ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 2.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-154-164

Области сходимости дзета-функции некоторых моноидов натуральных чисел[1]

М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе исследуется вопрос об области абсолютной сходимости дзета-ряда для некоторых моноидов натуральных чисел. Рассмотрены два основных случая: моноиды с C степенной θ-плотностью и моноиды с C-логарифмической θ-степенной плотностью.

Введено новое понятие — сильная $\vec{C} = (C_1, \ldots, C_n)$ степенная $\vec{\theta}$-плотность. Для дзета-функции последовательности натуральных чисел A с сильной $\vec{C} = (C_1, \ldots, C_n)$ степенной $\vec{\theta}$-плотностью доказана теорема, согласно которой дзета-функция $\zeta(A|\alpha)$ является аналитической функцией переменной α, регулярной при $\sigma > 0$, имеющая n полюсов первого порядка, и найдены вычеты в этих полюсах.

Для случая C логарифмической θ-степенной плотности доказан принципиально другой результат: если моноид M имеет C логарифмическую θ-степенную плотность с $0 < \theta < 1$, то дзета-функция моноида M имеет область голоморфности полуплоскость $\sigma > 0$ и мнимая ось является линией особенностей.

В третьем разделе рассмотрен вопрос об аналитическом продолжении дзета-функции моноида натуральных чисел в трёх случаях: для моноида k-ых степеней натуральных чисел, для множества натуральных чисел свободных от k-ых степеней и для объединения двух моноидов k-ых степеней натуральных чисел, когда показатели степеней взаимно простые числа.

Во всех трёх случаях показано, что аналитическое продолжение существует на всю комплексную плоскость. Найдены функциональные уравнения для каждого из трёх случаев. Они все имеют принципиально разный вид. Кроме этого, для каждого аналитического продолжения в критической полосе найдены новые свойства дзета-функции, которые отсутствуют у дзета-функции Римана.

В заключении перечислены перспективные, актуальные темы дальнейших исследований.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел.

Библиография: 20 названий.

[1]Исследование выполнено по гранту РНФ № 22-21-00544 «Дзета-функция моноидов натуральных чисел и смежные вопросы».

Для цитирования:
М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Области сходимости дзета-функции некоторых моноидов натуральных чисел // Чебышевский сборник, 2023, Т. 24, вып. 2, С. 154–164.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-154-164

Convergence domains of the zeta function of some monoids of natural numbers[2]

M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical centre of RAS (Moscow).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

The paper investigates the question of the domain of absolute convergence of the zeta series for some monoids of natural numbers. Two main cases are considered: monoids with C powerθ-density and monoids with C-logarithmic θ-power density.

A new concept is introduced — strong $\vec{C} = (C_1, \ldots, C_n)$ power $\vec{\theta}$ is the density. For the zeta function of a sequence of natural numbers A with a strong $\vec{C} = (C_1, \ldots, C_n)$power $\vec{\theta}$-density proved the theorem according to which the zeta function $\zeta(A|\alpha)$ is an analytical function of the variable α, regular at $\sigma > 0$, having n poles of the first order, and deductions are found in these poles.

For the case of C logarithmic θ-power density, a fundamentally different result is proved: if the monoid M has a C logarithmicθ-power density with $0 < \theta < 1$, then the zeta function of the monoid M has a holomorphic half-plane $\sigma > 0$ and the imaginary axis is the singularity line.

In the third section, the question of the analytical continuation of the zeta function of the monoid of natural numbers in three cases is considered: for a monoid of k-th powers of natural numbers, for a set of natural numbers free of k-th powers, and for the union of two monoids of k-th powers of natural numbers when the exponents of the degrees are mutually prime numbers.

In all three cases, it is shown that the analytic continuation exists on the entire complex plane. Functional equations are found for each of the three cases. They all have a fundamentally different look. In addition, new properties of the zeta function that are missing from the Riemann zeta function are found for each analytic continuation in the critical band.

