ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 512.623 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-179-196

Явные конструкции расширений полных полей характеристики 0

И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова

Жуков Игорь Борисович — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: i.zhukov@spbu.ru
Иванова Ольга Юрьевна — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: olgaiv80@mail.ru

Аннотация

Данный обзор посвящён p-расширениям полных дискретно нормированных полей смешанной характеристики, где p — характеристика поля вычетов. Известно, что любое вполне разветвлённое расширение Галуа с немаксимальным скачком ветвления может быть задано уравнением Артина-Шрайера, при этом верхняя граница скачка ветвления соответствует нижней границе нормирования правой части уравнения. Задача построения расширений с произвольными группами Галуа не решена.

Ключевые слова: дискретно нормированное поле, скачок ветвления, уравнение Артина-Шрайера.

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:
И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова. Явные конструкции расширений полных полей характеристики 0 // Чебышевский сборник,2023, т.24, вып.2, с. 179–196.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 512.623 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-179-196

Explicit constructions of extensions of complete fields of characteristic 0

I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova

Zhukov Igor Borisovich — Saint Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: — i.zhukov@spbu.ru
Ivanova Olga Yur'evna — Saint Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: — olgaiv80@mail.ru

Abstract

This survey article is devoted to p-extensions of complete discrete valuation fields of mixed characteristic where p is the characteristic of the residue field. It is known that any totally ramified Galois extension with a non-maximal ramification jump can be determined by an Artin-Schreier equation, and the upper bound for the ramification jump corresponds to the lower bound of the valuation in the right-hand side of the equation. The problem of construction of extensions with arbitrary Galois groups is not solved.

Keywords: discrete valuation field, ramification jump, Artin-Schreier equation

Bibliography: 28 titles.

For citation:
I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova, 2023, "Explicit constructions of extensions of complete field of characteristic 0", *Chebyshevskii sbornik*, vol.24, no.2, pp. 179–196.

1. Введение

Если K — поле характеристики $p > 0$, то, как хорошо известно, любое циклическое расширение L/K степени p может быть получено присоединением корня уравнения Артина-Шрайера, то есть уравнения $x^p - x = a$, где $a \in K$. Обобщением этой конструкции служит теория векторов Витта (см. [14, гл. VI]): любое циклическое расширение L/K степени p^n может быть задано в виде $L = K(x_0, \dots, x_{n-1})$,

$$(x_0^p, \dots, x_{n-1}^p) -_{W_n(L)} (x_0, \dots, x_{n-1}) = (a_0, \dots, a_{n-1}),$$

где $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$, а $W_n(L)$ — «группа p-векторов Витта длины n», в которой сложение задаётся при помощи определённого набора из n многочленов от $2n$ переменных над $\mathbb{F}_p$.

Менее известна конструкция Инабы [19], которая описывает способ построения произвольных конечных p-расширений Галуа поля характеристики p. Любое такое расширение L/K может быть получено присоединением элементов некоторой квадратной унипотентной матрицы X, удовлетворяющей уравнению вида

$$X^{(p)} = AX,$$

где $X^{(p)}$ обозначает поэлементное возведение в степень p, а A — некоторая унипотентная матрица с элементами из K (см. подробнее в §4).

Если простое число p отлично от характеристики поля K, мы не располагаем каким-либо способом явного построения p-расширений K, исключая случай, когда K содержит первообразный корень степени p^n из 1. В этом случае любое циклическое расширение L/K степени p^n получается присоединением корня уравнения Куммера $x^{p^n} = a$, где $a \in K^*$.

Однако при наличии на поле K дополнительной структуры, а именно, дискретного нормирования, относительно которого K является полным и имеет поле вычетов характеристики p (не обязательно совершенное), мы можем пытаться строить p-расширения Галуа поля K с помощью тех же конструкций (Артина-Шрайера, Витта и Инабы). В каждом случае мы можем построить все расширения соответствующего класса при определённом ограничении сверху на инварианты ветвления расширения (скачки ветвления, глубину ветвления или порядок дифференты).

Данный обзор включает разнообразные результаты, касающиеся свойств p-расширений Галуа полных полей характеристики 0 с полем вычетов характеристики $p > 0$; в частности, рассматриваются конструкции, позволяющие получать такие расширения.

В §3 мы обсуждаем свойства циклических расширений степени p и выясняем, при каких условиях такое расширение может быть задано уравнением Артина-Шрайера.

В §4 рассматриваются расширения, которые можно задать при помощи конструкции Инабы. В частности, обсуждается возможность погружения любого p-расширения полей изучаемого типа в расширение Инабы.

В §5 мы приводим результаты, описывающие возможность погружения заданного циклического расширения степени p^l в циклическое расширение степени p^n.

В §6 мы показываем, как заданное циклическое расширение степени p с достаточно малым скачком ветвления может быть погружено в расширение степени p^2, задаваемое при помощи вектора Витта длины 2 или некоторой его модификации.

В §7 мы строим семейство свирепых циклических расширений степени p^n поля K при выполнении зависящего от n ограничения снизу на абсолютный индекс ветвления поля K; результаты получены для класса полей со свойством $[\overline{K} : \overline{K}^p] = p$, к которому относятся, в частности, двумерные локальные поля.

Наконец, в §8 изучаются абсолютно неразветвлённые поля K (поля с условием $v_K(p) = 1$). Для них воспроизводится конструкция, позволяющая построить семейство циклических расширений, композит которых представляет собой максимальное абелево расширение K показателя p^n (т. е. с группой Галуа, аннулируемой умножением на p^n),

Интерес к явным конструкциям расширений полей с несовершенным полем вычетов связан, в частности, с потенциальной возможностью описывать в терминах этих конструкций отображение взаимности высшей теории полей классов, построенной в работах А. Н. Паршина, К. Като, С. В. Востокова, И. Б. Фесенко, см., например, обзор [18]. Вдохновляющим примером здесь служат работы [15] и [2], где отображение взаимности описано в терминах теории Витта и Куммера соответственно.

2. Обозначения и предварительные сведения

Всюду в тексте через K обозначается полное дискретно нормированное поле характеристики 0 с произвольным полем вычетов характеристики $p > 0$. Для таких полей:

• v_K — нормализованное нормирование на K, а также его ненормализованное продолжение на какое-либо расширение K;

• $e_K = v_K(p)$ — абсолютный индекс ветвления поля K;

• $\mathcal{O}_K = \{a \in K | v_K(a) \geqslant 0\}$;

• $mathfrakM_K = \{a \in K | v_K(a) > 0\}$;

• $\overline{K} = \mathcal{O}_K / mathfrakM_K$ — поле вычетов поля K;

• π_K — какая-либо униформизирующая K, т. е. элемент с $v_K(\pi_K) = 1$;

• $\overline{a}$ — класс вычетов в $\overline{K}$ элемента $a \in \mathcal{O}_K$.

Для конечного расширения L/K:

• $e(L/K) = v_L(\pi_K)$—индекс ветвления L/K; $e(L/K) = e_t(L/K)e_w(L/K)$,где $(e_t(L/K), p) = 1$, $e_w(L/K)$ — степень p;

• $f(L/K) = [\overline{L} : \overline{K}]$ — степень инерции L/K; $f(L/K) = f_s(L/K)f_i(L/K)$, где $f_s(L/K) = [\overline{L} : \overline{K}]_{sep}$, $f_i(L/K) = [\overline{L} : \overline{K}]_{ins}$;

• $s_G(\sigma) = \min\{v_L(a^{\sigma-1} - 1) | a \in K^*\}$ — число ветвления Суона элемента $\sigma \in G = Gal(L/K)$;

• $d_K(M/L) = \inf\{v_K(\mathrm{Tr}_{M/L}(y)/y) | y \in M^*\}$ — глубина ветвления M/L, где $M/L/K$ — конечные сепарабельные расширения.

