ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 517.948 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-197-213

Коэрцитивные оценки, разделимость и коэрцитивная разрешимость нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений недивергентного вида

О. Х. Каримов, З. Дж. Хакимова

Каримов Олимджон Худойбердиевич — доктор физико-математических наук, Институт математики им. А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана (г. Душанбе).
e-mail: karimov_olim72@mail.ru
Хакимова Зумрат Джамшедовна — кандидат физико-математических наук, Институт математики им. А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана (г. Душанбе).
e-mail: zumrat@mail.ru

Аннотация

Работа посвящена установлению коэрцитивных оценок и доказательств теорем разделимости для нелинейного эллиптического дифференциального оператора недивергентного вида в весовом пространстве. На основе полученных коэрцитивных оценок исследуется коэрцитивная разрешимость нелинейного эллиптического дифференциального оператора второго порядка в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$. Проблемой "разделимости дифференциальных выражений"впервые занимались математики В.Н.Эверитт и М.Гирц. Они подробно изучали разделимость оператора Штурма-Лиувилля. Дальнейшее развитие этой теории принадлежит К.Х.Бойматову, М.Отелбаеву и их ученикам. Основная часть опубликованных работ по этой теории относится к линейным операторам. Существуют лишь отдельные работы, в которых рассматриваются нелинейные дифференциальные операторы, представляющие собой слабые нелинейные возмущения линейных операторов. Случай, когда исследуемый оператор нелинейный, т.е. его нельзя представить в виде слабого возмущения линейного оператора, рассмотрен лишь в некоторых отдельных работах. Полученные здесь результаты также относятся к этому малоизученному случаю. В работе исследованы коэрцитивные свойства нелинейного эллиптического дифференциального оператора недивергентного вида

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + V(x,u)u(x),$$

в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$, и на основе коэрцитивных оценок доказана его разделимость в этом пространстве. На основе разделимости рассматриваемого эллиптического оператора недивергентного вида исследуется коэрцитивная разрешимость нелинейного эллиптического дифференциального уравнения в весовом гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Ключевые слова: Эллиптический оператор, недивергентный вид оператора, коэрцитивные свойства, нелинейность, разделимость, разрешимость, гильбертово пространство, весовое пространство.

Библиография: 21 названия.

Для цитирования:
О. Х. Каримов, З. Дж. Хакимова, Коэрцитивные оценки, разделимость и коэрцитивная разрешимость нелинейных эллиптических дифференциальных операторов недивергентного вида // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 197–213.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 2.

UDC 517.948 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-197-213

Coercive estimates, separability and coercive solvability of a nonlinear elliptic differential operator in a weight space

O. Kh. Karimov, Z. Zh. Hakimova

Karimov Olimjon Khudoyberdievich — doctor of physical and mathematical sciences, A. Juraev Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Tajikistan (Dushanbe).
e-mail: karimov_olim72@mail.ru

Hakimova Zumrat Jamshedovna — candidate of physical and mathematical sciences, A. Juraev Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Tajikistan (Dushanbe).
e-mail: zumrat@mail.ru

Abstract

The work is devoted to establishing coercive estimates and proofs of separability theorems for a nonlinear elliptic differential operator of non-divergence form in a weighted space. On the basis of the obtained coercive estimates, the coercive solvability of a nonlinear elliptic differential second-order operator in the space $L_{2,\rho}(R^n)$ is investigated. The problem of "separability of differential expressions"was first studied by mathematicians V.N.Everitt and M. Girtz. They studied in detail the separability of the Sturm-Liouville operator. Further development of this theory belongs to K.H.Boymatov, M. Otelbaev and their students. Most of the published works on this theory relate to linear operators. There are only some papers that consider nonlinear differential operators, which are weak nonlinear perturbations of linear operators. The case when the operator under study is nonlinear, i.e. it cannot be represented as a weak perturbation of a linear operator, is considered only in some separate papers. The results obtained here also relate to this little-studied case. In this work, the coercive properties of a non-divergence nonlinear elliptic differential operator are studied

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + V(x,u)u(x),$$

in the weight space $L_{2,\rho}(R^n)$ and on the basis of coercive estimates, its separability in this space is proved. Based on the separability of the considered elliptic operator of nondivergent form, we study the coercive solvability of a nonlinear elliptic differential equation in a weighted Hilbert space $L_{2,\rho}(R^n)$.