In conclusion, promising, relevant topics for further research are listed.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, the zeta function of the monoid of natural numbers.

Bibliography: 20 titles.

[2]The study was carried out under the grant from the RSF No. 22-21-00544 “Zeta function of monoids of natural numbers and related issues”.

For citation:
M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2023, "Convergence domains of the zeta function of some monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 154–164.

1. Введение

Общее определение дзета-функции произвольного множества натуральных чисел следующее [5]:

Определение 1. *Для любого множества A натуральных чисел определим дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ равенством*

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{x \in A} \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\, \sigma > \sigma_A), \tag{1}$$

где σ_A — абсцисса абсолютной сходимости.

Если множество A конечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ на всей комплексной α-плоскости. Если множество A бесконечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ только при $\sigma > \sigma_A$, при этом обязательно в точке $\alpha = \sigma_A$ будет полюс первого порядка и $0 \leqslant \sigma_A \leqslant 1$, так как это следует из свойств дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(\alpha)$. Отметим, что при $\sigma > \sigma_A$ ряд абсолютно сходится, а при $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > \sigma_A$ ряд равномерно сходится.

Будем через $M(A)$ обозначать минимальный мультипликативный моноид, содержащий множество A. Таким образом, мы имеем:

$$M(A) = \{a_1 \dots a_l | a_1, \dots, a_l \in A, l \geqslant 0\}.$$

Здесь мы используем естественное соглашение, что пустое произведение равно 1.

Нетрудно понять, что имеется несчетное множество моноидов натуральных чисел и, следовательно, несчетное множество различных дзета-функций моноидов натуральных чисел.

Исследованию области абсолютной сходимости дзета-ряда для дзета-функции моноида натуральных чисел посвящено несколько работ [5, 6, 7, 8, 9, 11, 12]. Так как каждый такой ряд является рядом Дирихле, то для него определено понятие абсциссы абсолютной сходимости.

Следуя за Б. М. Бредихиным [1], обозначим через $\nu_M(x)$ — количество элементов моноида M, непревосходящих x, а через $\pi_M(x)$ — количество простых элементов, непревосходящих x.

Работы по дзета-функции моноидов натуральных чисел оказались тесно связаны с циклом работ Б. М. Бредихина о чём говорится в обзорной работе [4].

Б. М. Бредихин работал с понятием степенной плотности последовательности (см. [1]), и для таких последовательностей элементарными методами получал асимптотический закон распределения образующих элементов. Для моноидов это понятие звучит следующим образом:

Определение 2. *Моноид M натуральных чисел имеет C степенную θ-плотность, если существует предел*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\nu_M(x)}{x^\theta} = C. \tag{2}$$

Ясно, что натуральный ряд имеет единичную степенную 1-плотность.

Пусть $\mathbb{P}_k = \{2^k, 3^k, 5^k, \dots\}$ — множество k-ых степеней всех простых чисел. Ясно, что $M(\mathbb{P}) = \mathbb{N}$, а $M(\mathbb{P}_k) = \mathbb{N}_k = \{1^k, 2^k, 3^k, 4^k, \dots\}$ — множество k-ых степеней всех натуральных чисел. Моноид $M(\mathbb{P}_k)$ — с однозначным разложением на простые элементы, а множеством простых элементов являются псевдопростые числа, которые образуют множество $\mathbb{P}_k$. Легко видеть, что моноид $M(\mathbb{P}_k)$ имеет единичную степенную $\frac{1}{k}$-плотность, так как $\nu_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = [x^{\frac{1}{k}}]$. Так как $\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = \pi(x^{\frac{1}{k}})$, то справедлив асимптотический закон

$$\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) \sim k\frac{x^{\frac{1}{k}}}{\ln x},$$

который согласно Б. М. Бредихину можно получить элементарно, минуя асимптотический закон для простых чисел.

