ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-141-153

Гипотеза Боаса на оси для преобразования Фурье—Данкля и его обобщения[1]

Д. В. Горбачев

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru

Аннотация

Вопрос интегрируемости преобразования Фурье и других интегральных преобразований $\mathcal{F}(f)$ на классах функций в весовых пространствах $L^p(\mathbb{R}^d)$ является фундаментальной проблемой гармонического анализа. Классический результат Хаусдорфа—Юнга говорит, что если функция f из $L^p(\mathbb{R}^d)$ при $p \in [1,2]$, то ее преобразование Фурье $\mathcal{F}(f) \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$. При $p > 2$ преобразование Фурье в общей ситуации будет обобщенной функцией. Определить преобразование Фурье как обычную функцию при $p > 2$ можно за счет рассмотрения весовых пространств $L^p(\mathbb{R}^d)$. В частности, из классического неравенства Питта следует, что если $p, q \in (1,\infty)$, $\delta = d(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'})$, $\gamma \in [(\delta)_+, \frac{d}{q})$ и функция f интегрируема в $L^p(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом $|x|^{p(\gamma-\delta)}$, то ее преобразование Фурье $\mathcal{F}(f)$ принадлежит пространству $L^q(\mathbb{R}^d)$ с весом $|x|^{-q\gamma}$. Случай $p = q$ отвечает известному неравенству Харди—Литлвуда.

Возникает вопрос о расширении условий интегрируемости преобразования Фурье при дополнительных условиях на функции. В одномерном случае G. Hardy и J. Littlewood доказали, что если f — четная невозрастающая стремящаяся к нулю функция и $f \in L^p(\mathbb{R})$ для $p \in (1,\infty)$, то $\mathcal{F}(f)$ принадлежит $L^p(\mathbb{R})$ с весом $|x|^{p-2}$. R. Boas (1972) предположил, что для монотонной функции f принадлежность $|\cdot|^{\gamma-\delta} f \in L^p(\mathbb{R})$ эквивалентна $|\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}(f) \in L^p(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\gamma \in (-\frac{1}{p'}, \frac{1}{p})$. Одномерная гипотеза Боаса была доказана Y. Sagher (1976).

D. Gorbachev, E. Liflyand и S. Tikhonov (2011) доказали многомерную гипотезу Боаса для радиальных функций, причем на более широком классе обобщенно монотонных неотрицательных радиальных функций f: $\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}(f)\|_p \asymp \||\cdot|^{\gamma-\delta} f\|_p$ тогда и только тогда, когда $\gamma \in (\frac{d}{p} - \frac{d+1}{2}, \frac{d}{p})$, где $\delta = d(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$. Для радиальных функций преобразование Фурье выражается через преобразование Бесселя полуцелого порядка, которое сводится к классическому преобразованию Ханкеля и включает косинус- и синус-преобразования Фурье. Для последних гипотеза Боаса доказана E. Liflyand и S. Tikhonov (2008). Для преобразования Бесселя–Ханкеля с произвольным порядком гипотеза Боаса доказана L. De Carli, D. Gorbachev и S. Tikhonov (2013). D. Gorbachev, V. Ivanov и S. Tikhonov (2016) обобщили данные результаты были на случай (κ, a)-обобщенного преобразования Фурье. A. Debernardi (2019) изучил случай преобразования Ханкеля и обобщенно монотонных знакопеременных функций.

До сих пор гипотеза Боаса рассматривалась для функций на полуоси. В данной работе она изучается на всей оси. Для этого рассматривается интегральное преобразование Данкля, которое для четных функций сводится к преобразованию Бесселя–Ханкеля. Также показывается, что гипотеза Боаса остается справедливой для (κ, a)-обобщенного преобразования Фурье, при $a = 2$ дающее преобразование Данкля. В итоге имеем

$$\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_{\kappa,a}(f)\|_{p,\kappa,a} \asymp \||\cdot|^{\gamma-\delta} f\|_{p,\kappa,a},$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/.