Keywords: Elliptic operator, non-divergent type of operator, coercive estimates, nonlinearity, separability, solvability, Hilbert space,weight space.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

O. Kh. Karimov, Z. Zh. Hakimova, 2023, “Coercive estimates, separability and coercive solvability of a nonlinear elliptic differential operator in a weight space” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 197–213.

1. Введение

В работе исследуется разделимость нелинейного эллиптического дифференциального оператора недивергентного вида

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + V(x,u)u,$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$.

Установлены соответствующие неравенства коэрцитивности для оператора $L[u]$, и получены новые достаточные условия разделимости этого эллиптического оператора в весовом гильбертовом пространстве. На основе полученных результатов по разделимости и коэрцитивных оценок изучается коэрцитивная разрешимость эллиптического дифференциального уравнения в весовом гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Основы теории "разделимости дифференциальных операторов"заложены в работах В.Н. Эверитта и М.Гирца, опубликованных в начале семидесятых годов прошлого столетия. В статьях [1]–[4] был получен ряд важных результатов относительно проблемы разделимости оператора Штурма-Лиувилля. Дальнейшее развитие этой теории принадлежит К.Х.Бойматову, М.Отелбаеву и их ученикам (см.[5]–[11] и имеющуюся там библиографию). Условия разрешимости нелинейных уравнений Шредингера и Дирака рассмотрены в [6]. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка рассматривалась в [11]. В публикациях [12]-[15] и [20] изучаются разделимость и разрешимость бигармонического и трижды гармонического операторов, операторов Шредингера и Лапласа-Бельтрами. Разделимость и коэрцитивные свойства строго нелинейных операторов рассматривались в работах [5], [17]-[19],[21].

Разделимость дифференциальных выражений с частными производными впервые исследовалась в статье К.Х.Бойматова [5]. Разделимость линейного эллиптического дифференциального оператора второго порядка

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + V(x)u(x),$$

ранее изучалась в работе [15] и [16]. Данная работа обобщает результаты работ [15] и [16] на нелинейный случай и случай весового пространства.

2. Формулировка основного результата

Введем пространство $L_{2,\rho}(R^n)$ с конечной нормой

$$\|u; L_{2,\rho}(R^n)\| = \left\{\int_{R^n} \rho(x)|u(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\rho(x) \in C^1(R^n)$ - положительная функция.

Пространство $L_{2,\rho}(R^n)$ является гильбертовым пространством, и в нём скалярное произведение определяется с помощью равенства

$$(u, v; L_{2,\rho}(R^n)) = \int_{R^n} \rho(x)u(x)\overline{v(x)}dx.$$

В пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + V(x,u)u(x) = f(x), \quad u(x) \in W^2_{2,loc}(R^n), \tag{1}$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, а $V(x,z)$ -положительная функция.

Определение 1. *Уравнение (1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор) называются разделимыми в $L_{2,\rho}(R^n)$, если*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad V(x,u(x))u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$$

для всех $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$ таких, что $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$.

В дальнейшем предположим, что $V(x,z) \in C^1(R^n \times \mathbb{C})$. Для формулировки основного результата введем функции

$$F(x,\xi,\eta) = V^{\frac{1}{2}}(x,z),\ \xi = Rez,\ \eta = Imz,$$

$$Q(x,\xi,\eta) = V(x,z),\ \xi = Rez,\ \eta = Imz.$$

Пусть для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ функция $F(x,\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям

$$\left\| a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F^{-1}\right\|^2 \le \sigma_1, \tag{2}$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}F^{-1}\right\|^2 \le \sigma_2, \tag{3}$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}F^{-\frac{3}{2}}\right\|^2 \leqslant \sigma_3, \tag{4}$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}(\frac{\partial F}{\partial \xi}\mu + \nu\frac{\partial F}{\partial \eta})\omega;\mathbb{C}\right\| \le \delta_1 \left\| F^{\frac{1}{2}}\Omega;\mathbb{C}\right\|. \tag{5}$$

Также предполагается, что для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ выполнены неравенства

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-1}\frac{\partial Q}{\partial x_i}F^{-2}\right\|^2 \leqslant \sigma_4, \tag{6}$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-1}(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\mu + \nu\frac{\partial Q}{\partial \eta})\omega;\mathbb{C}\right\| \le \delta_2 \left\| F\Omega;\mathbb{C}\right\|. \tag{7}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (2) –(7) и пусть числа σ_j, $(j = \overline{1,4})$, δ_1, δ_2 такие, что*

$$\sigma_1 + \sigma_2 < \frac{4}{3n^2},\ \frac{2}{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)} < 1 - \delta_1,\ \frac{2}{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)} < 1 - \delta_2 \tag{8}$$