Наилучший результат здесь получается, конечно, исходя из оценок И. М. Виноградова [2] и Н. М. Коробова [20]:

$$\pi(x) = \int\limits_2^x \frac{dx}{\ln x} + O\left(xe^{-a(\ln x)^{0.6}(\ln\ln x)^{-0.2}}\right),$$

$$\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = \int\limits_2^{x^{\frac{1}{k}}} \frac{dx}{\ln x} + O\left(x^{\frac{1}{k}}e^{-a(\frac{1}{k}\ln x)^{0.6}(\ln\ln x-\ln k)^{-0.2}}\right),$$

где $a > 0$ — некоторая положительная константа.

Здесь используется очевидное равенство $\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha) = \zeta(k\alpha)$.

Планируется получить условия, связывающие плотность распределения элементов моноида натуральных чисел и абсциссы абсолютной сходимости дзета-функции моноида. Здесь подразумевается рассмотреть следующие случаи: степенная плотность и C-логарифмическая θ-степенная плотность. Исходя из функции распределения элементов моноида, получить интегральное представление для дзета-функции моноида с помощью теоремы Абеля и найти полюс с помощью асимптотической формулы для функции распределения со степенной плотностью. По-видимому, в случае C-логарифмической θ-степенной плотности абсцисса абсолютной сходимости всегда равна 0. В пользу последнего предположения следует отнести результаты статьи [17] о свойствах дзета-функции моноида с экспоненциальной последовательностью простых и статьи [8], в которой установлена область голоморфности этой дзета-функции. Аналогичные результаты установлены в работах [10] и [18] для дзета-функции основного моноида типа q.

Цель данной статьи — получить новые результаты в этом направлении исследований.

2. Области абсолютной сходимости

Прежде всего выпишем интегральное представление для дзета-функции моноида M с помощью теоремы Абеля:

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{x\in M}\frac{1}{x^\alpha} = \alpha\int\limits_1^\infty \frac{\nu_M(x)}{x^{\alpha+1}}dx \quad (\alpha = \sigma + it,\, \sigma > \sigma_M),$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости.

Теорема 1. *Если моноид M имеет C степенную θ-плотность, то для абсциссы абсолютной сходимости справедливо равенство $\sigma_M = \theta$, в точке $\alpha = \theta$ полюс первого порядка и для вычета справедливо равенство*

$$\mathrm{Res}_{\alpha=\theta}\zeta(M|\alpha) = C\cdot\theta.$$

Доказательство. Действительно, из определения C степенной θ-плотности следует, что $\nu_M(x) = C\cdot x^\theta + r(x)$, где $r(x) = x^\theta\cdot\delta(x)$ и $\delta(x) = o(1)$.

Применяя интегральное представление, получим

$$\zeta(M|\alpha) = \alpha\int\limits_1^\infty \frac{C\cdot x^\theta + x^\theta\cdot\delta(x)}{x^{\alpha+1}}dx = \frac{\alpha\cdot C}{\alpha-\theta} + \alpha\int\limits_1^\infty \frac{\delta(x)}{x^{\alpha+1-\theta}}dx = C + \frac{\theta\cdot C}{\alpha-\theta} + \alpha\int\limits_1^\infty \frac{\delta(x)}{x^{\alpha+1-\theta}}dx.$$

Так как числитель последнего интеграла ограничен, то этот несобственный интеграл сходится при $\sigma > \theta$, причем равномерно в любой полуплоскости $\sigma \geqslant \theta_0 > \theta$. $\square$

Сравнивая полученный результат с теорией дзета-функции Римана, мы видим, что последний интеграл не увеличивает область абсолютной сходимости. Объяснение этому факту достаточно простое — определение C степенной θ-плотности не дает существенной оценки остаточного члена для функции распределения, в то время как для дзета-функции Римана мы имеем $O(1)$ в сравнении с x для главного члена. Поэтому естественно дать следующее определение.

