ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-165-178

Условия разрешимости задачи Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка, где $f_1(t, x), f_2(t, x), S_1, S_2$ - известные функции

М. В. Донцова

Донцова Марина Владимировна — кандидат физико-математических наук, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (г. Нижний Новгород).
e-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru

Аннотация

Рассмотрена задача Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными свободными членами. Сформулированы и доказаны теоремы о локальном и нелокальном существовании и единственности решений задачи Коши. Определены достаточные условия существования и единственности локального решения задачи Коши в исходных координатах, при которых решение имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции задачи Коши. Определены достаточные условия существования и единственности нелокального решения задачи Коши в исходных координатах (для заданного конечного промежутка $t \in [0, T]$). Локальная теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными свободными членами доказана с помощью метода дополнительного аргумента. Исследование нелокальной разрешимости задачи Коши основано на методе дополнительного аргумента. Доказательство нелокальной разрешимости задачи Коши для системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными свободными членами опирается на глобальные оценки.

Ключевые слова: система квазилинейных уравнений, метод дополнительного аргумента, задача Коши, глобальные оценки.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
М. В. Донцова. Условия разрешимости задачи Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка, где $f_1(t, x), f_2(t, x), S_1, S_2$ - известные функции // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 165–178.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-165-178

Solvability conditions of the Cauchy problem for a system of first-order quasi-linear equations, where $f_1(t,x), f_2(t,x), S_1, S_2$ are given functions

M. V. Dontsova

Dontsova Marina Vladimirovna — candidate of physical and mathematical sciences, National Research Lobachevskii State University of Nizhni Novgorod (Nizhny Novgorod).
e-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru

Abstract

We consider a Cauchy problem for a system of two quasilinear first order partial differential equations with continuous and bounded free terms. Theorems on the local and nonlocal existence and uniqueness of solutions to the Cauchy problem are formulated and proved. The sufficient conditions for the existence and uniqueness of a local solution of the Cauchy problem in the initial coordinates at which the solution has the same smoothness with respect to x as the initial functions of the Cauchy problem are determined. The sufficient conditions for the existence and uniqueness of a nonlocal solution of the Cauchy problem in the initial coordinates (for a given finite interval $t \in [0,T]$) are determined. Local existence and uniqueness theorem of the solution of the Cauchy problem for a system of quasilinear first order partial differential equations with continuous and bounded free terms is proved with the method of an additional argument. The investigation of a nonlocal solvability of the Cauchy problem is based on the method of an additional argument. The proof of the nonlocal solvability of the Cauchy problem for a system of quasilinear first order partial differential equations with continuous and bounded free terms relies on global estimates.

Keywords: a system of quasilinear equations, the method of an additional argument, Cauchy problem, global estimates.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
M. V. Dontsova, 2023, "Solvability conditions of the Cauchy problem for a system of first-order quasi-linear equations, where $f_1(t,x), f_2(t,x), S_1, S_2$ are given functions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 165–178.

1. Введение

В работах [1], [2] определены конкретные достаточные условия локальной разрешимости задачи Коши для системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта и для системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта. В работах [3], [15] определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси.

В работах [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для некоторых видов систем квазилинейных уравнений первого порядка.

В данной работе рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \partial_t u\,(t,x) + S_1(u,v)\partial_x u\,(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + S_2(u,v)\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x),\ v(t,x)$ – неизвестные функции, $f_1(t,x),\ f_2(t,x),\ S_1,\ S_2$ – известные функции.

Для системы уравнений (1) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x). \tag{2}$$

Задача (1), (2) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \leqslant t \leqslant T,\, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

В данной работе проводится исследование условий локальной и нелокальной разрешимости задачи Коши (1), (2).

В данной работе доказываем существование и единственность локального решения задачи Коши в исходных координатах, у которого гладкость по x не ниже, чем у начальных функций задачи Коши (1), (2), если

$$\partial_u S_1 > 0,\ \partial_v S_1 < 0,\ \partial_u S_2 > 0,\ \partial_v S_2 < 0 \text{ на } Z_K,$$

$$\varphi_1'(x) \geqslant 0,\ \varphi_2'(x) \leqslant 0 \text{ на } R,\ \ \partial_x f_1 \geqslant 0,\ \partial_x f_2 \leqslant 0, \text{ на } \Omega_T,$$

где $Z_K = \{(u,v)\,|u,v \in [-K,K]\}\,,\ \ K = 2\max\{\sup\limits_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| \left|i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\right.\}$.