Одним из важнейших свойств глубины ветвления является её аддитивность ([17, (2-4)]):

Лемма 1. *Пусть N — промежуточное поле в M/L. Тогда $d_K(M/L) = d_K(M/N) + d_K(N/L)$.*

Отметим также, что $d_K(M/L) = 0$, если и только если M/L ручное ([17, (2-12)]).

Подробную информацию о различных инвариантах ветвления в случае несовершенного поля вычетов можно найти в [26] = [27].

Через ζ_n обозначается фиксированный первообразный корень степени n из 1 в алгебраическом замыкании рассматриваемого поля.

Обозначим через $\mathbf{G}_0 \in \mathbb{Z}_p[X,Y]$ (соответственно $\mathbf{G}_m$) формальный групповой закон Любина-Тэйта с эндоморфизмом умножения на p, задаваемым рядом $[p]_0 = pX + X^p$ (соответственно $[p]_m = (1+X)^p - 1$). (Теория Любина-Тэйта изложена в оригинальной статье [22] и в книгах [12, 13].) Через $f_G(X) = X + \dots \in \mathbb{Z}_p[X]$ будет обозначаться изоморфизм между $\mathbf{G}_m$ и $\mathbf{G}_0$, то есть единственный ряд вида $X + \dots$ такой, что $f_G([p]_m) = [p]_0(f_G)$.

Положим $w = f_G(\zeta_p - 1)$; нетрудно видеть, что $[p]_0(w) = 0$, т. е. $w^{p-1} = -p$.

Пусть $K_1 = K(\zeta_p) = K(w)$. Тогда $Gal(K_1/K)$ — циклическая группа порядка m, делящего $p-1$. Обозначим через σ некоторый образующий этой группы, через g — такой первообразный корень из 1 степени m в $\mathbb{Z}_p$, что $\zeta_p^\sigma = \zeta_p^g$; легко видеть, что для формальной группы $\mathbf{G}_0$ выполнено $[g]_0(X) = gX$. Положим $mathfrakM_1 = mathfrakM_{K_1}$. Для $s_1, s_2 \in mathfrakM_1$ будем писать

$$s_1 \equiv s_2 \mathrm{mod} [p]_0 \mathbf{G}_0(mathfrakM_1),$$

если $s_1 = s_2 +_{\mathbf{G}_0} [p]_0(s)$ при некотором $s \in mathfrakM_1$.

Следующая лемма обобщает лемму 4 в [3] (вместо многомерного локального поля рассматриваем случай произвольного поля вычетов) и отвечает на вопрос, при каком условии данное циклическое расширение степени p поля K_1 является подъёмом некоторого циклического расширения поля K.

Лемма **2.** *1. Пусть $L_1 = K_1(x)$, $x^p = a \in K_1^*$. Тогда расширение L_1/K является абелевым, если и только если $a^\sigma \equiv a^g \mathrm{mod} (K_1^*)^p$.*

2. Пусть $L_1 = K_1([p]_0^{-1}(c))$ при некотором $c \in mathfrakM_1$. Тогда расширение L_1/K является абелевым, если и только если $c^\sigma \equiv gc \mathrm{mod} [p]_0 \boldsymbol{G}_0(mathfrakM_1)$.

Доказательство. Поскольку в [3] доказательство фактически опущено, приведём для удобства читателя полное доказательство. Продолжение σ на сепарабельное замыкание K будем также обозначать через σ. Через τ обозначим произвольный образующий $Gal(L_1/K_1)$ (можно считать $L_1 \neq K_1$).

Пусть L_1/K абелево. Тогда элементы, сопряжённые с x, лежат в L_1, тем самым $a^\sigma \equiv a^l \mathrm{mod} (K_1^*)^p$ для некоторого натурального $l \leqslant p-1$. Отсюда $x^\sigma = x^l b$ для некоторого $b \in K_1^*$.

При подходящем выборе ζ_p имеем $x^\tau = \zeta_p x$. Получаем

$$\zeta_p^l x^l b = (x^l b)^\tau = x^{\tau\sigma} = x^{\sigma\tau} = (\zeta_p x)^\sigma = \zeta_p^g x^l b,$$

откуда $g \equiv l \mathrm{mod} p$.

Обратно, пусть $a^\sigma \equiv a^l \mathrm{mod} (K_1^*)^p$, тогда $x^\sigma = x^g b$ для некоторого $b \in K_1^*$, откуда видно, что все сопряжённые с x^σ лежат в L_1, и L_1/K нормальное. Далее,

$$x^{\sigma\tau} = (\zeta_p x)^\sigma = \zeta_p^g x^g b = (x^g b)^\tau = x^{\tau\sigma},$$

и мы заключаем, что L_1/K абелево.

Вторая часть вытекает из первой, если подставить $a = 1 + f_G^{-1}(c)$.

3. Циклические расширения степени p

Пусть L/K — циклическое расширение степени p. Из равенства

$$p = e(L/K)f(L/K) = e_t e_w f_s f_i$$

мы заключаем, что имеет место один из трёх случаев (так как e_t взаимно просто с p):

- L/K неразветвлённое: $f_s = p$, $e_w = f_i = 1$;
- L/K вполне (дико) разветвлённое: $e_w = p$, $f_s = f_i = 1$;
- L/K свирепо разветвлённое: $f_i = p$, $f_s = e_w = 1$.

Под скачком ветвления $h(L/K)$ будем понимать число ветвления Суона $s_G(\sigma)$ нетривиального элемента $\sigma \in G = Gal(L/K)$.

Доказательство. Пусть $\zeta_p \in K$, $L = K(\gamma)$ — нетривиальное расширение, $\gamma^p = a \in K$. Тогда:

1) если $v_K(a-1) = \frac{p}{p-1}e_K$, то L/K неразветвлено;

2) если $0 < v_K(a-1) < \frac{p}{p-1}e_K$ и $(p, v_K(a-1)) = 1$, то L/K вполне разветвлено и $h(L/K) = \frac{p}{p-1}e_K - v_K(a-1)$;

3) если $0 < v_K(a-1) < \frac{p}{p-1}e_K$, $p|v_K(a-1)$ и $v_K(a-1) = \max\{v_K(b-1)|b \in a(K^*)^p\}$, то L/K свирепо разветвлено и $h(L/K) = \frac{1}{p-1}e_K - \frac{1}{p}v_K(a-1)$;

4) если $v_K(a) = 0$, $\overline{a} \notin \overline{K}^p$, то L/K свирепо разветвлено и $h(L/K) = \frac{1}{p-1}e_K$;

5) если $v_K(a) > 0$, $(p, v_K(a)) = 1$, то L/K вполне разветвлено и $h(L/K) = \frac{p}{p-1}e_K$.

Доказательство. См. [17, Lemma (2-16)]. □

Нетрудно видеть, что в куммеровском случае ($\zeta_p \in K$) в любом нетривиальном классе $K^*/(K^*)^p$ найдётся a, удовлетворяющий условию одного из пунктов предложения.

