right)dz.$$

При $\sigma = 0$, очевидно, имеем $J_{1j}(\sigma) = \beta_j - \alpha_j$.

При $\sigma \neq 0$ получаем

$$J_{1j}(\sigma) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{e^{-2\pi i\sigma(z+\delta)} - e^{-2\pi i\sigma(z-\delta)}}{-2\pi i\sigma} dz = \frac{e^{2\pi i\sigma\delta} - e^{-2\pi i\sigma\delta}}{2\delta(2\pi i\sigma)}\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} e^{-2\pi i\sigma z} dz = \frac{\sin(2\pi\sigma\delta)}{2\delta\pi\sigma}\cdot$$

$$\cdot\frac{e^{-2\pi i\sigma\beta_j} - e^{-2\pi i\sigma\alpha_j}}{-2\pi i\sigma} = \frac{\sin(2\pi\sigma\delta)}{2\delta\pi\sigma} e^{-\pi i\sigma(\beta_j+\alpha_j)}\frac{\sin\pi\sigma(\beta_j-\alpha_j)}{\pi\sigma}$$

и лемма полностью доказана. □

Заметим, что

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{\sin 2\pi\sigma\delta}{2\pi\sigma\delta} e^{-\pi i\sigma(\beta+\alpha)}\frac{\sin\pi\sigma(\beta-\alpha)}{\pi\sigma} = \beta - \alpha. \tag{17}$$

В работе [3] доказана принципиальная лемма:

Лемма 5. *Пусть $\vec{x}_j$ — произвольный локальный минимум второго рода из $B(\Lambda)$. При $\alpha > 1$ для суммы*

$$R_\Lambda^{(\alpha)}(\vec{x}_j) = \sum_{\substack{\vec{y}\in\Lambda,\\ \overline{y_1}\geqslant\overline{x_{1\,j}},\ldots,\overline{y_s}\geqslant\overline{x_{s\,j}}}} \frac{1}{(\overline{y_1}\ldots\overline{y_s})^\alpha} \tag{18}$$

справедливо неравенство

$$R_\Lambda^{(\alpha)}(\vec{x}_j) \leqslant \frac{2^s\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^s}{(\overline{x_{1\,j}}\ldots\overline{x_{s\,j}})^\alpha}.$$

Рассмотрим сумму

$$R(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{1}{\det\Lambda}\sum_{\vec{x}\in\Lambda^*}\psi_1(x_1)\ldots\psi_s(x_s) - (\beta_1-\alpha_1)\ldots(\beta_s-\alpha_s), \tag{19}$$

тогда, применяя леммы 2 и 4, получим

$$R(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = {\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}'\prod_{j=1}^{s}\frac{\sin(\pi x_j\Delta)}{\Delta\pi x_j} e^{-\pi i x_j(\beta_j+\alpha_j)}\frac{\sin\pi x_j(\beta_j-\alpha_j)}{\pi x_j},$$

здесь при $x_j = 0$ неопределенность вида $\frac{0}{0}$ раскрывается с помощью равенства (17).

Пользуясь неравенством $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{\max(|x|,1)}$, получим

$$|R(\vec{\alpha},\vec{\beta})| \leqslant {\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}'\prod_{j=1}^{s}\frac{\beta_j-\alpha_j}{\overline{\Delta\pi x_j}\cdot\overline{\pi x_j(\beta_j-\alpha_j)}}.$$

Рассмотрим сумму, соответствующую локальному минимуму $\vec{x}_\nu$,

$$R(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_\nu) = {\sum_{\substack{\vec{y}\in\Lambda,\\ \overline{y_1}\geqslant\overline{x_{1\nu}},\ldots,\overline{y_s}\geqslant\overline{x_{s\nu}}}}}'\prod_{j=1}^{s}\frac{\beta_j-\alpha_j}{\overline{\Delta\pi y_j}\cdot\overline{\pi y_j(\beta_j-\alpha_j)}}$$

Следующая лемма является аналогом леммы 5 применительно к оценке $R(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_\nu)$.