В данной работе доказываем существование и единственность нелокального решения задачи Коши (1), (2) в исходных координатах, если

$$\partial_u S_1 > 0,\ \partial_v S_1 < 0,\ \partial_u S_2 > 0,\ \partial_v S_2 < 0 \text{ на } Z_K,$$

$$\varphi_1'(x) \geqslant 0,\ \varphi_2'(x) \leqslant 0 \text{ на } R,\ \ \partial_x f_1 \geqslant 0,\ \partial_x f_2 \leqslant 0, \text{ на } \Omega_T,$$

где $Z_K = \{(u,v)\,|u,v \in [-K,K]\}\,,$

$$K = \max\{\sup\limits_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| \left|i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\right.\} + T\max\{\sup\limits_{\Omega_T}|f_1|\,, \sup\limits_{\Omega_T}|f_2|\,, \sup\limits_{\Omega_T}|\partial_x f_1|\,, \sup\limits_{\Omega_T}|\partial_x f_2|\}.$$

2. Существование локального решения

С помощью метода дополнительного аргумента и преобразований получена система интегральных уравнений [4]–[15]

$$\eta_1(s,t,x) = x - \int\limits_s^t S_1(w_1,w_3)d\nu, \tag{3}$$

$$\eta_2(s,t,x) = x - \int\limits_s^t S_2(w_4,w_2)d\nu, \tag{4}$$

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)) + \int\limits_0^s f_1(\nu,\eta_1)d\nu, \tag{5}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)) + \int\limits_0^s f_2(\nu,\eta_2)d\nu, \tag{6}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1),\ w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2). \tag{7}$$

Подставим (3), (4) в (5) - (7), получим следующую систему:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int\limits_0^t S_1(w_1,w_3)d\nu) + \int\limits_0^s f_1(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_1(w_1,w_3)d\tau)d\nu, \tag{8}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int\limits_0^t S_2(w_4,w_2)d\nu) + \int\limits_0^s f_2(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_2(w_4,w_2)d\tau)d\nu, \tag{9}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int\limits_s^t S_1(w_1,w_3)d\nu), \tag{10}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int\limits_s^t S_2(w_4,w_2)d\nu). \tag{11}$$

Мы будем писать, что константы $K_0,\ K_1,\ K_2...$ определяются через исходные данные, если эти константы определяются через известные характеристики задачи, нормы и экстремумы известных функций при помощи конечных алгебраических, дифференциальных или интегральных выражений, то есть в рамках исходной задачи могут быть выражены конкретным числом.

Справедливо утверждение

Утверждение 1. *Если функции $w_j,\ j = \overline{1,4}$, удовлетворяют системе интегральных уравнений (8)–(11) и являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными, то функции $u(t,x) = w_1(t,t,x),\ v(t,x) = w_2(t,t,x)$ будут решением задачи Коши (1), (2) на Ω_{T_0}, $T_0 \leqslant T$, где T_0 – константа, определяемая через исходные данные.*

Утверждение доказывается аналогично утверждению из работ [4], [5], [6], [7], [11], [12].

Обозначим $\Gamma_T = \{(s,t,x)|\, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,\ x \in (-\infty,+\infty),\ T > 0\}$,

$$C_\varphi = \max\{\sup_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| \left| i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\right.\},\ C_f = \max\{\sup_{\Omega_T}|f_1|, \sup_{\Omega_T}|f_2|, \sup_{\Omega_T}|\partial_x f_1|, \sup_{\Omega_T}|\partial_x f_2|\},$$

$Z_K = \{(u,v)\,|u,v \in [-K,K]\}$, где K - произвольно зафиксированное положительное число, $l = \max\left\{\sup\limits_{Z_K}|\partial_u S_1|, \sup\limits_{Z_K}|\partial_v S_1|, \sup\limits_{Z_K}|\partial_u S_2|, \sup\limits_{Z_K}|\partial_v S_2|\right\}$, $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ – пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T, $\bar{C}^{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n}(\Omega_*)$ – пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка α_m по m-му аргументу, $m = \overline{1,n}$, на неограниченном подмножестве $\Omega_* \subset R^n, n = 1,2....$,

$$\|U\| = \sup_{\Gamma_T}|U(s,t,x)|,\ \|f\| = \sup_{\Omega_T}|f(t,x)|.$$

Справедлива следующая теорема, в которой сформулированы условия существования локального решения задачи Коши (1), (2), которое имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции задачи Коши.

Теорема 1. *Пусть $\varphi_1,\varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$, $f_1,f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$, $S_1,S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K)$, где*

$$T \leqslant \min(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l}),\ K = 2C_\varphi,$$

и выполняются условия

$$\partial_u S_1 > 0,\ \partial_v S_1 < 0,\ \partial_u S_2 > 0,\ \partial_v S_2 < 0 \text{ на } Z_K,$$

$$\varphi_1'(x) \geqslant 0,\ \varphi_2'(x) \leqslant 0 \text{ на } R,\ \ \partial_x f_1 \geqslant 0,\ \partial_x f_2 \leqslant 0, \text{ на } \Omega_T.$$

Тогда для любого $T \leqslant \min(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l})$ *задача Коши (1), (2) имеет единственное решение* $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, *которое определяется из системы интегральных уравнений (8)–(11).*

Доказательство теоремы разбито на две леммы.

Лемма 1. *При выполнеии условий*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R),\ f_1(t,x), f_2(t,x) \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T),\ S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K),\ K = 2C_\varphi$$

и

$$T \leqslant \min(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l}) \tag{12}$$

система интегральных уравнений (8)–(11) имеет единственное решение $w_j \in C^{1,1,1}(\Gamma_T)$.

Доказательство. Доказательство этой леммы проводится по схеме, изложенной в [11]. Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (8)–(11) зададим равенствами: $w_{10}(s,t,x) = \varphi_1(x),\ w_{20}(s,t,x) = \varphi_2(x)$.