Опишем глубину ветвления таких расширений ([17, Lemma (2-10)]).

Доказательство. Пусть L/K — циклическое расширение степени p. Тогда $d_L(L/K) = (p-1)h(L/K)$.

Удобно работать не со скачком, а с глубиной ветвления; это часто позволяет единообразно формулировать результаты в диком и свирепом случае. В частности, мы получаем, что для циклического расширения L/K степени p выполнено $0 \leqslant d_K(L/K) \leqslant e_K$. (Если $\zeta_p \notin K$, это следует из $d_K(L/K) = d_K(L(\zeta_p)/K(\zeta_p))$).

Обсудим, когда может достигаться равенство $d_K(L/K) = e_K$, т. е. L/K является *максимально разветвлённым* (см. [5]). Для этого вновь полагаем $K_1 = K(\zeta_p)$ и используем обозначение $mathfrakM_1 = mathfrakM_{K_1}$.

Доказательство. 1. Предположим, что расширение K_1/K не является неразветвлённым. Если расширение $K_1(x)/K$, где $x^p = a \in K_1^*$, абелево, то $a \in (1 + mathfrakM_1)(K_1^*)^p$.

2. Предположим, что $\zeta_p \notin K$ и $K_1(x)/K_1$, где $x^p = a \in K_1^*$, вполне разветвлено. Тогда если $K_1(x)/K$ абелево , то $a \in (1 + mathfrakM_1)(K_1^*)^p$.

Доказательство. Второе утверждение доказано в [16, Ch. III, (2-3)].

Для доказательства первого утверждения можно, не умаляя общности, считать $a \in \mathcal{O}_{K_1}$. По условию $l = e(K_1/K) > 1$. Обозначим через σ образующую $Gal(K_1/K)$. Заменяя K на $K_0 = K_1^{\langle\sigma^l\rangle}$, можно считать K_1/K вполне разветвлённым; при этом $K_1 \neq K$. Тогда имеем $a^\sigma \equiv a \mathrm{mod}(1 + mathfrakM_1)$, откуда по лемме 2

$$a \equiv a^g \mathrm{mod}(1 + mathfrakM_1)(K_1^*)^p.$$

При редукции по модулю $mathfrakM_1$ получаем $\overline{a}^{g-1} \in (\overline{K_1}^*)^p$, откуда $\overline{a} \in (\overline{K_1}^*)^p$, так как g — корень степени $p-1$ из 1, отличный от 1. □

Замечание 1. *В общем случае условие разветвлённости K_1/K не может быть заменено на более слабое условие $K_1 \neq K$, т. е. $\zeta_p \notin K$; тем самым следствие к лемме 4 в [3] нуждается в уточнении.*

Действительно, пусть $K = \mathbb{Q}_p\{\{t\}\}(\pi)$, $\pi^{p-1} = -pt^{-1}$. Тогда $K_1 = K(\zeta_p) = K(w) = K(t_1)$, где $t_1^{p-1} = t$, представляет собой вполне разветвлённое циклическое расширение K степени $p-1$; пусть σ — образующая его группы Галуа. Из $\zeta_p^\sigma = \zeta_p^g$ вытекает $w^\sigma = [g]_0(w) = gw$.

Далее, из $wt_1^{-1} = \pi$ получаем $t_1^{\sigma} = gt_1$. Тогда по лемме 2 расширение $K_1(\sqrt[p]{t_1})/K$ является абелевым, в то время как, очевидно, $t_1 \notin (1 + mathfrakM_1)(K_1^*)^p$.

Следствие 1. *Пусть L/K — циклическое расширение степени p, $d = d_K(L/K)$.*

1. Если L/K вполне разветвлённое, то либо $0 < d < e_K$ и $(p, pd) = 1$, либо $d = e_K$. Последний вариант возможен только при $\zeta_p \in K$.

2. Если L/K свирепо разветвлённое, то $0 < d \leqslant e_K$; при этом равенство возможно только если K_1/K неразветвлённое.

Доказательство. Оба утверждения вытекают из предыдущих предложений с учётом того, что во вполне разветвлённом случае $pd = (p-1)h(L/K)$. □

Все циклические расширения L/K, не являющиеся максимально разветвлёнными в смысле [5] (то есть $d_K(L/K) < e_K$), могут быть заданы также при помощи уравнений Артина-Шрайера. Более точно, справедливы следующие утверждения.

Предложение 1. *Пусть $\alpha \in K$, $v_K(\alpha) > -\frac{p}{p-1}e_K$, $L = K(\lambda)$, где λ — корень многочлена $X^p - X - \lambda$.*

(i) Многочлен $X^p - X - \lambda$ либо раскладывается на линейные множители, либо неприводим в $K[X]$. В последнем случае L/K — циклическое степени p. При этом для некоторого нетривиального $\sigma \in Gal(L/K)$ выполнено $v_L(\sigma(\lambda) - \lambda - 1) > 0$.

(ii) Если $v_K(\alpha) > 0$, то $L = K$.

(iii) Пусть $v_K(\alpha) = 0$, $\bar{\alpha} \notin \wp(\overline{K})$, где $\wp(x) = x^p - x$. Тогда L/K — неразветвлённое степени p.

(iv) Пусть $v_K(\alpha) < 0$, $p \nmid v_K(\alpha)$. Тогда L/K — вполне разветвлённое степени p с $d_K(L/K) = -\frac{p-1}{p}v_K(\alpha)$.

(v) Пусть $v_K(\alpha) = -pc$ с натуральным c и $\overline{\pi_K^{pc}\alpha} \notin (\overline{K})^p$. Тогда L/K — свирепо разветвлённое степени p с $d_K(L/K) = -\frac{p-1}{p}v_K(\alpha)$.

Доказательство. Утверждения (i)–(iv) доказаны в [16, Ch. III, (2-5)]. В случае (v) положим $y = \pi^c\lambda$. Имеем $y^p - \pi^{(p-1)c}y + \pi^{pc}\alpha = 0$, откуда $\bar{y}^p = -\overline{\pi^{pc}\alpha} \notin \overline{K}^p$. Тем самым $\overline{L}/\overline{K}$ — нетривиальное несепарабельное расширение. □

Верно и обратное.

Предложение 2. *Пусть L/K — циклическое расширение степени p, и $d_K(L/K) < e_K$. Тогда найдётся $\alpha \in K$, $-\frac{p}{p-1}e_K < v_K(\alpha) \leqslant 0$ такое, что $L = K(\lambda)$, где λ — корень многочлена $X^p - X - \alpha$. При этом α можно выбрать так, чтобы для него выполнялось одно из условий в пунктах (iii), (iv), (v) предыдущего предложения.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения было дано в [23], оно воспроизводится в [16, Ch. III. (2-4)] для случая вполне разветвлённого расширения. □

Данное утверждение может быть доказано также с использованием формальных групповых законов Любина-Тэйта в духе [3]. Опишем основную идею такого доказательства.