Определение 3. *Пусть $\vec{\theta} = (\theta_1,\ldots,\theta_n)$ и $1 \geqslant \theta_1 > \theta_1 > \ldots > \theta_n > 0$, тогда будем говорить что бесконечная последовательность $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_k < \ldots\}$ натуральных чисел имеет сильную $\vec{C} = (C_1,\ldots,C_n)$ степенную $\vec{\theta}$-плотность, если для функции распределения $\nu_A(x)$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\nu_A(x) = \sum_{j=1}^n C_j\cdot x^{\theta_j} + r(x),\quad r(x) = O(1).$$

Рассмотрим пример множества $A_{\mathbb{N},\frac{1}{\theta}}$ из работы [6] при $0 < \theta < 1$. Согласно лемме 1 из этой работы для любого натурального n справедливо неравенство $\left[n^{\frac{1}{\theta}}\right] < \left[(n+1)^{\frac{1}{\theta}}\right]$. По определению бесконечное множество $A_{\mathbb{N},\frac{1}{\theta}}$ задается равенством

$$A_{\mathbb{N},\frac{1}{\theta}} = \left\{\left[n^{\frac{1}{\theta}}\right]\Big| n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Лемма 1. *Для любого $0 < \theta < 1$ множество $A_{\mathbb{N},\frac{1}{\theta}}$ имеет единичную сильную θ-степенную плотность:*

$$\nu_{A_{\mathbb{N},\frac{1}{\theta}}}(x) = x^\theta + r(x),\quad |r(x)| \leqslant 1.$$

Доказательство. Действительно, для наибольшего n неравенство $\left[n^{\frac{1}{\theta}}\right] \leqslant x$ влечёт неравенства $\left[n^{\frac{1}{\theta}}\right]^\theta \leqslant x^\theta < \left[(n+1)^{\frac{1}{\theta}}\right]^\theta$. Отсюда следует, что $x^\theta < n+1$. С другой стороны, $\left[n^{\frac{1}{\theta}}\right] \leqslant x < \left[(n+1)^{\frac{1}{\theta}}\right]$, $n^{\frac{1}{\theta}} < (x+1)$ и, следовательно, $n < (x+1)^\theta$. Так как $\theta < 1$, то $(x+1)^\theta < x^\theta + 1$ и, следовательно, $\nu_{A_{\mathbb{N},\frac{1}{\theta}}}(x) = x^\theta + r(x)$, где $|r(x)| \leqslant 1$. $\square$

Определим множество $A_{\vec{\theta}}$ с помощью равенства

$$A_{\vec{\theta}} = \bigcup_{j=1}^n A_{\mathbb{N},\frac{1}{\theta_j}}.$$

Очевидно, что

$$\nu_{A_{\vec{\theta}}}(x) \leqslant \sum_{j=1}^n \nu_{A_{\mathbb{N},\frac{1}{\theta_j}}}(x).$$

Лемма 2. *Для последовательности $A_{(\frac{1}{2},\frac{1}{3})}$ имеет место сильная $(1,1,-1)$ $(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6})$-степенная плотность:*

$$\nu_{A_{(\frac{1}{2},\frac{1}{3})}}(x)=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}+r(x),\quad |r(x)|\leqslant 3.$$

Доказательство. Действительно, $A_{\mathbb{N},2}\bigcap A_{\mathbb{N},3}=A_{\mathbb{N},6}$. Поэтому справедливо равенство

$$\nu_{A_{(\frac{1}{2},\frac{1}{3})}}(x)=\nu_{A_{\mathbb{N},2}}(x)+\nu_{A_{\mathbb{N},3}}(x)-\nu_{A_{\mathbb{N},6}}(x).$$

Применяя лемму 1, получим доказываемое утверждение. □

Заметим, что аналогичные утверждения справедливы и для других случаев $\vec{\theta}$, но имеют более сложные формулировки.