где $\gamma\in(\frac{d_{\kappa,a}}{p}-\frac{d_{\kappa,a}+\frac{a}{2}}{2},\frac{d_{\kappa,a}}{p})$, $\delta=d_{\kappa,a}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})$, $d_{\kappa,a}=2\kappa+a-1$.

Ключевые слова: неравенство Фурье, гипотеза Боаса, неравенство Харди, неравенство Беллмана, преобразование Данкля, обобщенное преобразование Фурье.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев. Гипотеза Боаса на оси для преобразования Фурье — Данкля и его обобщения // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 141–153.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-141-153

Boas conjecture on the axis for the Fourier–Dunkl transform and its generalization[2]

D. V. Gorbachev

Gorbachev Dmitry Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru

Abstract

The question of integrability of the Fourier transform and other integral transformations $\mathcal{F}(f)$ on classes of functions in weighted spaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ is a fundamental problem of harmonic analysis. The classical Hausdorff–Young result says that if a function f from $L^p(\mathbb{R}^d)$ with $p\in[1,2]$, then its Fourier transform $\mathcal{F}(f)\in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$. For $p>2$ the Fourier transform in the general situation will be a generalized function. The Fourier transform can be defined as an usual function for $p>2$ by considering the weighted spaces $L^p(\mathbb{R}^d)$. In particular, the classical Pitt inequality implies that if $p,q\in(1,\infty)$, $\delta=d(\frac{1}{q}-\frac{1}{p'})$, $\gamma\in[(\delta)_+,\frac{d}{q})$ and function f is integrable in $L^p(\mathbb{R}^d)$ with power weight $|x|^{p(\gamma-\delta)}$, then its Fourier transform $\mathcal{F}(f)$ belongs to the space $L^q(\mathbb{R}^d)$ with weight $|x|^{-q\gamma}$. The case $p=q$ corresponds to the well-known Hardy–Littlewood inequality.

The question arises of extending the conditions for the integrability of the Fourier transform under additional conditions on the functions. In the one-dimensional case, G. Hardy and J. Littlewood proved that if f is an even nonincreasing function tending to zero and $f\in L^p(\mathbb{R})$ for $p\in(1,\infty)$, then $\mathcal{F}(f)$ belongs to $L^p(\mathbb{R})$ with weight $|x|^{p-2}$. R. Boas (1972) suggested that for a monotone function f the membership $|\cdot|^{\gamma-\delta}f\in L^p(\mathbb{R})$ is equivalent to $|\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}(f)\in L^p(\mathbb{R})$ if and only if $\gamma\in(-\frac{1}{p'},\frac{1}{p})$. The one-dimensional Boas conjecture was proved by Y. Sagher (1976).

D. Gorbachev, E. Liflyand and S. Tikhonov (2011) proved the multidimensional Boas conjecture for radial functions, moreover, on a wider class of general monotone non-negative radial functions f: $\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}(f)\|_p\asymp\||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_p$ if and only if $\gamma\in(\frac{d}{p}-\frac{d+1}{2},\frac{d}{p})$, where $\delta=d(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})$. For radial functions, the Fourier transform is expressed in terms of the Bessel transform of half-integer order, which reduces to the classical Hankel transform and includes the cosine and sine Fourier transforms. For the latter, the Boas conjecture was proved by E. Liflyand and S. Tikhonov (2008). For the Bessel–Hankel transform with an arbitrary order, the Boas conjecture was proved by L. De Carli, D. Gorbachev and S. Tikhonov (2013). D. Gorbachev, V. Ivanov and S. Tikhonov (2016) generalized these results to the case of (κ,a)-generalized

[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199), https://rscf.ru/project/18-11-00199/.

Fourier transform. A. Debernardi (2019) studied the case of the Hankel transform and general monotone alternating functions.