Тогда уравнение (1) разделяется в $L_{2,\rho}(R^n)$, и для всех функций $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$ таких, что $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$, справедливы включения

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad V(x,u(x))u(x) \in L_{2,\rho}(R^n),$$

$$a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_{2,\rho}(R^n), i = 1,2,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\left\| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n) \right\| + \|V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\| +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n) \right\| \leq M \|f(x); L_{2,\rho}(R^n)\|, \qquad (9)$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

3. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Пусть в уравнении (1) функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_{2,\rho}(R^n)$, и функция $u(x)$ принадлежит классу $L_{2,\rho}(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$. Тогда функции $V^{\frac{1}{2}} u(x)$, $a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_{2,\rho}(R^n)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$ - фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|x| < 1$. Для любого положительного числа ε принимаем $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$.

Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon u \rangle = \langle - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon u \rangle + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon u \rangle,$$

после интегрирования по частям, имея в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\rho\varphi_\varepsilon u) = \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\varphi_\varepsilon u + a_{ij}(x)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon u + a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}u + a_{ij}(x)\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

получим

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon u \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\varphi_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle + J_1^\varepsilon(u) + J_2^\varepsilon(u) + J_3^\varepsilon(u) + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon u \rangle, \qquad (10)$$

где

$$J_1^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}u \rangle,$$

$$J_2^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\varphi_\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial x_i}u \rangle,$$

$$J_3^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\varphi_\varepsilon u \rangle,$$

Преобразуем функционал $J_1^\varepsilon(u)$ к виду

$$Re J_1^\varepsilon(u) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \langle u, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u \rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \langle u, \frac{\partial \rho}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u \rangle - \right. \qquad (11)$$

$$\left. - \sum_{i,j=1}^{n} \langle u, \rho\frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}a_{ij}(x)u \rangle \right).$$

Так как функция φ_ε - вещественно-значная и

$$\left|\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right| \le M_1\varepsilon, \quad \left|\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial x_j\partial x_i}\right| \le M_0\varepsilon^2, \forall x \in R^n,$$

где

$$M_1 = sup|\nabla\varphi_\varepsilon(x)|,\ M_0 = sup|\Delta\varphi_\varepsilon(x)|,$$

тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} ReJ_1^\varepsilon(u) = 0.$$

Далее поочередно оценивая абсолютные значения функционалов $J_m^\varepsilon(u),\ m = 2,3$, применяя неравенство Коши-Буняковского, учитывая, что для любого $\alpha > 0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$y_1y_2 \le \frac{\alpha}{2}|y_1|^2 + \frac{1}{2\alpha}|y_2|^2,$$

имея в виду неравенства (2) и (3), из равенства (10) получим следующие оценки:

$$|J_2^\varepsilon(u)| \le \frac{\alpha_1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}a_{ij}^{\frac12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_2}{2\alpha_1}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac12}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2, \qquad (12)$$

$$|J_3^\varepsilon(u)| \le \frac{\alpha_1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}a_{ij}^{\frac12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_1}{2\alpha_1}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac12}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2. \qquad (13)$$

Имея ввиду эти оценки, из равенства (10), переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, учитывая неравенство Коши-Буняковского, находим

$$\mathrm{Re}\,\langle f,u\rangle \ge (1-\alpha_1)\sum_{i,j=1}^n \left\|a_{ij}^{\frac12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + (1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2)}{2\alpha_1})\langle V(x,u)u,u\rangle,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (2) –(5) и пусть функция $u(x)$ из класса $L_{2,\rho}(R^n)\cap$ $\cap W_{2,loc}^2(R^n)$ является решением уравнения (1) с правой частью $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$. Тогда функции*

$$F^{\frac32}(x,u(x))u(x),\ a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}(x,u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j},\ j = 1,\ldots,n,$$

принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)$.