Пусть $K_1 = K(\zeta_p)$, $L_1 = L(\zeta_p)$. В силу теории Куммера имеем $L_1 = K_1(x)$, $x^p = a \in K_1$; можно считать $a \in \mathcal{O}_{K_1}$. Условие $d_K(L/K) < e_K$ влечёт $d_{K_1}(L_1/K_1) < e_{K_1}$, откуда $\overline{a} \in (\overline{K_1}^*)^p$. Умножая a на подходящий элемент $(K_1^*)^p$, можно обеспечить выполнение условия $a \in 1 + mathfrakM_{K_1}$, причём для $a - 1$ будет выполняться одно из условий в пунктах (iii), (iv), (v) предыдущего предложения. Тогда имеем $L_1 = K_1(x-1) = K_1(y)$, где $[p]_0(y) = f_G(a-1)$. Отсюда $L_1 = K_1(z)$, где $z = w^{-1}y$ удовлетворяет уравнению Артина-Шрайера

$$z^p - z = w^{-p}f_G(a-1).$$

4. Конструкция Инабы

Введем обозначения:

• $M_n(K)$ — множество квадратных матриц порядка n с коэффициентами в поле K;

• унипотентная матрица — верхнетреугольная квадратная матрица, у которой все элементы на главной диагонали равны 1.

• $A^{(p)}$ — матрица, полученная из матрицы A возведением каждого элемента в степень p;

• U_n — группа унипотентных матриц порядка n с коэффициентами из $\mathbb{F}_p$;

• при $k \geqslant 0$ множество элементов $a_{i,i+k}$ матрицы $A = (a_{i,j})$ будем называть ее k-й диагональю.

В работе Инабы [19] рассматривались матричные уравнения $X^{(p)} = AX$, где решение X также предполагается унипотентной матрицей. Будем называть такие уравнения уравнениями Инабы.

Уравнение для матриц n-го порядка равносильно системе из $\frac{n^2-n}{2}$ уравнений:

$$\begin{cases} x_{s,1+s}^p - x_{s,1+s} = a_{s,1+s}, & 1 \leqslant s \leqslant n-1 \\ x_{s,2+s}^p - x_{s,2+s} = a_{s,1+s}x_{1+s,2+s} + a_{s,2+s}, & 1 \leqslant s \leqslant n-2 \\ \dots \\ x_{s,i+s}^p - x_{s,i+s} = \sum\limits_{j=s+1}^{s+i-1} a_{s,j}x_{j,i+s} + a_{s,i+s}, & 1 \leqslant s \leqslant n-i \\ \dots \end{cases}.$$

Элементы каждой диагонали матрицы X задаются уравнениями Артина-Шрайера с коэффициентами из поля, полученного из поля K присоединением всех предыдущих диагоналей. Следовательно, система имеет решение в алгебраическом замыкании поля K.

Расширением Инабы будем называть расширение, полученное из поля K присоединением всех элементов некоторой матрицы X, являющейся решением матричного уравнения Инабы для $A \in M_n(K)$.

Поля характеристики p

В [19] рассматривались поля характеристики $p > 0$.

Предложение 3. *Пусть K — поле характеристики p, и L/K — расширение Инабы.*

1) Расширение L/K является расширением Галуа.

2) Пусть унипотентная матрица $X \in M_n(L)$ такова, что L получено из K присоединением элементов X, и X удовлетворяет уравнению Инабы. Тогда для любого $\sigma \in Gal(L/K)$ существует матрица $\Lambda_X(\sigma) \in U_n$, такая, что $\sigma X = X\Lambda_X(\sigma)$.

3) Отображение $\sigma \mapsto \Lambda_X(\sigma)$ является инъективным гомоморфизмом

$$Gal(L/K) \to U_n.$$

4) Пусть Y — унипотентная матрица, являющаяся решением того же уравнения Инабы. Тогда представления Λ_X и Λ_Y сопряжены, то есть существует матрица $D \in U_n$, такая, что

$$\Lambda_X(\sigma) = D^{-1}\Lambda_Y(\sigma)D$$

для любого $\sigma \in Gal(L/K)$.

Доказательство. См.[19], §1. □

Следствие 2. *В обозначениях предложения 3 выполено $|Gal(L/K)| = p^s$ для некоторого $s \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$.*

Унипотентные матрицы A и B будем называть p-эквивалентными, если существует унипотентная матрица C, такая, что $C^{(p)}AC^{-1} = B$. Очевидно, p-эквивалентность является отношением эквивалентности.

Предложение 4. *Пусть K — поле характеристики p, и L_1, L_2 — расширения Инабы поля K с p-эквивалентными матрицами. Тогда $L_1 = L_2$.*

Доказательство. См.[19], §1. □

Теорема 1. *Пусть $K \subset L$ — поля характеристики p, пусть L/K — p-расширение Галуа. Пусть Λ — представление $Gal(L/K)$ в U_n. Тогда существуют унипотентные матрицы $A \in M_n(K)$, $X \in M_n(L)$ такие, что $X^{(p)} = AX$, поле L получено из поля K присоединением элементов матрицы X, и $\Lambda = \Lambda_X$ в обозначениях предложения 3. Матрица A определена однозначно с точностью до p-эквивалентности.*

Доказательство. См.[19], теорема 1. □

Поля характеристики 0

В серии работ [6], [11],[9] рассматривались расширения Инабы дискретно нормированных полей смешанной характеристики.

Пусть K — дискретно нормированное поле, и $A \in M_n(K)$. Через $A[i]$ будем обозначать множество элементов i-й диагонали матрицы A, а через $v_K(A[i])$ — минимум нормирований элементов из $A[i]$.

В первой работе [6] были доказаны аналоги утверждения из предложения 3 из работы Инабы при некоторых ограничениях на нормирования элементов матрицы A:

Теорема 2. *Пусть n — натуральное число; α — рациональное число, $\alpha < 1/(n-1)$. Пусть K — полное дискретно нормированное поле, такое, что*

$$charK = 0, \qquad char\overline{K} = p.$$

Пусть $A \in M_n(K)$ — унипотентная матрица такая, что

$$v_K(A[i]) \geqslant -i\alpha e_K$$

для любого i, и пусть X — некоторое решение матричного уравнения $X^{(p)} = AX$. Положим $K_i = K(X[1], \ldots, X[i])$.

1) Имеем $v_K(X[i]) \geqslant -\frac{i\alpha e_K}{p}$ при всех i.

2) Для любого $\sigma \in Gal(K)$ найдётся единственная унипотентная матрица $\Lambda(\sigma) \in \in M_n(\mathbb{Z}_p)$, элементы которой являются элементами Тайхмюллера, такая, что

$$\sigma(X) - X\Lambda(\sigma) \in M_n(mathfrakM_K).$$

3) При этом $v_K(\Delta_\sigma[i]) > (1 - i\alpha)e_K$ при всех i.

4) K_i/K — расширение Галуа при всех i.

Доказательство. См. [6], теорема 1, §3. □

Интересен также вопрос об аналогах теоремы 1, то есть о том, какие расширения можно задать как расширения Инабы или погрузить в расширение Инабы. Некоторые результаты в этом направлении получены в [9].

Теорема 3. *Пусть поля*

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \cdots \subset K_n = L$$

таковы, что K_{i+1}/K_i – расширения степени p, заданные уравнениями Артина-Шрайера. Тогда существуют расширения Инабы L_I/K и M_I/K, заданные матрицами порядка $p^{n-1}+2$ и $p^{n-1}+1$ соответственно, такие, что $M_I L = L_I$.