Теорема 2. *Если множество A имеет сильную $\vec{C}=(C_1,\ldots,C_n)$ степенную $\vec{\theta}$-плотность, то для абсциссы абсолютной сходимости справедливо равенство $\sigma_M=\theta_1$, в точке $\alpha=\theta_1$ полюс первого порядка и для вычета справедливо равенство*

$$\mathrm{Res}_{\alpha=\theta_1}\zeta(A|\alpha)=C_1\cdot\theta_1.$$

Кроме этого, дзета-функция $\zeta(A|\alpha)$ является аналитической функцией переменной α, регулярной при $\sigma>0$ кроме точек $\alpha=\theta_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$, в которых полюса первого порядка с вычетами

$$\mathrm{Res}_{\alpha=\theta_j}\zeta(A|\alpha)=C_j\cdot\theta_j,\quad j=1,2,\ldots,n.$$

Доказательство. Действительно, из определения сильной $\vec{C}=(C_1,\ldots,C_n)$ степенной $\vec{\theta}$-плотности следует, что

$$\nu_A(x)=\sum_{j=1}^{n}C_j\cdot x^{\theta_j}+r(x),\quad r(x)=O(1).$$

Применяя интегральное представление, получим

$$\zeta(M|\alpha)=\alpha\int\limits_1^{\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}C_j\cdot x^{\theta_j}+r(x)}{x^{\alpha+1}}dx=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha\cdot C_j}{\alpha-\theta_j}+\alpha\int\limits_1^{\infty}\frac{r(x)}{x^{\alpha+1}}dx=\sum_{j=1}^{n}C_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{\theta_j\cdot C_j}{\alpha-\theta_j}+\alpha\int\limits_1^{\infty}\frac{r(x)}{x^{\alpha+1}}dx.$$

Так как числитель последнего интеграла ограничен, то этот несобственный интеграл сходится при $\sigma>0$, причем равномерно в любой полуплоскости $\sigma\geqslant\sigma_0>0$. □

Теперь перейдём к случаю C-логарифмической θ-степенной плотности. По определению последовательность M натуральных чисел имеет C логарифмическую θ-степенную плотность, если для функции $\nu_M(x)$, заданной равенством

$$\nu_M(x)=\sum_{n\in M,\,n\leqslant x}1,$$

справедливо равенство

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\nu_M(x)}{\ln^{\theta}x}=C,\quad C>0,\quad \theta>0.$$

Лемма 3. *Если множество простых элементов $P(M)$ моноида M конечно, то C-логарифмическая θ-степенная плотность моноида M нулевая для любого значения $\theta>0$.*

Доказательство. Действительно, если $P(M)=\{q_1<q_2<\ldots<q_n\}$, то

$$M=\{q_1^{m_1}q_2^{m_2}\ldots q_n^{m_n}|m_1,\ldots,m_n=0,1,\ldots\}$$

и $\nu_M(x)\leqslant \ln_{q_1}x\cdot\ldots\cdot\ln_{q_n}x\leqslant\ln^n x$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\nu_M(x)}{\ln^\theta x}\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n\ln\ln(x)}{\ln^\theta x}=0$. $\square$

Из доказанной леммы следует, что если моноид M имеет ненулевую C логарифмическую θ-степенную плотность, то множество простых элементов $P(M)$ моноида M бесконечное счётное множество.

Теорема 3. *Если моноид M имеет C логарифмическую θ-степенную плотность с $0<\theta<1$, то дзета-функция моноида M имеет область голоморфности полуплоскость $\sigma>0$ и мнимая ось является линией особенностей.*

Доказательство. Действительно, из определения C-логарифмической θ-степенной плотности следует, что $\nu_M(x)=e^{C\cdot\ln^\theta x+r(x)}$, где $r(x)=\ln^\theta x\cdot\delta(x)$ и $\delta(x)=o(1)$.