Доказательство. Пусть функция $\varphi_\varepsilon(x)$ такая же, как в доказательстве леммы 1. Очевидно, что

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle = \langle -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle.$$

Отсюда, интегрируя по частям, учитывая равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)F(x,u)u) = \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)F(x,u)u + \rho\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}a_{ij}(x)F(x,u)u + \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F(x,u)u+$$
$$+\rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)\frac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}u + \rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)(\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial\xi} + \mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial\eta})u + \rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)F\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + G_1^{(\varepsilon)}(u) + G_2^{(\varepsilon)}(u) + \tag{14}$$

$$+ G_3^{(\varepsilon)}(u) + G_4^{(\varepsilon)}(u) + G_5^{(\varepsilon)}(u) + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle,$$

где

$$G_1^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}F(x,u)u\rangle,$$

$$G_2^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon(\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial\xi} + \mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial\eta})u\rangle,$$

$$G_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial F}{\partial x_i}u\rangle,$$

$$G_4^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle,$$

$$G_5^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F(x,u)u\rangle.$$

Здесь и далее значения $F(x,u)$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial\xi}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial\eta}$ взяты в точке

$$(x_1, \ldots, x_n, \mathrm{Re}\,u(x), \mathrm{Im}\,u(x)).$$

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов, находим, что в силу леммы 1 функционал $G_1^\varepsilon(u)\to 0$ при $\varepsilon\to 0:$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} ReG_1^\varepsilon(u) = 0. \tag{15}$$

Относительно функционалов $G_m^\varepsilon(u),\ m=\overline{2,5}$, учитывая, что для любого $\alpha>0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$y_1y_2 \le \frac{\alpha}{2}|y_1|^2 + \frac{1}{2\alpha}|y_2|^2,$$

получаем следующие оценки:

$$|G_2^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial F}{\partial\xi}\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u + \frac{\partial F}{\partial\eta}\mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u\rangle| \le \delta_1\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2,$$

$$|G_3^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial F}{\partial x_i}u\rangle| \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2\beta}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{-\frac12}\frac{\partial F}{\partial x_i}u\right\|^2\right\} \le$$

$$\le \frac{\beta}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_3}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F^{\frac32}u\|^2,$$

$$|G_4^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x_i} Fu\rangle| \le$$
$$\le \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\beta}{2} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{1}{2\beta} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} V^{-\frac12} u \right\|^2 \right\} \le$$
$$\le \frac{\beta}{2} \sum_{i,j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n^2\sigma_2}{2\beta} \|\varphi_\varepsilon^{\frac12} F^{\frac32} u\|^2,$$

$$|G_5^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}^{-\frac12}(x) \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \varphi_\varepsilon F^{\frac12} u\rangle| \le$$
$$\le \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\beta}{2} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{1}{2\beta} \|\varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{-\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} F^{-\frac32} F^{\frac32} u\|^2 \right\} \le$$
$$\le \frac{\beta}{2} \sum_{i,j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n^2\sigma_1}{2\beta} \|\varphi_\varepsilon^{\frac12} F^{\frac32} u\|^2,$$

Здесь β– произвольное положительное число; σ_1, σ_2, σ_3 и δ_1 - константы из условий (2) – (5). На основе полученных оценок из равенства (14) имеем

$$|\langle f, \rho\varphi_\varepsilon Fu)\rangle| \ge \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}{2\beta}\right) \cdot \langle Vu, \varphi_\varepsilon Fu\rangle - |G_1^\varepsilon(u)| +$$
$$+ (1 - \frac32\beta - \delta_1) \cdot \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2.$$

Далее применяем неравенство Коши-Буняковского и затем, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\|f; L_{2,\rho}(R^n)\| \|Fu; L_{2,\rho}(R^n)\| \ge |(f, Fu)| \ge \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}{2\beta}\right) \cdot (Vu, Fu) +$$
$$+ \left(1 - \frac32\beta - \delta_1\right) \cdot \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n) \right\|^2. \tag{16}$$

Теперь подбираем положительное число β так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}{2\beta} < 1, \quad 3\beta + 2\delta_1 < 1.$$

Так как по лемме 1 $Fu \in L_{2,\rho}(R^n)$, то из неравенства (16) следует, что функции $a_{ij}(x)^{\frac12}(x) F^{\frac12} \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $F^{\frac32} u$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)$.

Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1

Переходим к непосредственному доказательству теоремы 1. Поступая так же, как и выше, из равенства

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta)u\rangle = \langle -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta)u\rangle + \langle V(x,u)u(x), \rho\varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta)u\rangle$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon(x)Q(x,u)u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon Q(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + B_1^{(\varepsilon)}(u) + B_2^{(\varepsilon)}(u) + \tag{17}$$

$$+ B_3^{(\varepsilon)}(u) + B_4^{(\varepsilon)}(u) + B_5^{(\varepsilon)}(u) + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon(x)Q(x,u)u\rangle,$$