So far, the Boas conjecture has been considered for functions on the semiaxis. In this paper, it is studied on the entire axis. To do this, we consider the integral Dunkl transform, which for even functions reduces to the Bessel–Hankel transform. It is also shown that the Boas conjecture remains valid for the (κ, a)-generalized Fourier transform, which gives the Dunkl transform for $a = 2$. As a result, we have

$$\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_{\kappa,a}(f)\|_{p,\kappa,a} \asymp \||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa,a},$$

where $\gamma \in (\frac{d_{\kappa,a}}{p} - \frac{d_{\kappa,a}+\frac{a}{2}}{2}, \frac{d_{\kappa,a}}{p})$, $\delta = d_{\kappa,a}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$, $d_{\kappa,a} = 2\kappa + a - 1$.

Keywords: Fourier inequality, Boas conjecture, Hardy inequality, Bellman inequality, Dunkl transform, generalized Fourier transform.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, 2023, "Boas conjecture on the axis for the Fourier–Dunkl transform and its generalization", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 141–153.

1. Введение

Вопрос интегрируемости преобразования Фурье, Данкля и других интегральных преобразований $\mathcal{F}(f)$ на классах функций в весовых пространствах $L^p(\mathbb{R}^d)$ является фундаментальной проблемой гармонического анализа. Это обусловлено важными приложениями в функциональном анализе, уравнениях в частных производных, теории приближений (см., например, наши недавние работы [5, 8, 9] и библиографию там).

Классический результат Хаусдорфа–Юнга говорит, что если функция f из $L^p(\mathbb{R}^d)$ при $p \in [1, 2]$, то ее преобразование Фурье $\mathcal{F}(f) \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, где $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный показатель. При $p > 2$ преобразование Фурье в общей ситуации будет обобщенной функцией. Определить преобразование Фурье как обычную функцию при $p > 2$ можно за счет рассмотрения весовых пространств $L^p(\mathbb{R}^d)$. В частности, из классического неравенства Питта следует, что если $p, q \in (1, \infty)$, $\delta = d(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'})$, $\gamma \in [(\delta)_+, \frac{d}{q})$ и функция f интегрируема в $L^p(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом $|x|^{p(\gamma-\delta)}$, то ее преобразование Фурье $\mathcal{F}(f)$ принадлежит пространству $L^q(\mathbb{R}^d)$ с весом $|x|^{-q\gamma}$. Случай $p = q$ отвечает известному неравенству Харди–Литлвуда. Данные результаты для преобразования Фурье подробно изложены в работе [1], для интегральных преобразований из задачи Штурма–Лиувилля в [12].

Возникает вопрос о расширении условий интегрируемости преобразования Фурье при дополнительных условиях на функции. В одномерном случае G. Hardy и J. Littlewood доказали, что если f — четная невозрастающая стремящаяся к нулю функция и $f \in L^p(\mathbb{R})$ для $p \in (1, \infty)$, то $\mathcal{F}(f)$ принадлежит $L^p(\mathbb{R})$ с весом $|x|^{p-2}$. R. Boas [2] предположил, что для монотонной функции f принадлежность $|\cdot|^{\gamma-\delta}f \in L^p(\mathbb{R})$ эквивалентна $|\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}(f) \in L^p(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\gamma \in (-\frac{1}{p'}, \frac{1}{p})$. Одномерная гипотеза Боаса была доказана Y. Sagher [15].

В работе [11] доказана многомерная гипотеза Боаса для радиальных функций, причем на более широком классе обобщенно монотонных неотрицательных радиальных функций f: для $1 < p < \infty$ имеем

$$\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}(f)\|_p \asymp \||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_p \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда $\gamma \in (\frac{d}{p} - \frac{d+1}{2}, \frac{d}{p})$, где $\delta = d(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$. Эквивалентность (1) означает, что если конечна правая часть, то преобразование Фурье определено как функция и ограничено в весовой норме. И, наоборот, если преобразование Фурье определено как функция (здесь требуется дополнительное условие интегрируемости функции, см. [11]) и ограничено в весовой норме, то весовая норма функции ограничена.