Доказательство. См.[9], теорема 3.3. □

Позже был получен следующий результат, который будет опубликован в [10]:

Теорема 4. *Пусть K — полное дискретно нормированное поле, $charK = 0$, $char\overline{K} = p$, и K содержит первообразный корень p-й степени из единицы. Тогда для любого p-расширения Галуа L/K существует поле E, такое, что $K \subset L \subset E$, расширение E/K раскладывается в башню расширений Артина-Шрайера, и $|E : K| \leqslant |L : K|^2$.*

Из теорем 3 и 4 следует, что для любого p-расширения Галуа L/K дискретно нормированных полей смешанной характеристики, содержащих первообразный корень p-й степени из единицы, существует такое поле M, что M/K и LM/K — расширения Инабы. Расширения можно задать матрицами порядка $p^{2n-1}+2$ и $p^{2n-1}+1$, где n таково, что $|L : K| = p^n$.

Предложение 5. *Пусть K – полное дискретно нормированное поле,*

$$charK = 0, \qquad char\overline{K} = p.$$

Пусть L/K – вполне разветвлённое расширение Галуа степени p^2, и для некоторого поля M, такого, что

$$K \subset M \subset L, \qquad |M : K| = p,$$

выполнено

$$h(M/K) \leqslant \frac{e_K}{p},$$

$$h(L/M) \leqslant (p-1)h(M/K) + \frac{e_M}{p}.$$

Тогда существуют расширения Инабы L_I/K и M_I/K порядка p^{p+1} и p^p, такие, что

1) $M_I L = L_I$,

2) расширения L_I/K и M_I/K являются расширениями Галуа, и их группы Галуа изоморфны некоторым подгруппам групп U_{p+1} и U_p.

Доказательство. См.[9], предложение 4.3. □

Теорема 5. *Пусть n – натуральное число, K – полное дискретно нормированное поле,*

$$charK = 0, \qquad char\overline{K} = p,$$

$e_K > p-1$, и h – такое число, что

$$0 < h < \frac{e_K}{n-1}.$$

Пусть L/K – вполне разветвлённое расширение Галуа, такое, что группа $Gal(L/K)$ изоморфна $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{n-1}$, и его скачки ветвления в верхней нумерации не превосходят h. Тогда расширение L/K можно погрузить в расширение Галуа с группой Галуа, изоморфной U_n.

Доказательство. См.[9], теорема 6.2. □

5. Продолжимость циклических расширений

Оставшаяся часть этого обзора будет посвящена построению абелевых p-расширений поля K.

В пределах данного параграфа используются такие обозначения:

• $K_n = K(\zeta_{p^n})$ для всех натуральных n;

• $M_{n,K} = N_{K_n/K_1}(K_n^*)(K_1^*)^p$.

Специфика полей с несовершенным полем вычетов состоит в том, что, вообще говоря, не любое циклическое расширение степени p может быть погружено в циклическое расширение степени p^n с $n > 1$. В терминах уравнения Куммера возможность такого погружения определяется следующим результатом Мики ([24, §1, Cor. to Prop. 3]).

Предложение 6. *Пусть p — простое число, K — поле характеристики, не равной p, L/K — циклическое расширение степени p, n — натуральное число.*

Тогда следующие условия равносильны:

1. Существует циклическое расширение M/K степени p^n такое, что $L \subset M$.

2. $L_1 = K_1(\sqrt[p]{a})$, где $a \in M_{n,K}$.

Группы $M_{n,K}$ образуют убывающую фильтрацию:

$$K_1^* = M_{1,K} \supset M_{2,K} \supset \cdots \supset (K_1^*)^p.$$

Регулярное поведение этой фильтрации при переходе от K к некоторому его расширению проверено в [1] при сильных дополнительных предположениях.

Справедливо следующее обобщение предложения 6 в предположении $\zeta_{p^l} \in K$ для некоторого $l \geqslant 1$ ([4, Предложение 2.4]). Через μ_{p^∞} здесь обозначена группа всех p-примарных корней из 1 в K^*

Предложение 7. *Пусть $b \in K^*$, $b \notin \mu_{p^\infty} \cdot (K^*)^p$, $L = K(x)$, $x^{p^l} = b$. Тогда равносильны следующие два условия.*

1. Существует циклическое расширение M/K степени p^n такое, что $L \subset M$.

2. $b \in (N_{K_n/K}K_n^*)(K^*)^{p^l}$.

Как следствие предложения 6, можно получить ([4, Предложение 3.1]):

Предложение 8. *Пусть L/K — циклическое расширение степени p; $d_K(L/K) < \frac{1}{p}e_K$. Тогда существует циклическое расширение M/K степени p^2 такое, что $L \subset M$.*

6. Векторы Витта в характеристике 0

Если наложить несколько более сильное ограничение на глубину ветвления L/K, чем указано в предложении 8, а именно, потребовать $d_K(L/K) < \frac{1}{p+1}e_K$ вместо $d_K(L/K) < \frac{1}{p}e_K$, подходящее циклическое расширение степени p^2 можно задать с помощью простой конструкции, идентичной конструкции p-векторов Витта длины 2 в характеристике p ([4, Предложение 3.2]):

Предложение 9. *Пусть $a \in K$, $-\frac{p}{p^2-1}e_K < v_K(a) \leqslant 0$. Положим $M = K(x_0, x_1)$, где*

$$(x_0^p, x_1^p) -_{W_2(K)} (x_0, x_1) = (a, 0).$$

Тогда, если $x_0 \notin K$, то M/K — циклическое степени p^2.

Фактически это означает, что если L/K получено присоединением корня уравнения $x^p - x = a$, то $M = K(x_0, x_1)$,

$$x_0^p - x_0 = a,$$
$$x_1^p - x_1 = -p{-}1((a + x_0)^p - a^p - x_0^p).$$

Если же значение глубины ветвления лежит в «критическом диапазоне»

$$\frac{1}{p+1}e_K \leqslant d_K(L/K) < \frac{1}{p}e_K,$$

данные формулы приходится модифицировать, что было сделано в [8, теорема 2.1]:

Теорема 6. *Пусть $a \in K$, $-\frac{e_K}{p-1} < v_K(a) \leqslant 0$. Пусть $M = K(x_0, x_1)$, где*

$$x_0^p - x_0 = a,$$
$$x_1^p - x_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n,$$
$$\Delta_n = \begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{p-1} \left(\frac{\binom{p}{i}}{p}\right) a^{p-i} x_0^i, & n = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{p-1} \left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)+1}, & n = 1, \\ p^{p^n + p^{n-1} + \dots + p} x_0^{p^{n+2} - p + 1}, & n \geqslant 2. \end{cases}$$

Тогда, если $x_0 \notin K$, то M/K — циклическое расширение степени p^2.

Доказательство. В [8] доказано, что построенное M/K является абелевым; доказательство цикличности приведено только для случая вполне разветвлённого расширения, т. е. в предположении $p \nmid v_K(a)$. Однако при этом в общем случае доказано, что для $b = w((a + x_0)^p - a^p - x_0^p)$ выполнено

$$b^\sigma = b +_{\mathbf{G}_0} [p]_0(c)$$

для некоторого $c = wx_0^{p-1} + \dots$, где σ — образующая $Gal(L/K)$. Нетрудно видеть, что для любого такого c выполняется

$$N_{L/K}(1 + f_G^{-1}(c)) \neq 1,$$

откуда по лемме 1.1 в [8] (она же лемма 1.2 в [7]) заключаем, что расширение M/K — циклическое. □

Полученное расширение M/K мы можем рассматривать как задаваемое «вектором Витта» $(a, 0)$ в некоторой гипотетической «теории Витта в характеристике 0».