Первое и последующие приближения системы уравнений (8)–(11) определим при помощи последовательности систем уравнений ($n = 1, 2, \ldots$)

$$w_{1n} = \varphi_1(x - \int_0^t S_1(w_{1n}, w_{3n})d\nu) + \int_0^s f_1(\nu, x - \int_\nu^t S_1(w_{1n}, w_{3n})d\tau)d\nu, \tag{13}$$

$$w_{2n} = \varphi_2(x - \int_0^t S_2(w_{4n}, w_{2n})d\nu) + \int_0^s f_2(\nu, x - \int_\nu^t S_2(w_{4n}, w_{2n})d\tau)d\nu, \tag{14}$$

$$w_{3n} = w_{2(n-1)}(s, s, x - \int_s^t S_1(w_{1n}, w_{3n})d\nu), \tag{15}$$

$$w_{4n} = w_{1(n-1)}(s, s, x - \int_s^t S_2(w_{4n}, w_{2n})d\nu). \tag{16}$$

Для системы уравнений (13)–(16) нулевое приближение определим равенствами:

$$w_{jn}^0 = w_{j(n-1)},\ j = \overline{1,4}.$$

Для системы уравнений (13)–(16) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений

$$w_{1n}^{k+1} = \varphi_1(x - \int_0^t S_1(w_{1n}^k, w_{3n}^k)d\nu) + \int_0^s f_1(\nu, x - \int_\nu^t S_1(w_{1n}^k, w_{3n}^k)d\tau)d\nu, \tag{17}$$

$$w_{2n}^{k+1} = \varphi_2(x - \int_0^t S_2(w_{4n}^k, w_{2n}^k)d\nu) + \int_0^s f_2(\nu, x - \int_\nu^t S_2(w_{4n}^k, w_{2n}^k)d\tau)d\nu, \tag{18}$$

$$w_{3n}^{k+1} = w_{2(n-1)}(s, s, x - \int_s^t S_1(w_{1n}^k, w_{3n}^k)d\nu), \tag{19}$$

$$w_{4n}^{k+1} = w_{1(n-1)}(s, s, x - \int_s^t S_2(w_{4n}^k, w_{2n}^k)d\nu). \tag{20}$$

Так же, как в [5], [6], [7], [11], при выполнении условия

$$T \leqslant \min(\frac{C_\varphi}{2C_f}, \frac{1}{12C_\varphi l}) \tag{21}$$

получаем, что последовательные приближения (17)–(20) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (13)–(16), у которого существуют непрерывные и ограниченные производные $\partial_x w_{jn},\ j=\overline{1,4}$. Справедливы оценки

$$\|w_{jn}\|\leqslant 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4},\ \|\partial_x w_{1n}\|\leqslant 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{2n}\|\leqslant 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{3n}\|\leqslant 8C_\varphi,\ \|\partial_x w_{4n}\|\leqslant 8C_\varphi.$$

Так же, как в [5], [6], [7], [11], при выполнении условия (12) получаем, что последовательные приближения (13)–(16) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (8)–(11), у которого существуют непрерывные и ограниченные производные $\partial_x w_j,\ j=\overline{1,4}$. Справедливы оценки

$$\|w_j\|\leqslant 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4},\ \|\partial_x w_i\|\leqslant 4C_\varphi,\ i=1,2,\ \|\partial_x w_3\|\leqslant 8C_\varphi,\ \|\partial_x w_4\|\leqslant 8C_\varphi.$$

Аналогично доказывается, что $w_j,\ j=\overline{1,4}$, имеют непрерывные и ограниченные производные по переменной t на Γ_T. Единственность решения доказывается так же, как в статье [11].

Введем условия

$$\begin{gathered}\partial_u S_1>0,\ \partial_v S_1<0,\ \partial_u S_2>0,\ \partial_v S_2<0,\ (u,v)\in Z_K,\\ \varphi_1'(x)\geqslant 0,\ \varphi_2'(x)\leqslant 0,\quad x\in R,\ \partial_x f_1\geqslant 0,\ \partial_x f_2\leqslant 0,\ (t,x)\in\Omega_T.\end{gathered}\tag{22}$$

Лемма 2. *Пусть $\varphi_1,\varphi_2\in\bar C^2(R)$, $f_1,f_2\in\bar C^{2,2}(\Omega_T)$, $S_1,S_2\in\bar C^{2,2}(Z_K)$, $K=2C_\varphi$, тогда при выполнении условий (12), (22) функции $w_j,\ j=\overline{1,4}$, представляющие собой решение системы уравнений (8)–(11), имеют непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x\partial t}$, $j=\overline{1,4}$ на Γ_T, где $T\leqslant\min(\frac{C_\varphi}{4C_f},\frac{3}{40C_\varphi l})$.*

Доказательство.