Для радиальных функций преобразование Фурье выражается через преобразование Бесселя полуцелого порядка, которое сводится к классическому преобразованию Ханкеля и включает косинус- и синус-преобразования Фурье. Для последних гипотеза Боаса доказана в работе [13] (см. также [6, 14]). Для преобразования Бесселя–Ханкеля с произвольным порядком гипотеза Боаса доказана в работе [4]. Ее решение имеет тот же вид, что и (1), только нужно взять преобразование Бесселя–Ханкеля порядка $\frac{d}{2}-1$, использовать норму $L^p(\mathbb{R}_+, x^{d-1}\,dx)$ и считать, что $d \geqslant 1$ не обязательно целое. В [7] данные результаты были обобщены на случай (κ, a)-обобщенного преобразования Фурье. A. Debernardi [3] изучил случай преобразования Ханкеля и обобщенно монотонных знакопеременных функций.

До сих пор гипотеза Боаса по-существу рассматривалась для функций на полуоси. Интересно доказать ее в случае всей оси. Для этого рассмотрим интегральное преобразование Данкля, которое для четных функций сводится к преобразованию Бесселя–Ханкеля. Основным утверждением работы является теорема 1. В разделе 4 также будет показано, что гипотеза Боаса остается справедливой для (κ, a)-обобщенного преобразования Фурье.

Через c, C, C_1, ... будем обозначать положительные константы, которые не зависят от существенных параметров и могут меняться от места к месту, $C(a)$ означает константу, зависящую от параметра a.

2. Гипотеза Боаса для преобразования Данкля

Пусть $\kappa \geqslant 0$. Преобразование Данкля на оси определяется равенством

$$\mathcal{F}_\kappa(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e_\kappa(-xy)\, d\mu_\kappa(x), \quad y \in \mathbb{R},$$

где

$$d\mu_\kappa(x) = \frac{|x|^{2\kappa}\,dx}{2^{\kappa+1/2}\Gamma(\kappa+1/2)}, \quad e_\kappa(t) = j_{\kappa-1/2}(t) + \frac{it}{2\kappa+1}\, j_{\kappa+1/2}(t),$$

$j_\alpha(t) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) t^{-\alpha} J_\alpha(t)$ — нормированная условием $j_\alpha(0) = 1$ функция Бесселя порядка α. Заметим, что для обратного преобразования Данкля имеем $\mathcal{F}_\kappa^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}_\kappa(f)(-x)$.

При $\kappa = 0$ получаем $e_\kappa(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$ и случай преобразования Фурье. Для четных функций $f(x) = f(-x)$ имеем случай преобразования Бесселя–Ханкеля

$$\mathcal{F}_\kappa(f)(y) = 2\int_{\mathbb{R}_+} f(x) j_{\kappa-1/2}(xy)\, d\mu_\kappa(x), \quad y \in \mathbb{R}_+.$$

Отсюда при $\kappa = 0$ и $\kappa = 1$ в силу $j_{-1/2}(t) = \cos t$ и $j_{1/2}(t) = t^{-1}\sin t$ выводятся косинус- и синус-преобразования Фурье соответственно.

Отметим, что нормированная функция Бесселя $j_\alpha(\lambda t)$ является собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля на полуоси со степенным весом

$$\frac{1}{t^{2\alpha+1}}\frac{d}{dt}\Big(t^{2\alpha+1}\frac{d}{dt}\, j_\alpha(\lambda t)\Big) = -\lambda^2 j_\alpha(\lambda t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad j_\alpha'(0) = 0.$$

В отличие от этого ядро преобразования Данкля $e_\kappa(\lambda t)$ является собственной функцией на всей оси для дифференциально-разностного оператора Данкля

$$T_\kappa f(t) = f'(t) + \frac{\kappa}{t}\,(f(t) - f(-t)),$$

а именно

$$T_\kappa e_\kappa(\lambda t) = i\lambda e_\kappa(\lambda t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad e_\kappa(0) = 1.$$