В работе [21] предложение 9 используется для построения всех циклических расширений M/K порядка p^2, у которых глубина ветвления «нижнего этажа» удовлетворяет $d_K(L/K) < \frac{1}{p+1}e_K$, и для описания структуры аддитивных модулей Галуа в этом случае.

7. Свирепые циклические p-расширения

В работах [24] и [17] исследовались циклические p-расширения полей. В [24] было доказано, что у дискретно нормированного поля K, такого, что $char K = 0$, $char \overline{K} = p$, не существует циклического свирепого расширения сколь угодно большой степени, и получена оценка на степень расширения, зависящая от e_K. В [17] оценка была улучшена, а именно, был получен следующий результат.

Предложение 10. *Пусть K — дискретно нормированное поле, L/K — циклическое свирепое расширение, и*

$$g = \max\{a + b \mid rp^{a-1} + p^{b-2}(p^2 - p + 1)(p - 1) < n, a, b \in \mathbb{Z}, b \geqslant 0\}.$$

Тогда $|L : K| \leqslant p^g$.

Доказательство. См. [17], предложение 0-4. □

Неизвестно, является ли данная оценка точной. Интересен вопрос существования циклических свирепых расширений большой степени, а также явные конструкции для них.

По теореме 2 расширение Инабы является расширением Галуа. Это позволяет строить расширения Галуа с заданными скачками, если скачки достаточно малы.

Будем называть поле K *двумерным*, если $[\overline{K} : \overline{K}^p] = p$. К этому классу относятся, в частности, двумерные локальные поля характеристики 0 с произвольным совершенным полем вычетов характеристики p. (Действительно, в этом случае $\overline{K}$ можно отождествить с полем формальных рядов Лорана $k((X))$, где k — совершенное поле, и $[k((X)) : k((X^p))] = p$.)

Как было показано ещё в работе [20], для свирепых расширений таких полей можно построить теорию ветвления, аналогичную классической. В частности, выполняется следующий аналог теоремы Эрбрана.

Лемма 3. *Пусть K двумерное, L/K — конечное свирепое расширение Галуа с группой G, H — нормальная подгруппа в G. Тогда для $\sigma \in Gal(L/K)$ выполнено*

$$s_{G/H}(\sigma) = s_G(g_1) + \dots + s_G(g_n),$$

где $g_1, \dots, g_n$ — все представители σ в G.

Доказательство. Отметим, что свирепые расширения двумерного поля являются *моногенными*: $\mathcal{O}_L$ как $\mathcal{O}_K$-алгебра порождается одним элементом. А именно, $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[t]$, где $t \in \mathcal{O}_L$ таков, что $\bar{t} \notin \overline{L}^p$. Отсюда $s_G(g) = v_L(t^{g-1} - 1)$, и формула 3 доказывается аналогично классическому случаю, см., например, [25, Ch. IV, Prop. 3]. □

Как следствие, получаем такой аналог леммы 3.3.1 из [26].

Лемма 4. *Пусть L_1/K и L_2/K — свирепые расширения Галуа степени p двумерного поля K и для скачков расширения $h = h(L_1/K)$ и $h' = h(L_2/K)$ выполнено $0 < h < h'$. Тогда*

$$h(L_1L_2/L_2) = h/p,$$
$$h(L_1L_2/L_1) = h/p + (h' - h).$$

Теорема 7. *Пусть K двумерное, K содержит первообразный корень p-й степени из единицы. Пусть π – униформизирующая поля K, и $a_1, \dots, a_n \in K$ таковы, что*

$$p^n \mid v_K(a_1), \qquad \overline{\pi^{-v_K(a_1)}a_1} \notin \overline{K}^p,$$

$$-\max\Big\{\frac{1}{n}, \frac{p^{n-1}}{p^n - 1}\Big\} e_K < v_K(a_1) < 0,$$

$$v_K(a_i) > \Big(1 + \frac{p^{i-1} - 1}{p^{n-1}(p - 1)}\Big) v_K(a_1) \text{ при } 2 \leqslant i \leqslant n.$$

Тогда существуют $x_1, \dots, x_n \in K^{alg}$, такие, что

$$\begin{cases} x_1^p - x_1 = a_1 \\ x_2^p - x_2 = a_1x_1 + a_2 \\ \dots \\ x_i^p - x_i = a_1x_{i-1} + a_2x_{i-2} + \dots + a_{i-1}x_1 + a_i \\ \dots \end{cases},$$

и $K(x_1, \dots, x_n)/K$ является циклическим свирепым расширением степени p^n.

Доказательство. См. [11], теорема 4.2. При этом в доказательстве, приведенном в [11], была ошибочно сделана ссылка на лемму 3.3.1 в [26], на самом деле необходимо использовать вышеприведённую лемму 4. □

Следствие 3. *Пусть K – двумерное, K содержит первообразный корень p-й степени из единицы, $n \in \mathbb{N}$,*

$$e_K > \frac{p^n}{\max\left\{\frac{1}{n}, \frac{p^{n-1}}{p^n - 1}\right\}}.$$

Тогда у поля K существует циклическое свирепое степени p^n, полученное присоединением к полю K некоторого решения уравнения Инабы.

Доказательство. См. [11], следствие 4.3. □

8. Расширения абсолютно неразветвлённого поля

Будем предполагать, что $p > 2$ и что K — абсолютно неразветвлённое, то есть $e_K = 1$. В этой ситуации мы можем явным образом построить максимальное абелево p-расширение K в соответствии с [4] и [28].

Из предложений 1 и 2 легко вытекает следующее утверждение ([4, Предложение 4.1]).

Предложение 11. *Расширение L/K является циклическим степени p, если и только если $L = K(x)$, $x^p - x = a \in K$, $v_K(a) \geqslant -1$ и $x \notin K$, При этом L/K неразветвлено, если и только если $v_K(a) = 0$.*

Предложение 6 даёт в этом случае следующий простой критерий возможности погружения данного циклического расширения степени p в циклическое расширение степени p^n ([4, Предложение 4.2]).

Предложение 12. *Пусть $K_1 = K(x)$, $x^p - x = -p^{-1}a$, $a \in \mathcal{O}_K$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) существует циклическое расширение K_n/K степени p^n такое, что $K_1 \subset K_n$;

(2) $\overline{a} \subset (\overline{K})^{p^{n-1}}$.

Обозначим через K^{ab,p^n} (соответственно K_{ur}^{ab,p^n}) максимальное абелево (соответственно максимальное абелево неразветвлённое) расширение K показателя p^n.

Из теоретико-групповых соображений отсюда мы можем получить такое описание K^{ab,p^n} ([4, Предложение 4.3]).

Предложение 13. *Для $1 \leqslant i \leqslant n$ выберем $A_i \subset \mathcal{O}_K$ так, что $\{\overline{d} : d \in A_i\}$ образует $\mathbb{F}_p$-базис $\overline{K}^{p^{i-1}}/\overline{K}^{p^i}$ при $i \leqslant n-1$ и $\mathbb{F}_p$-базис $\overline{K}^{p^{n-1}}$ при $i = n$. Пусть $K_{i,d}$ $(d \in A_i)$ — любое циклическое расширение степени p^i, которое содержит x с $x^p - x = -p^{-1}d$. Тогда $K^{ab,p^n}/K$ является композитом линейно разделённых расширений $K_{i,d}/K$ $(1 \leqslant i \leqslant n$; d пробегает $A_i)$ и $K_{ur}^{ab,p^n}/K$.*

Далее будем предполагать $p > 3$. Для любого $n \geqslant 1$ и любого $b \in \overline{K}^{p^{n-1}}$ мы построим циклическое расширение $K_{n,d}/K$ степени p^n так, что $x \in K_{n,d}$, $x^p - x = -p^{-1}d$, где $d \in \mathcal{O}_K$ таков, что его класс вычетов равен b.