Лемма 6. *Пусть $\vec{x}_\nu$ — произвольный локальный минимум второго рода из $B(\Lambda)$. Для суммы $R(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_\nu)$ справедливо неравенство*

$$R(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_\nu) \leqslant \frac{2^s}{\pi^s\overline{x_{1\nu}}\ldots\overline{x_{s\nu}}}\prod_{j=1}^{s}\left(\ln\left(\frac{\beta_j-\alpha_j}{\Delta}\right)+4\right).$$

Доказательство. Положим $\vec{x}'_\nu = (x'_{1\nu},\ldots,x'_{s\nu})$, где $x'_{j\nu} = \overline{x_{j\nu}}$ $(j = 1,\ldots,s)$. Будим использовать покоординатное умножение двух точек: $\vec{x}\cdot\vec{y} = (x_1\cdot\overline{y_1},\ldots,x_s\cdot\overline{y_s})$.

Проведем оценки сверху, разбивая область суммирования с помощью прямоугольных параллелепипедов $\Pi(\vec{a}\cdot\vec{x}'_\nu,\vec{x}_j)$ с $\vec{a}\in\mathbb{Z}^s$, $a_j\neq -1,0$ $(1\leqslant j\leqslant s)$:

$$R(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_\nu) = \sideset{}{'}\sum_{\substack{\vec{y}\in\Lambda,\\ \overline{y_1}\geqslant\overline{x_{1\nu}},\ldots,\overline{y_s}\geqslant\overline{x_{s\nu}}}}\prod_{j=1}^{s}\frac{\beta_j-\alpha_j}{\overline{\Delta\pi y_j}\cdot\overline{\pi y_j(\beta_j-\alpha_j)}} =$$

$$= \sum_{\substack{\vec{a}\in\mathbb{Z}^s,\\ a_\nu\neq -1,0\ (1\leqslant\nu\leqslant s)}}\ \sum_{\vec{y}\in\Pi(\vec{a}\cdot\vec{x}'_\nu,\vec{x}_\nu)}\prod_{j=1}^{s}\frac{\beta_j-\alpha_j}{\overline{\Delta\pi y_j}\cdot\overline{\pi y_j(\beta_j-\alpha_j)}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\vec{a}\in\mathbb{Z}^s,\\ a_\nu\neq -1,0\ (1\leqslant\nu\leqslant s)}} N_\Lambda(\vec{a}\cdot\vec{x}'_\nu,\vec{x}_\nu)\prod_{j=1}^{s}\frac{\beta_j-\alpha_j}{\overline{\Delta\pi\min(|a_j|,|a_j+1|)\overline{x_{j\nu}}}\cdot\overline{\pi(\beta_j-\alpha_j)\min(|a_j|,|a_j+1|)\overline{x_{j\nu}}}} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=1}^{s}\left(\sum_{a=-\infty}^{-2}\frac{\beta_j-\alpha_j}{\overline{\Delta\pi|a_j+1|\overline{x_{j\nu}}}\cdot\overline{\pi(\beta_j-\alpha_j)|a_j+1|\overline{x_{j\nu}}}}+\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\beta_j-\alpha_j}{\overline{\Delta\pi a_j\overline{x_{j\nu}}}\cdot\overline{\pi(\beta_j-\alpha_j)a_j\overline{x_{j\nu}}}}\right).$$

Рассмотрим сумму

$$S(\Delta,\overline{x}) = \sum_{a=-\infty}^{-2}\frac{1}{\overline{\Delta\pi|a+1|\overline{x}}\cdot\overline{\pi(\beta_j-\alpha_j)|a+1|\overline{x}}}+\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{\Delta\pi a\overline{x}}\cdot\overline{\pi(\beta_j-\alpha_j)a\overline{x}}} =$$

$$= 2\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{\Delta\pi a\overline{x}}\cdot\overline{\pi(\beta_j-\alpha_j)a\overline{x}}}.$$