Применяя интегральное представление, получим

$$\zeta(M|\alpha)=\alpha\int\limits_1^\infty\frac{e^{\ln^\theta x\cdot(C+\delta(x))}}{x^{\alpha+1}}dx.$$

В данном несобственном интеграле сделаем замену переменных $u=\ln x$, $du=\frac{dx}{x}$, получим

$$\zeta(M|\alpha)=\alpha\int\limits_0^\infty e^{u^\theta\cdot(C+\delta(e^u))-\alpha\cdot u}du.$$

Для любого $\sigma_0>0$ при $\alpha=\sigma+it$ и $\sigma\geqslant\sigma_0$ найдется $u_0=u_0(\sigma_0)$ такое, что так как $0<\theta<1$, то для любого $u\geqslant u_0$ справедливо неравенство $|e^{u^\theta\cdot(C+\delta(e^u))-\alpha\cdot u}|\leqslant e^{-\frac{\sigma_0}{2}u}$. Отсюда следует, что несобственный интеграл равномерно сходится в любой полуплоскости $\sigma\geqslant\sigma_0$ и $\zeta(M|\alpha)$ голоморфная функция в полуплоскости $\sigma>0$.

Так как множество простых элементов $P(M)$ моноида M бесконечное счётное множество: $P(M)=\{q_1<q_2<\ldots<q_n<\ldots\}$, то при $\alpha=\frac{2k\pi i}{\ln q_n}$ для любого целого k и натурального n дзета-ряд $\zeta(M|\alpha)=\sum_{x\in M}\frac{1}{x^\alpha}$ содержит счётное число слагаемых равных единицы:

$$\frac{1}{(q_n^m)^{\frac{2k\pi i}{\ln q_n}}}=1,\quad m=1,2,\ldots.$$

Отсюда следует, что на мнимой оси существует всюду плотное множество особых точек. Повторяя рассуждения из работы [8], получим что мнимая ось целиком является особой линией для дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$. $\square$

3. Аналитическое продолжение

Для моноида $M(\mathbb{P}_k)=\mathbb{N}_k=\{1^k,2^k,3^k,4^k,\ldots\}$ — множества k-ых степеней всех натуральных чисел, как было отмечено выше, справедливо тождество $\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha)=\zeta(k\alpha)$. Из этого тождества сразу следует, что дзета-функция $\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha)$ — аналитическая функция на всей комплексной плоскости кроме точки $\alpha=\frac{1}{k}$, где полюс первого порядка с вычетом $\mathrm{Res}_{\alpha=\frac{1}{k}}\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha)=\frac{1}{k}$. Критической полосой является полоса $0<\sigma<\frac{1}{k}$, критической прямой — прямая $\sigma=\frac{1}{2k}$. Далее воспользуемся функциональным уравнением для дзета-функции

Римана: $\zeta(\alpha)=M(\alpha)\zeta(1-\alpha)$, где $M(\alpha)=\frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}}\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ — множитель Римана. Отсюда получаем функциональное уравнение для дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha)$:

$$\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha)=\zeta(k\alpha)=M(k\alpha)\zeta(1-k\alpha).$$

Рассмотрим множество A_k натуральных чисел свободных от k-ых степеней:

$$A_k=\{p_1^{m_1}\dots p_n^{m_n}|1\leqslant m_1,\dots,m_n<k,\, p_j\in\mathbb{P}\,(j=1,\dots,n)\}.$$

Очевидно, что для любого натурального n найдётся единственная пара натуральных $a_k(n)\in$ $\in A_k$, $m_k(n)\in M(\mathbb{P}_k)$ такая, что $n=a_k(n)m_k(n)$. Отсюда следует, что справедливо равенство $\mathbb{N}=M(\mathbb{P}_k)\cdot A_k$. Переходя к дзета-функциям, получим равенство

$$\zeta(A_k|\alpha)=\frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha)}=\frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(k\alpha)}.$$

Из этого равенства следует, что дзета-функция множества натуральных чисел свободных от k-ых степеней является аналитической функцией, для которой абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда $\alpha=1$. В критической полосе имеется ноль в точке $\alpha=\frac{1}{k}$. На прямой $\sigma=\frac{1}{2k}$ имеется бесконечное множество полюсов первого порядка, так как на критической прямой $\sigma=\frac{1}{2k}$ дзета-функции $\zeta(k\alpha)$ имеется бесконечное число нулей.