Дважды продифференцируем последовательные приближения (13)–(16) по x и обозначим $\omega_j^n=w_{jnxx},\ j=\overline{1,4}$. В результате придем к системе уравнений

$$\begin{aligned}\omega_1^n(s,t,x)&=-\varphi_1'(x-\int_0^t S_1(w_{1n},w_{3n})d\nu)\int_0^t(\partial_u S_1\omega_1^n+\partial_v S_1\omega_3^n)d\nu-\\&-\int_0^s\partial_x f_1\int_\nu^t(\partial_u S_1\omega_1^n+\partial_v S_1\omega_3^n)d\tau d\nu+G_1(s,t,x,w_{1n},w_{3n},w_{1nx},w_{3nx}),\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}\omega_2^n(s,t,x)&=-\varphi_2'(x-\int_0^t S_2(w_{4n},w_{2n})d\nu)\int_0^t(\partial_u S_2\omega_4^n+\partial_v S_2\omega_2^n)d\nu-\\&-\int_0^s\partial_x f_2\int_\nu^t(\partial_u S_2\omega_4^n+\partial_v S_2\omega_2^n)d\tau d\nu+G_2(s,t,x,w_{2n},w_{4n},w_{2nx},w_{4nx}),\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}\omega_3^n(s,t,x)=\omega_2^{n-1}\cdot(1-\int_s^t(\partial_u S_1 w_{1nx}+\partial_v S_1 w_{3nx})d\nu)^2-w_{2(n-1)x}\int_s^t(\partial_u S_1\omega_1^n+\partial_v S_1\omega_3^n)d\nu+\\+G_3(s,t,x,w_{1n},w_{3n},w_{1nx},w_{3nx}),\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}\omega_4^n(s,t,x)=\omega_1^{n-1}\cdot(1-\int_s^t(\partial_u S_2 w_{4nx}+\partial_v S_2 w_{2nx})d\nu)^2-w_{1(n-1)x}\int_s^t(\partial_u S_2\omega_4^n+\partial_v S_2\omega_2^n)d\nu+\\+G_4(s,t,x,w_{2n},w_{4n},w_{2nx},w_{4nx}),\end{aligned}\tag{26}$$

где $G_j, j=1,2,3,4$ – известные функции.

При выполнении условия (12), учитывая оценки $\|w_{jn}\| \leqslant 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4}$, получаем

$$|\int\limits_s^t S_1(w_{1n},w_{3n})d\nu| \leqslant S_K T,\ |\int\limits_s^t S_2(w_{4n},w_{2n})d\nu| \leqslant S_K T,$$

$$S_K = \max\left\{\sup_{Z_K}|S_1|, \sup_{Z_K}|S_2|\right\},\ K=2C_\varphi.$$

Зафиксируем точку $x_0 \in R$. Рассмотрим множество

$$\Omega_{x_0} = \{x\,|x_0 - S_K T \leqslant x \leqslant x_0 + S_K T\},\ K = 2C_\varphi.$$

Возьмем $x_1, x_2 \in \Omega_{x_0}$.

Докажем, что справедливы неравенства

$$|\eta_{1n}(s,t,x_1) - \eta_{1n}(s,t,x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|, \tag{27}$$

$$|\eta_{2n}(s,t,x_1) - \eta_{2n}(s,t,x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|, \tag{28}$$

где

$$\eta_{1n}(s,t,x) = x - \int\limits_s^t S_1(w_{1n},w_{3n})d\nu,$$

$$\eta_{2n}(s,t,x) = x - \int\limits_s^t S_2(w_{4n},w_{2n})d\nu.$$

Продифференцировав последовательные приближения (13)–(16) по x, получим

$$w_{1nx} = \varphi_1'(x - \int\limits_0^t S_1(w_{1n},w_{3n})d\nu)(1 - \int\limits_0^t(\partial_u S_1 w_{1nx} + \partial_v S_1 w_{3nx})d\nu) +$$

$$+\int\limits_0^s \partial_x f_1(1 - \int\limits_\nu^t(\partial_u S_1 w_{1nx} + \partial_v S_1 w_{3nx})d\tau)d\nu, \tag{29}$$

$$w_{2nx} = \varphi_2'(x - \int\limits_0^t S_2(w_{4n},w_{2n})d\nu)(1 - \int\limits_0^t(\partial_u S_2 w_{4nx} + \partial_v S_2 w_{2nx})d\nu) +$$

$$+\int\limits_0^s \partial_x f_2(1 - \int\limits_\nu^t(\partial_u S_2 w_{4nx} + \partial_v S_2 w_{2nx})d\tau)d\nu, \tag{30}$$

$$w_{3nx} = w_{2(n-1)x}(1 - \int\limits_s^t(\partial_u S_1 w_{1nx} + \partial_v S_1 w_{3nx})d\nu), \tag{31}$$

$$w_{4nx} = w_{1(n-1)x}(1 - \int\limits_s^t(\partial_u S_2 w_{4nx} + \partial_v S_2 w_{2nx})d\nu). \tag{32}$$

Предположим, что

$$w_{1(n-1)x} \geqslant 0,\ w_{2(n-1)x} \leqslant 0. \tag{33}$$

При выполнении условия (12) с учетом оценок

$$\|\partial_x w_{1n}\| \leqslant 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{2n}\| \leqslant 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{3n}\| \leqslant 8C_\varphi,\ \|\partial_x w_{4n}\| \leqslant 8C_\varphi$$

получаем, что для всех $n \in N$ на Γ_T справедливы неравенства:

$$1 - \int\limits_s^t(\partial_u S_1 w_{1nx} + \partial_v S_1 w_{3nx})d\nu > 0,\ 1 - \int\limits_0^t(\partial_u S_2 w_{4nx} + \partial_v S_2 w_{2nx})d\nu > 0. \tag{34}$$

Из (31), (32), (33), (34) следует, что $w_{3nx} \leqslant 0,\ w_{4nx} \geqslant 0$.