Нетрудно видеть, что, так как $\Delta<\beta_j-\alpha_j$, то

$$S(\Delta,\overline{x}) = 2\left(\sum_{1\leqslant a<\frac{1}{(\beta_j-\alpha_j)\pi\overline{x}}}1+\sum_{\frac{1}{(\beta_j-\alpha_j)\pi\overline{x}}\leqslant a<\frac{1}{\Delta\pi\overline{x}}}\frac{1}{\pi(\beta_j-\alpha_j)a\overline{x}}+\sum_{a\geqslant\frac{1}{\Delta\pi\overline{x}}}\frac{1}{\Delta\pi^2(\beta_j-\alpha_j)a^2\overline{x}^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\frac{1}{(\beta_j-\alpha_j)\pi\overline{x}}+\frac{\ln\left(\frac{\beta_j-\alpha_j}{\Delta}\right)+1}{\pi(\beta_j-\alpha_j)\overline{x}}+\frac{1}{\pi^2\Delta(\beta_j-\alpha_j)\overline{x}^2}\int_{\frac{1}{\Delta\pi\overline{x}}}^{}\frac{2\left([a]-\left[\frac{1}{\Delta\pi\overline{x}}\right]\right)}{a^3}da\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi(\beta_j-\alpha_j)\overline{x}}\left(\ln\left(\frac{\beta_j-\alpha_j}{\Delta}\right)+4\right).$$

Отсюда следует, что

$$R(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_\nu) \leqslant \prod_{j=1}^{s}\frac{2}{\pi\overline{x_{j\nu}}}\left(\ln\left(\frac{\beta_j-\alpha_j}{\Delta}\right)+4\right) = \frac{2^s}{\pi^s\overline{x_{1\nu}}\ldots\overline{x_{s\nu}}}\prod_{j=1}^{s}\left(\ln\left(\frac{\beta_j-\alpha_j}{\Delta}\right)+4\right)$$

и лемма полностью доказана. □

Суммой Быковского называется выражение вида

$$SB_N(\Lambda)=\sum_{j=1}^{r^*}\frac{1}{\overline{x_{1\,j}}\ldots\overline{x_{s\,j}}}.$$

Назовём модифицированной суммой Быковского выражение вида

$$SB_N^*(\Lambda;\Delta)=\sum_{j=1}^{r^*}\frac{\prod_{j=1}^{s}\left(\ln\left(\frac{\beta_j-\alpha_j}{\Delta}\right)+4\right)}{\overline{x_{1\,j}}\ldots\overline{x_{s\,j}}}.$$

Лемма 7. *Пусть $\vec{x}_j=(x_{1\,j},\ldots,x_{s\,j})$ $(1\leqslant j\leqslant r)$ — все локальные минимумы из $B(\Lambda)$, причём $\vec{x}_j\in B^*(\Lambda)$ $\quad(j=1,\ldots,r^*)$ и $\vec{x}_{j+r^*}=-\vec{x}_j\in -B^*(\Lambda)$ $\quad(j=1,\ldots,r^*)$. Тогда справедливо неравенство*

$$|R(\vec{\alpha},\vec{\beta})|\leqslant\frac{2^s}{\pi^s}\cdot SB_N^*(\Lambda;\Delta). \tag{20}$$

Доказательство. Действительно,

$$|R(\vec{\alpha},\vec{\beta})|\leqslant\sum_{j=1}^{r^*}R(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_\nu)\leqslant\sum_{j=1}^{r^*}\frac{2^s}{\pi^s\overline{x_{1\nu}}\ldots\overline{x_{s\nu}}}\prod_{j=1}^{s}\left(\ln\left(\frac{\beta_j-\alpha_j}{\Delta}\right)+4\right)=\frac{2^s}{\pi^s}\cdot SB_N^*(\Lambda;\Delta).$$

□

3. Оценка отклонения

Следующие рассуждения являются видоизменением аналогичных из работы [5].