Функциональное уравнение имеет достаточно неожиданный вид:

$$\zeta(A_k|\alpha)=\frac{M(\alpha)\zeta(1-\alpha)}{M(k\alpha)\zeta(1-k\alpha)}.$$

Нетрудно видеть, что $A_{\mathbb{N},k}=M(\mathbb{P}_k)$ для любого натурального $k>1$. Если $(k_1,k_2)=1$, то $P(M(\mathbb{P}_{k_1})\cdot M(\mathbb{P}_{k_2}))=\mathbb{P}_{k_1}\bigcup\mathbb{P}_{k_2}$, но моноид $M(\mathbb{P}_{k_1})\cdot M(\mathbb{P}_{k_2})$ уже не будет моноидом с однозначным разложением на простые элементы, так как $M(\mathbb{P}_{k_1})\bigcap M(\mathbb{P}_{k_2})=M(\mathbb{P}_{[k_1,k_2]})$. Отсюда следует, что дзета-функция моноида $M(\mathbb{P}_{k_1})\cdot M(\mathbb{P}_{k_2})$ не равна произведению дзета-функций сомножителей и не имеет эйлерова произведения.

Как и во втором разделе, мы можем утверждать что для множества $M(\mathbb{P}_{k_1})\bigcup M(\mathbb{P}_{k_2})$ дзета-функция имеет простое представление

$$\zeta\left(M(\mathbb{P}_{k_1})\bigcup M(\mathbb{P}_{k_2})\Big|\,\alpha\right)=\zeta(M(\mathbb{P}_{k_1})|\alpha)+\zeta(M(\mathbb{P}_{k_2})|\alpha)-\zeta(M(\mathbb{P}_{[k_1,k_2]})|\alpha)=$$
$$=\zeta(k_1\alpha)+\zeta(k_2\alpha)-\zeta([k_1,k_2]\alpha).$$

Из последнего равенства следует, что дзета-функция $\zeta\left(M(\mathbb{P}_{k_1})\bigcup M(\mathbb{P}_{k_2})|\,\alpha\right)$ имеет три полюса первого порядка в точках $\frac{1}{k_1}$, $\frac{1}{k_2}$, $\frac{1}{[k_1,k_2]}$ с вычетами, соответственно,

$$\mathrm{Res}_{\alpha=\frac{1}{k_j}}\zeta\left(M(\mathbb{P}_{k_1})\bigcup M(\mathbb{P}_{k_2})\Big|\,\alpha\right)=\frac{1}{k_j},\quad (j=1,2),$$
$$\mathrm{Res}_{\alpha=\frac{1}{[k_1,k_2]}}\zeta\left(M(\mathbb{P}_{k_1})\bigcup M(\mathbb{P}_{k_2})\Big|\,\alpha\right)=-\frac{1}{[k_1,k_2]}.$$

Функциональное уравнение будет иметь более сложный вид:

$$\zeta\left(M(\mathbb{P}_{k_1})\bigcup M(\mathbb{P}_{k_2})\Big|\,\alpha\right)=M(k_1\alpha)\zeta(1-k_1\alpha)+M(k_2\alpha)\zeta(1-k_2\alpha)-M([k_1,k_2]\alpha)\zeta(1-[k_1,k_2]\alpha).$$

Если $k_1<k_2$, то абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда для моноида $M(\mathbb{P}_{k_1})\bigcup M(\mathbb{P}_{k_2})$ будет равна $\frac{1}{k_1}$. В полосе $\frac{1}{k_2}<\sigma\leqslant\frac{1}{k_1}$ дзета функция представима как линейная комбинация одного несобственного интеграла и двух дзета-рядов, в полосе $\frac{1}{[k_1,k_2]}<\sigma\leqslant\frac{1}{k_2}$ дзета функция представима как линейная комбинация двух несобственных интегралов и одного дзета-ряда, в полосе $0\leqslant\sigma\leqslant\frac{1}{[k_1,k_2]}$ дзета функция представима как линейная комбинация трёх несобственных интегралов.