Из (2), (2) при выполнении условий (22) с учетом неравенств (34), получаем

$$w_{1nx} \geqslant 0,\ w_{2nx} \leqslant 0.$$

Так как $w_{1nx} \geqslant 0,\ w_{2nx} \leqslant 0,\ w_{3nx} \leqslant 0,\ w_{4nx} \geqslant 0$, то

$$1 - \int\limits_s^t (\partial_u S_1 w_{1nx} + \partial_v S_1 w_{3nx}) d\nu \leqslant 1,\ 1 - \int\limits_s^t (\partial_u S_2 w_{4nx} + \partial_v S_2 w_{2nx}) d\nu \leqslant 1. \tag{35}$$

В силу неравенств (34) и (35), по теореме о конечных приращениях получаем, что справедливы неравенства (27), (28).

Так же, как в [5], [6], при выполнении условий (12), (22) получаем, что справедливы неравества

$$|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| < \Phi_{1n} +$$
$$+0.1(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|),$$
$$|\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)| < \Phi_{2n} + \left|\omega_2^{n-1}(s,s,\eta_{1n}(s,t,x_1)) - \omega_2^{n-1}(s,s,\eta_{1n}(s,t,x_2))\right| +$$
$$+0.3(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|),$$

где Φ_{1n}, Φ_{2n} - последовательности такие, что для любого сколько угодно малого числа ε можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех n будет $\Phi_{1n} < 0.5\varepsilon,\ \Phi_{2n} < 0.5\varepsilon$ при $|x_1 - x_2| < \delta$.

Следовательно,

$$|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| < 0.5\varepsilon +$$
$$+0.1(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|),$$
$$|\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)| < 0.5\varepsilon + |\omega_2^{n-1}(s,s,\eta_{1n}(s,t,x_1)) - \omega_2^{n-1}(s,s,\eta_{1n}(s,t,x_2))| +$$
$$+0.3(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|).$$

Доказано, что при $|x_1 - x_2| < \delta$ справедливы неравенства:

$$|\omega_i^0(s,t,x_1) - \omega_i^0(s,t,x_2)| < \varepsilon,\ |\omega_i^1(s,t,x_1) - \omega_i^1(s,t,x_2)| < \varepsilon,\ i = 1,2.$$

Предположим, что для некоторого $n-1$, $(n = 1, 2, \ldots)$ при $|x_1 - x_2| < \delta$:

$$|\omega_1^{(n-1)}(s,t,x_1) - \omega_1^{(n-1)}(s,t,x_2)| < \varepsilon,\ |\omega_2^{(n-1)}(s,t,x_1) - \omega_2^{(n-1)}(s,t,x_2)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| < 0.5\varepsilon +$$
$$+0.1(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|), \tag{36}$$
$$|\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)| < 1.5\varepsilon +$$
$$+0.3(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|). \tag{37}$$

Сложим неравенства (2) и (2), получим:

$$|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)| < 2\varepsilon$$
$$+0.4(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|).$$

Следовательно,

$$|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)| < \frac{10}{3}\varepsilon. \tag{38}$$

Из неравенств (2) и (38) следует, что $|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| < \varepsilon$ при $|x_1 - x_2| < \delta$.

Аналогично $|\omega_2^n(s,t,x_1)-\omega_2^n(s,t,x_2)|<\varepsilon$ при $|x_1-x_2|<\delta$.

Итак, последовательности $\{\omega_i^n(s,t,x)\}$, $i=1,2$ равностепенно непрерывны по x при $x\in\Omega_{x_0}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\tilde\omega_1^n=-\varphi_1'(x-\int\limits_0^t S_1(w_1,w_3)d\nu)\int\limits_0^t(\partial_uS_1\tilde\omega_1^n+\partial_vS_1\tilde\omega_3^n)d\nu-$$

$$-\int\limits_0^s\partial_xf_1\int\limits_\nu^t(\partial_uS_1\tilde\omega_1^n+\partial_vS_1\tilde\omega_3^n)d\tau d\nu+G_1(s,t,x,w_1,w_3,w_{1x},w_{3x}),\tag{39}$$

$$\tilde\omega_2^n=-\varphi_2'(x-\int\limits_0^t S_2(w_4,w_2)d\nu)\int\limits_0^t(\partial_uS_2\tilde\omega_4^n+\partial_vS_2\tilde\omega_2^n)d\nu-$$

$$-\int\limits_0^s\partial_xf_2\int\limits_\nu^t(\partial_uS_2\tilde\omega_4^n+\partial_vS_2\tilde\omega_2^n)d\tau d\nu+G_2(s,t,x,w_2,w_4,w_{2x},w_{4x}),\tag{40}$$