Лемма 8. *Пусть $\vec{\gamma}$ и $\vec{\omega}$ — две произвольные точки из s-мерного куба $[-1;1]^s$ такие, что $0\leqslant\omega_j-\gamma_j\leqslant 1$ $(j=1,\ldots,s)$ и $Z(\vec{\gamma},\vec{\omega})$ — количество точек решётки Λ^* в области $[\gamma_1;\omega_1)\times\ldots\times[\gamma_s;\omega_s)$. Тогда при $q(\Lambda)>1$ и $\det\Lambda>4$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned}Z(\vec{\gamma},\vec{\omega})&=(\det\Lambda)(\omega_1-\gamma_1)\cdot\ldots\cdot(\omega_s-\gamma_s)+\\&+\theta(\vec{\gamma},\vec{\omega})\left(\left(\frac{4}{\pi}\right)^s\det\Lambda\cdot(\ln(\det\Lambda+1)+4)^s\cdot SB_N(\Lambda)+4^s\right),\end{aligned}\tag{21}$$

где $|\theta(\vec{\gamma},\vec{\omega})|\leqslant 1$.

Доказательство. Пусть для $k=1,\ldots,s+1$

$$R_k=\sup_{\substack{2\Delta\leqslant\omega_j-\gamma_j\leqslant 1\,(j=1,\ldots,k-1),\\ 0\leqslant\omega_j-\gamma_j\leqslant 1\,(j=k,\ldots,s)}}|Z(\vec{\gamma},\vec{\omega})-(\det\Lambda)(\omega_1-\gamma_1)\cdot\ldots\cdot(\omega_s-\gamma_s)|; \tag{22}$$

$$Q_k=\sup_{\substack{2\Delta\leqslant\omega_j-\gamma_j\leqslant 1\,(j=1,\ldots,k-1),\\ 0\leqslant\omega_k-\gamma_k<2\Delta,\\ 0\leqslant\omega_j-\gamma_j\leqslant 1\,(j=k+1,\ldots,s)}}|Z(\vec{\gamma},\vec{\omega})-(\det\Lambda)(\omega_1-\gamma_1)\cdot\ldots\cdot(\omega_s-\gamma_s)| \tag{23}$$

и

$$R=\sup_{0\leqslant\omega_j-\gamma_j\leqslant 1\,(j=1,\ldots,s)}|Z(\vec{\gamma},\vec{\omega})-(\det\Lambda)(\omega_1-\gamma_1)\cdot\ldots\cdot(\omega_s-\gamma_s)|, \tag{24}$$

тогда

$$R=\max_{k=1,\ldots,s+1}R_k,\quad R_k=\max(Q_k,R_{k+1})\quad(k=1,\ldots,s). \tag{25}$$

Пусть $1 \leqslant k \leqslant s$ и для точек $\vec{\gamma}$ и $\vec{\omega}$ выполнены неравенства

$$\begin{cases} 2\Delta \leqslant \omega_j - \gamma_j \leqslant 1 & \text{при } (j = 1, \dots, k-1), \\ 0 \leqslant \omega_k - \gamma_k < 2\Delta & \\ 0 \leqslant \omega_j - \gamma_j \leqslant 1 & \text{при } (j = k+1, \dots, s). \end{cases} \tag{26}$$

Пусть $\vec{\gamma}_\nu = (\gamma_{1\,\nu}, \dots, \gamma_{s\,\nu})$, $\vec{\omega}_\nu = (\omega_{1\,\nu}, \dots, \omega_{s\,\nu})$ $(\nu = 1, 2)$ и $\gamma_{j\,\nu} = \gamma_j$, $\omega_{j\,\nu} = \omega_j$ $(j \neq k$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $\nu = 1, 2)$, а $\gamma_{k\,\nu}$ и $\omega_{k\,\nu}$ определены следующим образом:

1. Если $\gamma_k < 2\Delta - 1$, то $\gamma_{k\,1} = \gamma_k$, $\omega_{k\,1} = \omega_k + 2\Delta$, $\gamma_{k\,2} = \omega_k$, $\omega_{k\,2} = \omega_k + 2\Delta$;
2. Если $\gamma_k > 2\Delta - 1$, то $\gamma_{k\,1} = \gamma_k - 2\Delta$, $\omega_{k\,1} = \omega_k$, $\gamma_{k\,2} = \gamma_k - 2\Delta$, $\omega_{k\,2} = \gamma_k$.