4. Заключение

Во втором разделе показано, что моноид k-ых степеней имеет единичную сильную $\frac{1}{k}$-степенную плотность. На простейшем примере объединения двух моноидов k-ых степеней показано аналогичное свойство, которое справедливо и в более сложных случаях. Возникает вопрос об описании широкого класса моноидов, для которых имеет место сильная степенная плотность.

В третьем разделе найдено аналитическое продолжение. На наш взгляд, желательно описать в явном виде в каждом из трёх случаев множество тривиальных нулей соответствующих дзета-функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. М. Бредихин. Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями // Докл. АН СССР, 118:5 (1958), 855–857.

2. И. М. Виноградов, Новая оценка функции $\zeta(1+it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем., 22:2 (1958), 161–164.

3. М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Б. Кожухов, И. Ю. Реброва. Моноид произведений дзета-функций моноидов натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 3, С. 102–117.

4. Н. М. Добровольский, У. М. Пачев, В. Н. Чубариков. Борис Максимович Бредихин и его научно-педагогическая деятельность // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, С. 19–28.

5. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

6. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.

7. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.

8. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

9. Н. Н. Добровольский, “Об абсциссе абсолютной сходимости одного класса обобщенных произведений Эйлера”, Матем. заметки, 109:3 (2021), 464–469.

10. Н. Н. Добровольский. Распределение простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Матем. заметки (в печати).

11. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о ”заградительном ряде” для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

12. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

13. Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–179.

14. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.

15. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.

16. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

17. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сборник, 2020, Т. 21, вып. 1, С. 165–185.

18. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обратная задача для основного моноида типа q// Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 4, С. 59–71.

19. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Энтропия для некоторых моноидов натуральных чисел // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 5, С. 57–71

20. Н. М. Коробов, Оценки сумм Вейля и распределение простых чисел // Докл. АН СССР, 123:1 (1958), 28–31.

REFERENCES

1. Bredikhin, B.M., 1958, "Free numerical semigroups with power densities", Doklady Akademii nauk SSSR, 118:5, pp. 855–857.

2. I. M. Vinogradov, 1958, "A new evaluation of the function $\zeta(1+it)$", *Izv.v. AN SSSR. Ser. matem.*, 22:2, 161–164.

3. M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. B. Koguhov, I. Yu. Rebrova, 2022, "Monoid of pro ducts of zeta functions of monoids of natural numb ers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 102–117.

4. N. M. Dobrovolsky, U. M. Pachev, V. N. Chubarikov, 2020, "Boris Maximovich Bredikhin and his scientific and pedagogical activity" ,*Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 19–28.

5. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization", *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 188–208.

6. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.

7. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 142–150.

8. N. N. Dobrovol'skii, 2019, "One mo del Zeta function of the monoid of natural numb ers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 148–163

9. N. N. Dobrovol'skii, "Abscissa of Absolute Convergence of a Class of Generalized Euler Products", *Math. Notes*, 109:3 (2021), 483–488.

10. N. N. Dobrovol'skii, 2022, "Distribution of simple elements in some monoids of natural numbers", *Math. Notes* (in print).

11. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.

12. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2019, "Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 180–196.

13. N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, 2019, "Monoids of natural numbers in the numerical-theoretical method in the approximate analysis", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 164–179.

14. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.

15. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the monoid of quadratic residues", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.

16. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

17. N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2020, "Inverse problem for a monoid with an exponential sequence of Prime numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 165–185.

18. N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "The inverse problem for a basic monoid of type q" ,*Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 59–71.

19. N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "Entropy for some monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 57–71.

20. N. M. Korobov, 1958, "Estimates of Weyl sums and distribution of primes", *Dokl. USSR Academy OF Sciences*, 123:1, 28-31.

Получено: 21.03.2023
Принято в печать: 14.06.2023