Для этого мы введём некий «универсальный» (зависящий только от p) степенной ряд, подстановка в который различных элементов будет давать нам правые части уравнений Артина-Шрайера, задающих «этажи» искомого расширения.

Продолжим p-адический показатель на кольцо многочленов $\mathbb{Q}_p[T]$:

$$v\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i\Big) = \min v_p(a_i)$$

и далее на поле $\mathbb{Q}_p(T)$. Через $\mathcal{O}_T$ обозначим кольцо целых соответствующего пополнения, через v — нормирование на нём. Тогда справедливо следующее утверждение ([4, Предложение 4.4]).

Предложение 14. *Существуют $g_i = d_i(T) \in \mathcal{O}_T$, $i \in \mathbb{Z}$, и $R_i = R_i(T) \in \mathcal{O}_T$, $i \geqslant 0$, со следующими свойствами.*

(1) $g_0 \equiv 1 \bmod p\mathcal{O}_T$, $g_i \equiv 0 \bmod p\mathcal{O}_T$ при $i \neq 0$.

(2) $R_0 = T$.

(3) $v(g_i) \geqslant -i + 2 + \left[\frac{i}{p}\right] + \left[\frac{i-2}{p}\right]$ для $i \leqslant -1$.

(4) Имеем

$$g(X) = g(X,T) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_i X^{i(p-1)+1}, \quad R(X,T) = \sum_{i=0}^{\infty} R_i X^{i(p-1)+1}$$

и

$$g(X) +_{\boldsymbol{G}_0} [p]_0 R(g(X),T) = g(X +_{\boldsymbol{G}_0} R([p]_0 X, T^p)).$$

Замечание 2. *У нас нет оснований полагать, что условия (1–4) однозначно определяют g_i и R_i. Однако в [4] приведён некоторый канонический способ построения (g,R) с помощью p-адических приближений.*

Зафиксируем пару (g,R), удовлетворяющую условиям предложения, и обозначим через

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} S_i(T) X^{i(p-1)+1} = T^{-1}X + \dots$$

ряд, обратный к R относительно подстановки рядов в $\mathcal{O}_T[[X]]$.

Следующая теорема описывает построение искомых циклических расширений ([4, Предложение 4.1]).

Теорема 8. *Пусть $d \in \mathcal{O}_K^*$. Рассмотрим $\beta_1, \dots, \beta_n \in K^{sep}$ такие, что*

$$\beta_1^p - \beta_1 = -p^{-1} \sum_{i\geqslant 0} S_i(d^{p^{n-1}})(-p)^i,$$

$$\beta_j^p - \beta_j = -p^{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} g_i(d^{p^{n-j}})(-p)^i \beta_{j-1}^{i(p-1)+1}, \quad j \geqslant 2.$$

Тогда $K_{n,d^{p^{n-1}}} = K(\beta_1, \dots, \beta_n)$ — циклическое расширение K степени p^n, содержащее корень многочлена $X^p - X + p^{-1}d^{p^{n-1}}$.

Отметим, что при построении циклических расширений степени p^n для конкретных значений n мы можем аппроксимировать правые части уравнений в теореме 8 конечными суммами. В частности, при $n = 2$ имеем следующее описание максимального абелева расширения K показателя p^2 ([28, Theorem 14.5]).

Теорема 9. *Для любого $d \in \mathcal{O}_K^*$ пусть $\tilde{K}_{1,d} = K(y)$, где $y^p - y = -p^{-1}d$. Далее, пусть $\tilde{K}_{2,d^p} = K(y_1, y_2)$, где*

$$y_1^p - y_1 = -p^{-1}d^p,$$

$$y_2^p - y_2 = -p^{-1}y_1 + p^{-1} \cdot \frac{d^{1-p}-1}{2} y_1^{-p+2} - \frac{d^{1-p}-1}{2}(1-d^p)y_1.$$

Тогда:

1. Все $\tilde{K}_{1,d}/K$ — циклические p, и все $\tilde{K}_{2,d^p}/K$ — циклические p^2.

2. $K^{ab,p^2}/K$ — композит следующих линейно разделённых расширений:

(a) $\tilde{K}_{1,d}/K$, где d пробегает систему представителей $\mathbb{F}_p$-базиса $\overline{K}/\overline{K}^p$;

(b) $\tilde{K}_{2,d^p}/K$, где d пробегает систему представителей $\mathbb{F}_p$-базиса $\overline{K}$;

(c) $K_{ur}^{ab,p^2}/K$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бойцов, В. Г., Жуков, И. Б., Продолжимость циклических расширений полных дискретно нормированных полей/ В. Г. Бойцов, И. Б. Жуков// Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) - 2003. Т. 305 - С. 5-17

2. Востоков, С. В. Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля/ С. В. Востоков// Изв. АН СССР. Сер. матем 1985. - Т. 49 - № 2 - С. 283–308

3. Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Фесенко И. Б. К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков, И. Б. Фесенко // Алгебра и анализ. - 1990. - Т. 2 - № 4. - С. 91-118.

4. Востоков, С. В., Жуков И. Б. Некоторые подходы к построению абелевых расширений для $\mathfrak{p}$-адических полей/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков// Труды С.-Петерб. мат. общ. - 1995 - Т.3 - С. 194-214. olga

5. Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Пак, Г. К. Расширения с почти максимальной глубиной ветвления/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков, Г. К. Пак// Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) - 1999. - Т. 265 - С. 77-109.

6. Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Иванова, О. Ю. Расширения Инабы полных полей характеристики 0/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова// Чебышёвский сб. - 2019 - Т. 20 - № 3 - С. 124-133.

7. Жуков, И. Б. Структурная теорема для полных полей/ И. Б. Жуков//Тр. С.-Петербург. мат. общ-ва. - 1995. Т. 3. - С. 194-214.

8. Жуков, И. Б., Лысенко, Е. Ф. Построение циклического расширения степени p^2 полного поля/ И. Б. Жуков, Е. Ф. Лысенко//Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) - 2017. - Т. 455 - С. 52-66.

9. Жуков, И. Б., Иванова, О. Ю. О расширениях Инабы двумерных локальных полей смешанной характеристики/ И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова// Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) - 2022. - Т. 513 - С. 57-73.

10. Жуков, И. Б., Иванова, О. Ю. Устранение максимальных скачков/ И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова// Готовится к публикации

11. Иванова, О. Ю. Задание свирепого циклического расширения уравнением Инабы/ О. Ю. Иванова//Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) 2022. -Т. 513 - С. 74-84.

12. Ивасава, К., Локальная теория полей классов/ К. Ивасава - Москва: Мир - 1983.

13. Касселс, Дж., Фрёлих, А. (ред.) Алгебраическая теория чисел/ Дж. Касселс, А. Фрёлих - М.: Мир, 1969.

14. Ленг, С. Алгебра/ С. Ленг - М.: Мир, 1968.