где

$$B_1^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}Q(x,u)u\rangle,$$

$$B_2^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon(\operatorname{Re}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial Q(x,u)}{\partial\xi} + \operatorname{Im}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial Q(x,u)}{\partial\eta})u\rangle,$$

$$B_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\rangle,$$

$$B_4^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon Q(x,u)u\rangle,$$

$$B_5^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}Q(x,u)u\rangle.$$

Здесь и далее значения $F(x,u)$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial\xi}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial\eta}$ взяты в точке

$$(x_1, \ldots, x_n, \operatorname{Re}u(x), \operatorname{Im}u(x)).$$

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов $B_j^\varepsilon(u)$, $j = \overline{1, 5}$, находим, что функционал $B_1^\varepsilon(u) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Относительно функционалов $B_m^\varepsilon(u)$, $m = \overline{2,5}$ получаем следующие оценки:

$$|B_2^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial\xi}\operatorname{Re}\frac{\partial u}{\partial x_i}u + \frac{\partial Q}{\partial\eta}\operatorname{Im}\frac{\partial u}{\partial x_i}u\rangle| \le \delta_2\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2,$$

$$|B_3^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\rangle| \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta_1}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2\beta_1}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{-\frac12}\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\right\|^2\right\} \le$$

$$\le \frac{\beta_1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_4}{2\beta_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}Vu\|^2,$$

$$|B_4^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial x_i}Qu\rangle| \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta_1}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2\beta_1}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}V^{-\frac12}u\right\|^2\right\} \le$$

$$\le \frac{\beta_1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_2}{2\beta_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}Vu\|^2,$$

$$|B_5^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon V^{\frac{1}{2}}u\rangle| \le$$
$$\le \sum_{i,j=1}^n \left\{\frac{\beta_1}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}V^{-1}Vu\|^2\right\} \le$$
$$\le \frac{\beta_1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_1}{2\beta_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}Vu\|^2,$$

Здесь β_1– произвольное положительное число; σ_1, σ_2, σ_4 и δ_2 – константы из условий (2), (3), (6) и (7).

На основе полученных оценок из равенства (17) имеем

$$|\langle f, \varphi_\varepsilon Vu)\rangle| \ge \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4}{2\beta_1}\right)\cdot\langle Vu, \varphi_\varepsilon Vu\rangle - |B_1^\varepsilon(u)| +$$
$$+\cdot\left(1 - \frac{3}{2}\beta_1 - \delta_2\right)\cdot\sum_{j=1}^n\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и затем переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\|f; L_{2,\rho}(R^n)\|\|Vu; L_{2,\rho}(R^n)\| \ge |(f, Vu)| \ge \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)}{2\beta_1}\right)\cdot(Vu, Vu) +$$
$$+\left(1 - \frac{3}{2}\beta_1 - \delta_2\right)\cdot\sum_{j=1}^n\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2. \tag{18}$$

Далее подбираем положительное число β_1 так,чтобы выполнялись условия

$$\frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)}{2\beta_1} < 1, \quad 3\beta_1 + 2\delta_2 < 1.$$

Теперь из полученных неравенств после несложных преобразований имеем коэрцитивное неравенство (9). Из него следует разделимость нелинейного оператора (1) в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Теорема 1 полностью доказана.

5. Разрешимость

С помощью теоремы 1 докажем следующие результаты о коэрцитивной разрешимости уравнения 1.

Теорема 2. *Пусть дифференциальный оператор*

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + Vu$$

разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$, и пусть положительная функция $\phi(x)$, принадлежащая в $C^1(R^n)$, удовлетворяет неравенствам

$$\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right\|^2 \le \theta_1, \tag{19}$$

где $0 < \theta_1 + \sigma_1 + \sigma_2 < \frac{1}{n^2}$. *Тогда уравнение (1) для всех* $f \in L_{2,\rho}(R^n)$ *имеет единственное решение в пространстве* $L_{2,\rho}(R^n)$.

Доказательство. Сначала докажем, что дифференциальное уравнение

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + Vu = 0 \tag{20}$$

имеет нулевое решение $u(x) = 0$ для всех $x \in R^n$. Пусть $\psi(x)$ - произвольная положительная функция из $C^2(R^n)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned}
\langle Vu,\rho\phi\psi u\rangle &= \langle \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \rho\phi\psi u\rangle = \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ij}(x)\rho\phi\psi u]\rangle = \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\phi\psi u\rangle - \sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\phi\psi u\rangle - \sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle - \\
&- \sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle - \sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\phi\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle.
\end{aligned} \tag{21}$$