Так как $\omega_{k\,\nu} - \gamma_{k\,\nu} \geqslant 2\Delta$ $(\nu = 1, 2)$, то

$$|Z(\vec{\gamma}_\nu, \vec{\omega}_\nu) - (\det \Lambda)(\omega_{1\,\nu} - \gamma_{1\,\nu}) \cdot \ldots \cdot (\omega_{s\,\nu} - \gamma_{s\,\nu})| \leqslant R_{k+1} \quad (\nu = 1, 2).$$

Из равенств

$$Z(\vec{\gamma}_1, \vec{\omega}_1) = Z(\vec{\gamma}, \vec{\omega}) + Z(\vec{\gamma}_2, \vec{\omega}_2), \quad \prod_{j=1}^{s} (\omega_{j\,1} - \gamma_{j\,1}) = \prod_{j=1}^{s} (\omega_j - \gamma_j) + \prod_{j=1}^{s} (\omega_{j\,2} - \gamma_{j\,2})$$

следует, что

$$|Z(\vec{\gamma}, \vec{\omega}) - (\det \Lambda)(\omega_1 - \gamma_1) \cdot \ldots \cdot (\omega_s - \gamma_s)| \leqslant 2R_{k+1}.$$

Отсюда вытекает, что $Q_k \leqslant 2R_{k+1}$ и, значит, $R_k \leqslant 2R_{k+1}$ $(k = 1, \dots, s)$, что влечет за собой неравенство $R \leqslant 2^s R_{s+1}$.

Пусть $\vec{\gamma}$ и $\vec{\omega}$ произвольные точки такие, что $2\Delta \leqslant \omega_j - \gamma_j$, $|\gamma_j|, |\omega_j| \leqslant 1$ $(j = 1, \dots, s)$. Положим $\vec{\alpha}_1 = (\alpha_{1\,1}, \dots, \alpha_{s\,1}) = \left(\gamma_1 + \frac{\Delta}{2}, \dots, \gamma_s + \frac{\Delta}{2}\right)$, $\vec{\beta}_1 = (\beta_{1\,1}, \dots, \beta_{s\,1}) = \left(\omega_1 - \frac{\Delta}{2}, \dots, \omega_s - \frac{\Delta}{2}\right)$, $\vec{\alpha}_2 = (\alpha_{1\,2}, \dots, \alpha_{s\,2}) = \left(\gamma_1 - \frac{\Delta}{2}, \dots, \gamma_s - \frac{\Delta}{2}\right)$, $\vec{\beta}_2 = (\beta_{1\,2}, \dots, \beta_{s\,2}) = \left(\omega_1 + \frac{\Delta}{2}, \dots, \omega_s + \frac{\Delta}{2}\right)$.

В силу леммы 3 и равенства (19) имеем:

$$(\det \Lambda)(R(\vec{\alpha}_1, \vec{\beta}_1) + (\beta_{1\,1} - \alpha_{1\,1}) \dots (\beta_{s\,1} - \alpha_{s\,1})) \leqslant Z(\vec{\gamma}, \vec{\omega}) \leqslant$$
$$\leqslant (\det \Lambda)(R(\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_2) + (\beta_{1\,2} - \alpha_{1\,2}) \dots (\beta_{s\,2} - \alpha_{s\,2})).$$

Отсюда следует, что

$$|Z(\vec{\gamma}, \vec{\omega}) - (\det \Lambda)(\omega_1 - \gamma_1) \cdot \ldots \cdot (\omega_s - \gamma_s)| \leqslant (\det \Lambda) \left(\max_{\nu=1,2} |R(\vec{\alpha}_\nu, \vec{\beta}_\nu)| + \right.$$
$$\left. + \max \left(\prod_{j=1}^{s} (\omega_j - \gamma_j) - \prod_{j=1}^{s} (\omega_j - \gamma_j - \Delta), \prod_{j=1}^{s} (\omega_j - \gamma_j + \Delta) - \prod_{j=1}^{s} (\omega_j - \gamma_j) \right) \right).$$