$$\tilde\omega_3^n=\tilde\omega_2^{n-1}\cdot(1-\int\limits_s^t(\partial_uS_1w_{1x}+\partial_vS_1w_{3x})d\nu)^2-w_{2x}\int\limits_s^t(\partial_uS_1\tilde\omega_1^n+\partial_vS_1\tilde\omega_3^n)d\nu+$$

$$+G_3(s,t,x,w_1,w_3,w_{1x},w_{3x}),\tag{41}$$

$$\tilde\omega_4^n=\tilde\omega_1^{n-1}\cdot(1-\int\limits_s^t(\partial_uS_2w_{4x}+\partial_vS_2w_{2x})d\nu)^2-w_{1x}\int\limits_s^t(\partial_uS_2\tilde\omega_4^n+\partial_vS_2\tilde\omega_2^n)d\nu+$$

$$+G_4(s,t,x,w_2,w_4,w_{2x},w_{4x}),\tag{42}$$

где $G_j, j=1,2,3,4$ – известные функции.

При выполнении условий (12), (22) при каждом n существует решение системы (39)–(2), $\tilde\omega_j^n\to\tilde\omega_j,\ j=\overline{1,4}$. Справедливы оценки

$$\|\tilde\omega_1\|\leqslant 2C_\varphi,\ \|\tilde\omega_2\|\leqslant 2C_\varphi,\ \|\tilde\omega_3\|\leqslant 4C_\varphi,\ \|\tilde\omega_4\|\leqslant 4C_\varphi.$$

При выполнении условий (12), (22) доказано, что последовательные приближения ω_j^n сходятся к функциям $\tilde\omega_j,\ \ j=\overline{1,4}$ при $n\to\infty$ на Γ_T.

При выполнении условий (12), (22) доказано, что $w_{jnxx}\to w_{jxx}=\tilde\omega_j$, где функции $\frac{\partial^2w_j}{\partial x^2}$, $j=\overline{1,4}$, непрерывны и ограничены на Γ_T.

При выполнении условий (12), (22) доказано, что существуют непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial^2w_j}{\partial x\partial t},\ \ j=\overline{1,4}$ на Γ_T.

3. Существование нелокального решения

Справедлива теорема, в которой сформулированы достаточные условия существования и единственности нелокального решения задачи Коши в исходных координатах (для заданного конечного промежутка $t\in[0,T]$).

Теорема 2. *Пусть $\varphi_1,\varphi_2\in\bar C^2(R)$, $f_1,f_2\in\bar C^{2,2}(\Omega_T)$, $S_1,S_2\in\bar C^{2,2}(Z_K)$, $K=C_\varphi+TC_f$ и выполняются условия (22). Тогда для любого $T>0$ задача Коши (1), (2) имеет единственное решение $u(t,x),v(t,x)\in\bar C^{1,2,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений (8)–(11).*

Доказательство. Для доказательства существования нелокального решения исходной задачи и вывода для него глобальных оценок, надо дополнить систему (3)–(7) двумя уравнениями. Сначала продифференцируем систему уравнений (1) по x и обозначим

$$p(t,x)=\partial_x u(t,x),\quad q(t,x)=\partial_x v(t,x).$$

Получим систему

$$\begin{cases} \partial_t p+S_1(u,v)\partial_x p=-\partial_u S_1 p^2-\partial_v S_1 pq+\partial_x f_1, \\ \partial_t q+S_2(u,v)\partial_x q=-\partial_v S_2 q^2-\partial_u S_2 pq+\partial_x f_2, \\ p(0,x)=\varphi_1'(x),\quad q(0,x)=\varphi_2'(x). \end{cases} \tag{43}$$

Добавим к системе уравнений (3)–(7) два уравнения

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_1(s,t,x)}{ds}=-\partial_u S_1\gamma_1^2(s,t,x)-\partial_v S_1\gamma_1(s,t,x)\gamma_2(s,s,\eta_1)+\partial_x f_1(s,\eta_1), \\ \frac{d\gamma_2(s,t,x)}{ds}=-\partial_v S_2\gamma_2^2(s,t,x)-\partial_u S_2\gamma_1(s,s,\eta_2)\gamma_2(s,t,x)+\partial_x f_2(s,\eta_2), \end{cases} \tag{44}$$

с начальными условиями

$$\gamma_1(0,t,x)=\varphi_1'(\eta_1),\quad \gamma_2(0,t,x)=\varphi_2'(\eta_2). \tag{45}$$

Перепишем систему уравнений (44) в следующем виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1(s,t,x)=\varphi_1'(\eta_1)+\int\limits_0^s[-\partial_u S_1\gamma_1^2-\partial_v S_1\gamma_1\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1)+\partial_x f_1]d\nu, \\ \gamma_2(s,t,x)=\varphi_2'(\eta_2)+\int\limits_0^s[-\partial_v S_2\gamma_2^2-\partial_u S_2\gamma_2\gamma_1(\nu,\nu,\eta_2)+\partial_x f_2]d\nu. \end{array} \right\} \tag{46}$$