Теперь выделяем реальную часть скалярного произведения

$$\begin{aligned}
Re\langle Vu,\rho\phi\psi u\rangle &= -Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\phi\psi u\rangle - Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\phi\psi u\rangle - \\
&- Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle - Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle - \\
&- Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\phi\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle.
\end{aligned} \tag{22}$$

Имея в виду, что

$$\begin{aligned}
&2Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left\| \left[\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi + \frac{a_{ij}(x)}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi + a_{ij}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + a_{ij}(x)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i}\phi\right]^{\frac{1}{2}} u; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2,
\end{aligned} \tag{23}$$

и применяя неравенства Коши-Буняковского, получим

$$\begin{aligned}
&Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle = \\
&\qquad = Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle \rho^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i})V^{\frac{1}{2}}u\rangle \le \\
&\qquad \le \sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i})V^{\frac{1}{2}}u\|,
\end{aligned} \tag{24}$$

$$Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\phi\psi u\rangle =$$
$$= Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\rho^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}V^{-\frac{1}{2}})V^{\frac{1}{2}}u\rangle \leq$$
$$\leq \sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}[a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}V^{-\frac{1}{2}}]V^{\frac{1}{2}}u\|, \tag{25}$$

$$Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\phi\psi u)\rangle =$$
$$= Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\rho^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}[a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}V^{-\frac{1}{2}}]V^{\frac{1}{2}}u\rangle \leq$$
$$\leq \sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}[a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}V^{-\frac{1}{2}}]V^{\frac{1}{2}}u\|. \tag{26}$$

Учитывая, что для любого $\alpha > 0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$y_1y_2 \leq \frac{\alpha}{2}|y_1|^2 + \frac{1}{2\alpha}|y_2|^2,$$

имеем

$$- Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\phi\psi u]\rangle \leq$$
$$\leqslant \frac{\alpha_2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2 + \frac{n^2\theta_1}{2\alpha_2}\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u\|^2, \tag{27}$$

$$-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle \leq \sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}[a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i})]V^{\frac{1}{2}}u\| \leq$$
$$\leq \frac{n\alpha_2}{2}\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2 + \frac{n^2\sigma_1}{2\alpha_2}\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u\|^2, \tag{28}$$

$$-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\phi\psi u)\rangle =$$
$$\leq \sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}[a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}Q^{-\frac{1}{2}}]V^{\frac{1}{2}}u\|$$
$$\leqslant \frac{\alpha_2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2 + \frac{n^2\sigma_2}{2\alpha_2}\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u\|^2. \tag{29}$$

Применяя далее для равенства (22) неравенства (27)-(29), получим

$$
\begin{aligned}
&(1-\frac{n^2(\theta_1+\sigma_1+\sigma_2)}{2\alpha_2})\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u\|^2 \le \\
&\le \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\left[\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi+\frac{a_{ij}(x)}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi+a_{ij}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}+a_{ij}(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_i}\phi\right]^{\frac{1}{2}}u;L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2+ \\
&+\frac{3}{2}\alpha_2\cdot\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n\|^2-\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n\|^2. \qquad (30)
\end{aligned}
$$

Пусть $\psi(x)\equiv 1$ для любых $x\in R^n$ и $\alpha_2=\frac{2}{3}$, тогда имеем

$$0<(1-(n^2(\theta_1+\sigma_1+\sigma_2)\|\phi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u;L_{2,\rho}(R^n\|^2\le 0. \qquad (31)$$

Следовательно, получим

$$0<(1-n^2(\theta_1+\sigma_1+\sigma_2)\int_{R^n}|\rho^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u|^2dx\le 0. \qquad (32)$$

Последнее неравенство имеет место только при $u(x)\equiv 0$. Это доказывает, что $u(x)=0$ является единственным решением уравнения (20).

Пусть далее $u(x)\in L_{2,\rho}(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$ и является решением уравнения

$$L[u]=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+Vu=f(x) \qquad (33)$$

с правой частью $f(x)\in L_{2,\rho}(R^n)$. Теперь выберем последовательность функций $f_1,f_2,\dots,$ $f_n\in C_0^\infty(R^n)$, сходящихся к f в $L_{2,\rho}(R^n)$. Положим $\vartheta_p=A^{-1}f_p$, где A-означает замыкание оператора $\acute{A}=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+V$, $D(\acute{A}=C_0^\infty(R^n))$ в $L_{2,\rho}(R^n)$. Функция $\vartheta_p\in C^1(R^n)$ и является решением уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2\vartheta_p}{\partial x_i\partial x_j}+V\vartheta_p=f_p.$$