Так как $\Delta \leqslant \beta_{j\,\nu} - \alpha_{j\,\nu} \leqslant 1 + \Delta$, $-1 - \frac{\Delta}{2} \leqslant \alpha_{j\,\nu}, \beta_{j\,\nu} \leqslant 1 + \frac{\Delta}{2}$ $(j = 1, \dots, s; \nu = 1, 2)$, то применима лемма 7, из которой вытекает, что

$$|Z(\vec{\gamma}, \vec{\omega}) - (\det \Lambda)(\omega_1 - \gamma_1) \cdot \ldots \cdot (\omega_s - \gamma_s)| \leqslant \frac{2^s \det \Lambda}{\pi^s} SB_N^*(\Lambda; \Delta) +$$
$$+ (\det \Lambda) \max (1 - (1 - \Delta)^s, (1 + \Delta)^s - 1) \leqslant$$
$$\leqslant 2^s \det \Lambda \left(\frac{1}{\pi^s} SB_N^*(\Lambda; \Delta) + \Delta \right).$$

Из произвольности $\vec{\gamma}$ и $\vec{\omega}$ следует, что

$$R_{s+1} \leqslant 2^s (\det \Lambda) \left(\frac{1}{\pi^s} SB_N^*(\Lambda; \Delta) + \Delta \right)$$

и, значит,

$$R \leqslant 4^s(\det\Lambda)\left(\frac{1}{\pi^s}SB_N^*(\Lambda;\Delta)+\Delta\right).$$

Полагая $\Delta=\frac{1}{\det\Lambda}$, получим $\Delta<0,25$, $SB_N^*(\Lambda;\Delta)\leqslant(\ln(\det\Lambda+1)+4)^s SB_N(\Lambda)$ и

$$R \leqslant 4^s(\det\Lambda)\left(\frac{(\ln(\det\Lambda+1)+4)^s}{\pi^s}\sum_{j=1}^{r^*}\frac{1}{\overline{x_{1\,j}}\ldots\overline{x_{s\,j}}}+\frac{1}{\det\Lambda}\right)$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Пусть для решётки Λ справедливы неравенства $q(\Lambda)>1$, $\det\Lambda>4$, тогда для отклонения обобщённой параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ решётки Λ справедливо неравенство*

$$D_s(N)\leqslant 2\cdot 4^s(\det\Lambda)\left(\frac{(\ln(\det\Lambda+1)+4)^s}{\pi^s}\sum_{j=1}^{r^*}\frac{1}{\overline{x_{1\,j}}\ldots\overline{x_{s\,j}}}+\frac{1}{\det\Lambda}\right), \tag{27}$$

$$N=\det\Lambda+\theta(\Lambda)4^s(\det\Lambda)\left(\frac{(\ln(\det\Lambda+1)+4)^s}{\pi^s}\sum_{j=1}^{r^*}\frac{1}{\overline{x_{1\,j}}\ldots\overline{x_{s\,j}}}+\frac{1}{\det\Lambda}\right), \tag{28}$$

где N — количество точек сетки $M(\Lambda)$ и $|\theta(\Lambda)|\leqslant 1$.