По аналогии с четным случаем (см. [11]) введем класс $BV_{loc,0}$ функций $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ локально ограниченной вариации, таких что $f(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$. Функцию $f\in BV_{loc,0}$ назовем обобщенно монотонной ($f\in GM$), если для всех $t>0$

$$\int_{|x|\geqslant t}|df(x)|\leqslant C\int_{|x|\geqslant t/c}\frac{|f(x)|}{|x|}\,dx<\infty. \tag{2}$$

Здесь $C>0$ и $c>1$ — некоторые константы, зависящие от f.

Заметим, что интеграл Римана–Стильтеса $\int g(x)\,|df(x)|$ понимается как предел интегральных сумм $\sum_k g(x_k)|f(x_{k+1})-f(x_k)|$.

Функции GM ограничены вне окрестности нуля, так как, например, при $t>0$

$$|f(t)|=\left|\int_t^\infty df(x)\right|\leqslant\int_t^\infty|df(x)|<\infty.$$

Если функция $f(x)$ неубывает при $x\leqslant 0$ и невозрастает при $x\geqslant 0$, то $f\in GM$, так как

$$\int_t^\infty|df(x)|=f(t),\quad \int_{-\infty}^{-t}|df(x)|=f(-t),$$

$$\int_{t/c}^\infty\frac{|f(x)|}{|x|}\,dx\geqslant\int_{t/c}^t\frac{|f(x)|}{|x|}\,dx\geqslant f(t)\int_{t/c}^t\frac{dx}{x}=f(t)\ln c,$$

$$\int_{-\infty}^{-t/c}\frac{|f(x)|}{|x|}\,dx\geqslant\int_{-t}^{-t/c}\frac{|f(x)|}{|x|}\,dx\geqslant f(-t)\int_{-t}^{-t/c}\frac{dx}{|x|}=f(-t)\ln c,$$

что влечет условие (2).

Пусть $L^p(\mathbb{R},d\mu_\kappa)$ — пространство функций с нормой $\|f\|_{p,\kappa}=(\int_{\mathbb{R}}|f|^p\,d\mu_\kappa)^{1/p}$ при $p<\infty$ и $\|f\|_{\infty,\kappa}=\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}}|f|$. Рассмотрим вопрос весовой интегрируемости преобразования Данкля для обобщенно монотонных функций в весовых пространствах $L^p(\mathbb{R},d\mu_\kappa)$. Напомним, что для четных функций имеем изученный в работе [4] случай преобразования Бесселя–Ханкеля. Следующая основная теорема решает гипотезу Боаса для неотрицательных обобщенно монотонных функций. В ней $d_\kappa=2\kappa+1$ — размерность Данкля.

Теорема 1. *Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\kappa\geqslant 0$, $\delta=d_\kappa(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})$.*
Пусть функция $f\in GM$. Тогда

(a) *Если*

$$\gamma\in\Big(\frac{d_\kappa}{p}-\frac{d_\kappa+1}{2},\frac{d_\kappa}{p}\Big) \tag{3}$$

и $\||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa}<\infty$, то

$$\int_{|x|\leqslant 1}|f(x)|\,|x|^{2\kappa}\,dx+\int_{|x|\geqslant 1}|x|^\kappa\,|df(x)|<\infty, \tag{4}$$

преобразование Данкля $\mathcal{F}_\kappa(f)$ определено в смысле главного значения как непрерывная вне окрестности нуля функция и $\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa}<\infty$.

(b) *Пусть выполнено* (4). *Тогда $\mathcal{F}_\kappa(f)$ определено в смысле главного значения и непрерывно вне окрестности нуля. Если при этом $\gamma>\frac{d_\kappa}{p}-d_\kappa$, $f\geqslant 0$ и $\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa}<\infty$, то $\||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa}<\infty$.*

(c) *Условие* (3) *является необходимым для выполнения* (a) *и* (b) *одновременно.*

Заметим, что по сравнению с [11, 4] в теорему включены крайние случаи $p=1,\infty$.