Используя коэрцитивное неравенство (9), находим, что

$$
\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2(\vartheta_p-\vartheta_k)}{\partial x_i\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n)\right\|+\|V(\vartheta_p-\vartheta_k);L_{2,\rho}(R^n)\|+ \\
&+\sum_{i,j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial(\vartheta_p-\vartheta_k)}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n)\right\|\le M\|f_p-f_k;L_{2,\rho}(R^n)\|. \qquad (34)
\end{aligned}
$$

Переходя к пределу $p,\ k\to\infty$, заключаем, что последовательности

$$\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,V\vartheta_1,V\vartheta_2,\dots,a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_j},\quad a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_j},\dots,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2(\vartheta_1)}{\partial x_i\partial x_j},\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2(\vartheta_2)}{\partial x_i\partial x_j},$$

будучи фундаментальными, сходятся в $L_{2,\rho}(R^n)$ соответственно к некоторым элементам $\vartheta, \vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \vartheta^{(3)} \in L_{2,\rho}(R^n)$. Легко проверить, что $\vartheta \in W^2_{2,loc}(R^n)$, $\vartheta^{(1)} = V\vartheta$,

$$\vartheta^{(2)} = a^{\frac{1}{2}}_{ij}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}, \ \vartheta^{(3)} = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}.$$

Переходя в неравенстве (34) к пределу при $p, \ k \to \infty$, получим $\vartheta_p = \vartheta_k = \vartheta$. Следовательно, для $f \in R^n$ таких, что $u \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$, $Au = f$.

Пусть u_1 тоже является решением уравнения $Au = f$. Тогда имеем

$$A(u - u_1) = 0.$$

Так как уравнение $Au = 0$ имеет единственное решение $u = 0$, отсюда следует, что $u = u_1$, т.е. теорема полностью доказана.

6. Заключение

В работе установлены коэрцитивные оценки для нелинейного эллиптического дифференциального оператора недивергентного вида (1). Найдены достаточные условия разделимости оператора в весовом гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$. Изучена коэрцитивная разрешимость нелинейного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка недивергентного вида в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Everitt W. N.,Gierz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc. London Math.Soc. 1971. Vol. 23, P. 301 – 324.

2. Everitt W. N.,Gierz M. On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions // Proc. London Math.Soc. 1972. Vol. 24, P. 149 – 170.

3. Everitt W. N.,Gierz M. Some inequalities associated with certain differential operators // Math. Z. 1972. Vol. 126, P. 308 – 326.

4. Everitt W. N.,Gierz M. Inequalities and separation for Schrodinger -type operators in $L_2(R^n)$ // Proc. Roy. Soc. Edinburg, Sect A. 1977. Vol. 79, P. 149 – 170.

5. Бойматов К. Х. Теоремы разделимости // ДАН СССР. 1973. Т. 213, № 5. С. 1009 – 1011.

6. Бойматов К. Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1984. Т. 170, С. 37 – 76.

7. Бойматов К. Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка // ДАН СССР. 1988. Т. 301, № 5. С. 1033 – 1036.

8. Бойматов К. Х., Шарипов А. Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака // Доклады Академии наук России. 1992. Т. 326, № 3. С. 393 – 398.

9. Бойматов К. Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных дифференциальных операторов второго порядка // Математические заметки. 1989. Т. 46, № 6. С. 110 – 112.

10. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1983. Т. 161, С. 195 – 217.

11. Муратбеков М. Б., Муратбеков М. М., Оспанов К. Н. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения // Доклады Академии наук России. 2010. Т. 435, № 3. С. 310 – 313.

12. Zayed E. M. E. Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 337, P. 659 – 666.

13. Zayed E. M. E., Salem Omram Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert // International J. Math. Combin. 2010. Vol. 4. P. 13 – 23.

14. Zayed E. M. E., Mohamed A. S., Atia H. A. Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 336. P. 81 – 92.

15. Zayed E. M. E. Separation for an elliptic differential operators in a weighted its application to an existence and uniqueness theorem // Dynamits of continuous, discrede and impulsive systems.Series A: Mathematical Analysis. 2015. № 22. P. 409 – 421.

16. Mohamed A. S., H. A, Atia Separation of the general second elliptic differential operator potential in the weighted weighted Hilbert spaces // Applied Mathematics and Computation. 2005. № 162. P. 155 – 163.

17. Каримов О. Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2014. № 3(157). С. 42 – 50.

18. Каримов О. Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. Т. 58, № 8. С. 665 – 673.