Доказательство. По определению отклонения

$$D_s(N)=\sup_{\vec{\omega}\in G_s}|Z(\vec{0},\vec{\omega})-N\omega_1\ldots\omega_s|.$$

Так как $N=Z(\vec{0},\vec{1})$, то применяя леммы 7 и 8, находим

$$D_s(N)\leqslant\sup_{\vec{\omega}\in G_s}|Z(\vec{0},\vec{\omega})-(\det\Lambda)\omega_1\ldots\omega_s|+|N-\det\Lambda|\leqslant$$
$$\leqslant 2\cdot 4^s(\det\Lambda)\left(\frac{(\ln(\det\Lambda+1)+4)^s}{\pi^s}\sum_{j=1}^{r^*}\frac{1}{\overline{x_{1\,j}}\ldots\overline{x_{s\,j}}}+\frac{1}{\det\Lambda}\right),$$
$$|N-\det\Lambda|\leqslant 4^s(\det\Lambda)\left(\frac{(\ln(\det\Lambda+1)+4)^s}{\pi^s}\sum_{j=1}^{r^*}\frac{1}{\overline{x_{1\,j}}\ldots\overline{x_{s\,j}}}+\frac{1}{\det\Lambda}\right)$$

что и требовалось доказать. □

4. Заключение

Оценки теоремы 2, по-видимому, можно усилить, так как суммы, задающие величины $R(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_\nu)$ имеют бесконечные области пересечения. На наш взгляд, перспективно для улучшения этой оценки использовать подходы из работы [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.

2. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.

3. О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.

4. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6090–84.

5. Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6089–84.

6. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Конечное отклонение и основная мера качества для сеток Коробова // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 2, С. 56–73.

7. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Пихтильков С. А., Родионова О. В., Устян А. Е. Об одном алгоритме поиска оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. Тула, 1999. С. 51–71.

8. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Теория приближений и гармонический анализ: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1998.

9. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 3. Тула, 1999. С. 38–51.

10. Н. М. Добровольский, Н. М. Коробов. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сб., 2002, Т. 3, вып. 1, С. 41–48.

11. А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 168–182.

12. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

13. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.

14. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

15. Михляева А. В. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.

16. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 307–312.

17. Серегина Н. К. Алгоритмы численного интегрирования с правилом остановки // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 193 — 201.

18. Серегина Н. К. О количественной мере качества оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Естественные науки. Вып. 1, 2015. С. 22–29.

REFERENCES

1. Bakhvalov, N.S. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 3–18.

2. Bykovskij, V.A 2002, "On the error of number-theoretic quadrature formulas", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 27–33.

3. O. A. Gorkusha, N. M. Dobrovolsky, 2005, "On estimates of hyperbolic zeta function of lattices" // Chebyshevsky Collection, vol. 6, issue 2(14), pp. 130-138.

4. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", Dep. v VINITI, no. 6090–84.

5. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids", Dep. v VINITI, no. 6089–84.

6. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "The final deviation and the main quality measure for Korob ov grids Chebyshevskii sbornik, vol. 23, no. 2, pp. 56–73.

7. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R., Pikhtil'kov, S.A., Rodionova, O.V. & Ustyan, A.E. 1999, "On a single algorithm for finding optimal coefficients", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 1, pp. 51–71.

8. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, "On a recursive algorithm for lattices", Teoriya priblizhenij i garmonicheskij analiz: Tezisy doklada Mezhdunarodnoj konferentsii (Approximation theory and harmonic analysis: proceedings of the International conference), Tula, Russia.

9. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, "On a recursive algorithm for lattices", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 3, pp. 38–51.

10. Dobrovol'skii, N. M. & Korobov, N. M. 2002, "On the error estimation of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 1(3), pp. 41–48.

11. A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "On the hyp erb olic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons", Chebyshevskii sbornik, vol. 22, no. 4, pp. 168–182.

12. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 19–25.

13. Korobov, N.M. 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.

14. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

15. Mikhlyaeva, A. V., 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.

16. Mikhlyaeva, A. V., 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 307–312.

17. Seregina N. K., 2013, "Algorithms of numerical integration with the stopping rule" , *TulSU extraction. Natural sciences.* Issue 3. pp. 193 — 201.

18. Seregina N. K., 2015, "On the quantitative measure of the quality of optimal coefficients" , *Izvestiya TulSU. Natural sciences.* Issue 1, pp. 22–29.

Получено: 21.04.2023
Принято в печать: 14.06.2023