Доказательство существования непрерывного решения системы (46) на Γ_T при выполнении условий (12), (22) проводится с помощью метода последовательных приближений. Определим последовательные приближения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1^{n+1}(s,t,x)=\varphi'{}_1(\eta_1)+\int\limits_0^s[-\partial_u S_1(\gamma_1^n)^2-\partial_v S_1\gamma_1^n\gamma_2^n(\nu,\nu,\eta_1)+\partial_x f_1]d\nu, \\ \gamma_2^{n+1}(s,t,x)=\varphi'{}_2(\eta_2)+\int\limits_0^s[-\partial_v S_2(\gamma_2^n)^2-\partial_u S_2\gamma_2^n\gamma_1^n(\nu,\nu,\eta_2)+\partial_x f_2]d\nu, \end{array} \right\} \tag{47}$$

при этом $\gamma_1^0(s,t,x)=\varphi_1'(\eta_1),\quad \gamma_2^0(s,t,x)=\varphi_2'(\eta_2)$.

Аналогично, как [4], [5], [6], [7], доказано, что последовательные приближения (47) сходятся к непрерывному и оганиченному решению системы (46), у которого существуют непрерывные и оганиченные производные по t и x. Следовательно,

$$\gamma_1(t,t,x)=p(t,x)=\frac{\partial u}{\partial x},\gamma_2(t,t,x)=q(t,x)=\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Из (5), (6), учитывая, что $u(t,x)=w_1(t,t,x)$, $v(t,x)=w_2(t,t,x)$, получаем при всех t и x на Ω_T справедливы оценки

$$\|u\|\leqslant C_\varphi+TC_f,\ \|v\|\leqslant C_\varphi+TC_f. \tag{48}$$

Из (44) получаем систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1(s,t,x)=\varphi_1'(\eta_1)\exp(-\int\limits_0^s(\partial_u S_1\gamma_1+\partial_v S_1\gamma_2)\,d\nu)+ \\ +\int\limits_0^s\partial_x f_1\exp(-\int\limits_\tau^s(\partial_u S_1\gamma_1+\partial_v S_1\gamma_2)\,d\nu)d\tau, \\ \gamma_2(s,t,x)=\varphi_2'(\eta_2)\exp(-\int\limits_0^s(\partial_u S_2\gamma_1+\partial_v S_2\gamma_2)\,d\nu)+ \\ +\int\limits_0^s\partial_x f_2\exp(-\int\limits_\tau^s(\partial_u S_2\gamma_1+\partial_v S_2\gamma_2)\,d\nu)d\tau. \end{array} \right\}. \tag{49}$$

Из (49) при выполнении условий $\varphi_1'(x) \geqslant 0,\ \varphi_2'(x) \leqslant 0, \quad x \in R,\ \partial_x f_1 \geqslant 0,\ \partial_x f_2 \leqslant 0,\ (t,x) \in \in \Omega_T$, следует, что $\gamma_1 \geqslant 0,\ \gamma_2 \leqslant 0$ на Γ_T. Так как $\gamma_1 \geqslant 0,\ \gamma_2 \leqslant 0$ на Γ_T, то при выполнении условий $\partial_u S_1 > 0,\ \partial_v S_1 < 0,\ \partial_u S_2 > 0,\ \partial_v S_2 < 0,\ (u,v) \in Z_K,\ K = C_\varphi + TC_f$, получаем, что справедливы оценки $\|\gamma_i\| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ i = 1,2$. Следовательно,

$$\|\partial_x u\| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ \|\partial_x v\| \leqslant C_\varphi + TC_f. \tag{50}$$

Так же, как в [4], [6], доказано, что при всех t и x справедливы оценки:

$$|\partial^2_{x^2} u| \leqslant E_{11} ch\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + \frac{E_{21}C_{12} + C_{13}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}} sh\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + C_{12}C_{23}t^2, \tag{51}$$

$$|\partial^2_{x^2} v| \leqslant E_{21} ch\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + \frac{E_{11}C_{21} + C_{23}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}} sh\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + C_{21}C_{13}t^2, \tag{52}$$

где $E_{11},\ E_{21},\ C_{12},\ C_{13},\ C_{21},\ C_{23}$ – постоянные, которые определяются через исходные данные.

Полученные глобальные оценки для $u,\ v,\ \partial_x u,\ \partial_x v,\ \partial^2_{x^2} u,\ \partial^2_{x^2} v$ ((48), (50)–(52)) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток $[0,\ T]$.

Возьмем в качестве начальных значений $u(T_0, x),\ v(T_0, x)$, используя теорему 1, продлим решение на промежуток $[T_0,\ T_1]$, а затем, возьмем начальные значения $u(T_1, x),\ v(T_1, x)$, используя теорему 1, продлим решение на промежуток $[T_1,\ T_2]$. В результате за конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток $[0,\ T]$. Единственность решения доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений.

4. Заключение

С помощью метода дополнительного аргумента определен вариант достаточных условий существования и единственности локального решения задачи Коши (1), (2), которое имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции задачи Коши и вариант достаточных условий существования и единственности нелокального решения задачи Коши (1), (2), где $f_1(t,x),\ f_2(t,x),\ S_1,\ S_2$ – известные функции.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеенко С. Н., Донцова М. В. Исследование разрешимости системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2012. Вып. 14. С.34–41.