19. Каримов О. Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом // Уфимский математический журнал. 2017. Т. 9, № 1. С. 55 – 62.

20. Каримов О. Х. О коэрцитивной разрешимости уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018. Т. 61, № 11 – 12. С. 829 – 836.

21. Karimov O. Kh. On the separation property of nonlinear second-order differential operators with matrix coefficients in weighted spaces // Journal of mathematical sciences. 2019. Vol. 241, № 5. P. 589 – 595.

REFERENCES

1. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1971, "Some properties of the domains of certain differential operators", *Proc.London Math.Soc.*, vol. 23, pp. 301 – 324.

2. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1972, "On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions", *Proc.London Math.Soc.*, vol.24, pp. 149 – 170.

3. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1972, "Some inequallities associated with certain differential operators", *Math.Z.*, vol.126, pp. 308 – 326.

4. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1977, "Inequalities and separation for Schrodinger -tupe operators in $L_2(R^n)$", *Proc.Roy.Soc.Edinburg Sect A*, vol.79, pp. 149 – 170.

5. Boimatov, K. Kh. 1973, “Theorems of separability”, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 213, № 5, pp. 1009 – 1011.

6. Boimatov, K. Kh. 1984, “ Separability theorems, weighted spaces and their applications”, *Proc.of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences im.Steklova*, vol. 170, pp. 37 – 76.

7. Boimatov, K. Kh. 1988, “Coercive estimates and separability for second order elliptic differential equations”, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 301, № 5, pp. 1033 – 1036.

8. Boimatov, K. Kh., & Saripov, A. 1992, “Coercive properties of nonlinear Schrodinger and Dirac operators”, *Dokl. Mathematics*, vol. 326, № 3, pp. 393 – 398.

9. Boimatov, K. Kh. 1989, “Coercive estimates and separability theorems for differential operators of the second order”, *Mathematical notes*, vol. 46, № 6, pp. 110 – 112.

10. Otelbaev, M. 1983, “Coercitive estimates and separability theorems for elliptic equations in R^n” *Proc.of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences im.Steklova*, vol. 161, pp. 195 – 217.

11. Muratbekov, M. B., & Muratbekov, M. M., & Ospanov, K. N. 2010, “Coercive solvability of odd-order differential equations and its applications”, *Dokl. Mathematics*, vol. 435, № 3, pp. 310 – 313.

12. Zayed, E. M. E. 2008, “Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem”, *J. Math.Anal.Appl.*, vol. 337, pp. 659 – 666.

13. Zayed, E. M. E., & Salem, Omram. 2010, “Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert”, *International J. Math.Combin.*, vol. 4, pp. 13 – 23.

14. Zayed, E. M. E., & Mohamed,A. S. & Atia, H. A. 2007, “Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces”, *J. Math.Anal.Appl.*, vol. 336, pp. 81 – 92.

15. Zayed, E. M. E., 2015, “Separation for an elliptic differential operators in a weighted its application to an existence and uniqueness theorem”, *Dynamits of continuous, discrete and impulsive systems.Series A: Mathematical Analysis*, № 22, pp. 409 – 421.

16. Mohamed,A. S. & Atia, H. A. 2005, “Separation of the general second elliptic differential operator potential in the weighted weighted Hilbert spaces”, *Applied Mathematics and Computation.* № 162. pp. 155 – 163.

17. Karimov, O. Kh. 2014, “On separation of second order nonlinear differential operators with matrix coefficients” *Izvestiya Akademii nauk Respubliki Tajikistan. Otdeleniye fiziko-matematicheskikh, khimicheskikh, geologicheskikh i tekhnicheskikh nauk*, № 4(157), pp. 42 – 50, (in Russian).

18. Karimov, O. Kh. 2015, “On separation of nonlinear second order nonlinear differential operators with matrix coefficients in a weighted space”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 58, № 8, pp. 665 – 673, (in Russian).

19. Karimov. O. Kh. 2017, “Coercive properties and separability biharmonic operator with matrix potential”, *Ufa mathematical journal*, vol. 9, № 1, pp. 55 – 62.

20. Karimov, O. Kh. 2018, “On coercive solvability the schrodinger equation in a Hilbert space”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 61, № 11 - 12, pp. 829 – 836, (in Russian).

21. Karimov, O. Kh. 2019, “On the separation property of nonlinear second-order differential operators with matrix coefficients in weighted spaces”, *Journal of mathematical sciences*, vol. 241, № 5, pp. 589 – 595.

Получено: 30.01.2023
Принято в печать: 14.06.2023