15. Паршин, А. Н. Локальная теория полей классов/ А. Н. Паршин// Алгебраическая геометрия и ее приложения, Сборник статей, Тр. МИАН СССР 1984. - Т. 165 - С. 143–170

16. Fesenko I. B., Vostokov, S.V. Local fields and their extensions. A constructive approach/ I. B. Fesenko and S. V. Vostokov - Second edition - AMS - Providence - RI - 2002.

17. Hyodo, O. Wild ramification in the imperfect residue field case/ O. Hyodo// Adv. Stud. Pure Math. - 1987. - Vol. 12 - P. 287-314.

18. Ikeda, K. İ., Serbest E. Local abelian Kato-Parshin reciprocity law: a survey, Hacet/ K. İ. Ikeda, E. Serbest// J. Math. Stat. - 2021. - Vol. 50 - № 5 - P. 1225-1250.

19. Inaba, E. On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic p/ E. Inaba//Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. - 1961. - Vol. 12 - P. 26-36.

20. Kato, K. Vanishing cycles, ramification of valuations, and class field theory/ K. Kato// Duke Math. J. 1987. - Vol. 55 - P. 629-659.

21. Keating, K., Schwartz, P. Galois scaffolds and Galois module structure for totally ramified C_{p^2}-extensions in characteristic 0/ K. Keating, P. Schwartz// Number Theory 2022. - Vol. 239 - P. 113-136.

22. Lubin, J., Tate, J. Formal complex multiplication in local fields/ J. Lubin, J. Tate// Ann. Math. - 1965. - Vol. 81 - P. 380-387.

23. MacKenzie, R. E., Whaples, G. Artin–Schreier equations in characteristic zero/ R. E. MacKenzie, G. Whaples// Amer. J. Math. 1956 Vol. 78, P. 473-485.

24. Miki, H. On Z_p-extensions of complete p-adic power series fields and function fields/ H. Miki//J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect 1A - 1974. - Vol. 21 - P. 377-393.

25. Serre, J.-P., Local fields/ J.-P. Serre - Springer - 1979.

26. Xiao, L., Zhukov, I. Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions/ L. Xiao, I. Zhukov//Алгебра и анализ. 2014. - Т. 26 - № 5 - С. 695-740.

27. Xiao, L., Zhukov, I. Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions/ L. Xiao, I. Zhukov// in: Valuation theory in interaction. Proceedings of the 2nd international conference and workshop on valuation theory, Segovia and El Escorial, Spain, July 18-29 - 2011. Zürich: European Mathematical Society (EMS). - 2014. - P. 600-656 (Zbl 1312.14010)

28. Zhukov, I. Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields/ I. Zhukov// in book: Fesenko, I., Kurihara, M. (eds.) Invitation to Higher Local Fields. Geometry and Topology Monographs - 2000. Vol. 3 - P. 117-122.

REFERENCES

1. Boitsov, V. G., Zhukov, I. B. 2005 "Continuability of cyclic extensions of complete discrete valuation fields", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, vol. 130, № 3 (2005), pp. 4643-4650.

2. Vostokov, S. V. 1986 "Explicit construction of class field theory for a multidimensional local field" *Math. USSR-Izv.*, vol. 26, № 2, pp. 263—287.

3. Fesenko, I. B., Vostokov, S. V., Zhukov I. B. 1990, "On the theory of multidimensional local fields. Methods and constructions", *Algebra i Analiz* vol. 2, № 4. pp. 91-118.

4. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B. 1995, "Some approaches to the construction of abelian extensions for $\mathfrak{p}$-adic fields", *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, vol. III, pp. 157–174, *Amer. Math. Soc. Transl.* Ser. 2, 166, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

5. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B., Pak, G.K. 1999, "Extensions with almost maximal depth of ramification", *J. Math. Sci.*, vol. 112, № 3, pp. 4285-4302

6. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B., Ivanova, O. Yu. 2019 "Inaba extensions of complete fields of characteristic 0" *Chebyshevskii sbornik* vol. 20, № 3, pp. 124-133

7. Zhukov, I. B., 1995 "Structure theorems for complete fields", *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, vol. III, pp. 175–192, *Amer. Math. Soc. Transl.* Ser. 2, 166, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

8. Zhukov, I. B., Lysenko, E. F. 2018, "Construction of cyclic extensions of degree p^2 for a complete field", *J. Math. Sci.*, vol. 234(2), pp. 148–157

9. Zhukov I. B., Ivanova, O. Yu. 2022 "On Inaba extensions for two-dimensional local fields of mixed characteristic" *J. Math. Sci.*, to appear.

10. Zhukov I. B., Ivanova, O. Yu. "Elimination of maximal jumps" In preparation

11. Ivanova, O. Yu. 2022 "Construction of a cyclic ferocious extension by means of an Inaba equation" *J. Math. Sci.*, to appear.

12. Iwasawa, K. 1986 *Local class field theory*, Oxford University Press.

13. Cassels, J. W. S. Frohlich, A. (eds.), 1967, "*Algebraic Number Theory*", Academic Press, London and New York.

14. Lang. S. 2002 "*Algebra*", Rev. 3rd edition, Springer, New York et al.

15. Parshin, A. N. 1985 "Local class field theory" *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 165, pp. 157-185.

16. Fesenko I. B., Vostokov, S. V., 2002, "*Local fields and their extensions. A constructive approach*", Second edition, AMS, Providence, RI.

17. Hyodo, O., 1987, "Wild ramification in the imperfect residue field case", *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 12, pp. 287-314.

18. Ikeda, K. İ., Serbest E. 2021, "Local abelian Kato-Parshin reciprocity law: a survey", K. İ. Ikeda, E. Serbest *Hacet J. Math. Stat.*, vol. 50, № 5, pp. 1225-1250.

19. Inaba, E., 1961, "On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic p", *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, vol. 12, pp. 26-36.

20. Kato, K. 1987 "Vanishing cycles, ramification of valuations, and class field theory" *Duke Math. J.*, vol. 55, pp. 629-659.

21. Keating, K. and Schwartz, P., 2022 "Galois scaffolds and Galois module structure for totally ramified C_{p^2}-extensions in characteristic 0" *J. Number Theory*, vol. 239, pp. 113-136.

22. Lubin, J., Tate, J. 1965 "Formal complex multiplication in local fields", *Ann. Math.* vol. 81, pp. 380-387.

23. MacKenzie, R. E., Whaples, G., 1956, "Artin–Schreier equations in characteristic zero", *Amer. J. Math.*, vol. 78, pp. 473-485.

24. Miki, H. 1974, "On Z_p-extensions of complete p-adic power series fields and function fields", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect 1A*, vol. 21, pp. 377-393.

25. Serre, J.-P. 1979, "*Local fields*", Springer.

26. Xiao, L., Zhukov, I. 2014, "Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions", *Algebra i Analiz*, vol. 26, № 5. pp. 695-740. *St. Petersbg. Math. J.* 26, № 5, pp. 695-74

27. Xiao, L., Zhukov, I. 2014 "Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions" L. Xiao, I. Zhukov in: *Valuation theory in interaction. Proceedings of the 2nd international conference and workshop on valuation theory*, Segovia and El Escorial, Spain, July 18-29, 2011. *European Mathematical Society (EMS)*, Zürich, 2014, pp. 600-656 (Zbl 1312.14010)

28. Zhukov, I., 2000, "Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields", in book: Fesenko, I., Kurihara, M. (eds.) *Invitation to Higher Local Fields. Geometry and Topology Monographs*, vol. 3, pp. 117-122.

Получено: 15.02.2023
Принято в печать: 14.06.2023