2. Алексеенко С. Н., Донцова М. В. Локальное существование ограниченного решения системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2013. Вып. 15. С.52–59.

3. Алексеенко С. Н., Донцова М. В. Условия разрешимости системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси. // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 2. С. 115–124.

4. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико – математические науки. 2013. №3 (177). С. 190–201.

5. Донцова М. В. Нелокальное существование ограниченного решения системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. №3. С. 21 – 36.

6. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2014. №4. С. 116 – 130.

7. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида // Уфимский математический журнал. 2014. Т.6, №4. С. 71-82.

8. Донцова М. В. Исследование разрешимости системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со свободными членами // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014». М.: МАКС Пресс. 2014. 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM).

9. Донцова М. В. Исследование разрешимости одной системы квазилинейных уравнений первого порядка // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. М: МИАН. Суздаль, 2016. С. 68.

10. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 4. С. 384–394.

11. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. 2001. Т.379, №1. С. 16–21.

12. Иманалиев М. И., Панков П. С., Алексеенко С. Н. Метод дополнительного аргумента // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. Спец. выпуск. 2006. №1. С. 60–64.

13. Шемякина Т. А. Условия существования и дифференцируемости решения системы Франкля в гиперболическом случае // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т.13, №2. С. 127–131.

14. Шемякина Т. А. Теорема существования ограниченного решения задачи Коши для системы Франкля гиперболического типа // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2012. № 2 (146). С. 130–140.

15. Alekseenko S. N., Dontsova M. V., Pelinovsky D. E. Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument // Applicable Analysis. 2017. V. 96. № 9. P. 1444–1465.

REFERENCES

1. Alekseenko, S. N. & Dontsova, M. V. 2012 , “The investigation of a so lvability of the system of equations, describing a distribution of electrons in an electric field of sprite“, *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, issue 14, pp. 34-41.

2. Alekseenko, S. N. & Dontsova, M. V. 2013 , “The local existence of a bounded solution of the system of equations, describing a distribution of electrons in low-pressure plasma in an electric field of sprite“, *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, issue 15, pp. 52-59.

3. Alekseenko, S. N. & Dontsova, M. V. 2016 , “The solvability conditions of the system of long waves in a water rectangular channel, the depth of which varies along the axis“, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, vol. 18, no. 2, pp. 115-124.

4. Alekseenko, S. N., Shemyakina, T. A. & Dontsova, M. V. 2013 , “Nonlocal solvability conditions for systems of first order partial differential equations“, *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko – matematicheskie nauki*, no 3 (177), pp. 190-201.

5. Dontsova, M. V. 2014 , “The nonlocal existence of a bounded solution of the Cauchy problem for a system of two first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides“, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika*, no. 3, pp. 21-36.

6. Dontsova, M. V. 2014 , “ Nonlocal solvability conditions of the Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides“, *Vestnik VGU. Seriya: Fizika. Matematika*, no. 4, pp. 116-130.

7. Dontsova, M. V. 2014 , “ Nonlocal solvability conditions for Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with special right-hand sides“, *Ufa Mathematical Journal*, vol. 6, no. 4, pp. 71-82.

8. Dontsova, M. V. “Study of solvability for a system of first order partial differential equations with free terms“, *Materialy Mezhdunarodnogo molodezhnogo nauchnogo foruma «LOMONOSOV-2014»*, Moscow, 2014, 1 electron. wholesale. disc (DVD-ROM).

9. Dontsova, M. V. “Investigation of the solvability of a system of quasilinear equations of the first order“, *Mezhdunarodnaya konferenciya po differencial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam. Tezisy dokladov* , Suzdal, 2016. pp. 68.

10. Dontsova, M. V. 2018 , “The nonlocal solvability conditions for a system of quasilinear equations of the first order special right-hand sides“, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, vol. 20, no. 4, pp. 384-394.

11. Imanaliev, M. I. & Alekseenko, S. N. 2001, “To the question of the existence of a smooth bounded solution for a system of two first-order nonlinear partial differential equations“, *Doklady RAN,* vol. 379, no. 1, pp. 16-21.

12. Imanaliev, M. I., Pankov, P. S. & Alekseenko, S. N. 2006, “Method of an additional argument“, *Vestnik KazNU. Ceriya matematika, mekhanika, informatika. Spec. vypusk*, no. 1, pp. 60-64.

13. Shemyakina, T. A. 2011 , “Conditions for the existence and dierentiability of solutions of Frankl in the hyperbolic case“, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, vol. 13, no. 2, pp. 127-131.

14. Shemyakina, T. A. 2012 , “The theorem on existence of a bounded solution of the Cauchy problem for the Frankl system of hyperbolic type“, *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko – matematicheskie nauki*, no 2 (146), pp. 130-140.

15. Alekseenko, S. N., Dontsova, M. V. & Pelinovsky D. E. 2017, “Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument“, *Applicable Analysis*, vol. 96, no. 9, pp. 1444–1465.

Получено: 24.01.2019
Принято в печать: 14.06.2023