3. Доказательство теоремы 1

Будем действовать по схеме работ [11, 4]. Вначале установим ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть функция $f \in BV_{loc,0}$ удовлетворяет условию (4). Тогда ее преобразование Данкля $\mathcal{F}_\kappa(f)$ существует в смысле главного значения, непрерывно вне окрестности нуля и оценивается для всех $y \neq 0$ как*

$$|\mathcal{F}_\kappa(f)(y)| \leqslant C\biggl(\int_{|x|\leqslant 1/|y|} |f(x)|\,|x|^{2\kappa}\,dx + \frac{1}{|y|^{\kappa+1}}\int_{|x|\geqslant 1/|y|} |x|^\kappa\,|df(x)|\biggr). \tag{5}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{F}_\kappa(f)(y) = \int_{|x|\leqslant 1/|y|} f(x)e_\kappa(-xy)\,d\mu_\kappa(x) + \int_{|x|\geqslant 1/|y|} f(x)e_\kappa(-xy)\,d\mu_\kappa(x).$$

Так как на оси $|e_\kappa(t)| \leqslant 1$, то

$$\biggl|\int_{|x|\leqslant 1/|y|} f(x)e_\kappa(-xy)\,d\mu_\kappa(x)\biggr| \leqslant C\int_{|x|\leqslant 1/|y|} |f(x)|\,|x|^{2\kappa}\,dx.$$

Покажем, что

$$\biggl|\int_{|x|\geqslant 1/|y|} f(x)e_\kappa(-xy)\,d\mu_\kappa(x)\biggr| \leqslant \frac{C}{|y|^{\kappa+1}}\int_{|x|\geqslant 1/|y|} |x|^\kappa\,|df(x)|.$$

Сделаем это только при $x, y > 0$, в остальных случаях действуем аналогично.

Имеем

$$\int_{1/y}^\infty f(x)e_\kappa(-xy)\,d\mu_\kappa(x) = C\int_{1/y}^\infty f(x)e_\kappa(-xy)\,x^{2\kappa}\,dx = C\int_{1/y}^\infty f(x)\,dK_y(x), \tag{6}$$

где

$$K_y(x) = \int_0^x e_\kappa(-\xi y)\xi^{2\kappa}\,d\xi = \frac{1}{y^{2\kappa+1}}\int_0^{xy} e_\kappa(-\xi)\xi^{2\kappa}\,d\xi, \quad xy \geqslant 1. \tag{7}$$

Для $t = xy$ находим

$$\begin{aligned}\int_0^t e_\kappa(-\xi)\xi^{2\kappa}\,d\xi &= \int_0^t \Bigl(j_{\kappa-1/2}(\xi) - \frac{i\xi}{2\kappa+1}\,j_{\kappa+1/2}(\xi)\Bigr)\xi^{2\kappa}\,d\xi \\ &= C_1\int_0^t J_{\kappa-1/2}(\xi)\xi^{\kappa+1/2}\,d\xi - iC_2\int_0^t J_{\kappa+1/2}(\xi)\xi^{\kappa+1/2}\,d\xi.\end{aligned} \tag{8}$$

Пусть

$$\psi(t) = \int_0^t J_{\alpha+b}(s)s^{\alpha+1}\,ds, \quad \alpha \geqslant -1/2, \quad b \geqslant 0.$$

В [4, лемма 3.1] установлено, что $|\psi(t)| \leqslant Ct^{\alpha+1/2}$ для $t \geqslant 1$. Отсюда и из (8) выводим

$$\biggl|\int_0^t e_\kappa(-\xi)\xi^{2\kappa}\,d\xi\biggr| \leqslant Ct^\kappa, \quad t \geqslant 1,$$

что по (7) влечет

$$|K_y(x)| \leqslant \frac{C(xy)^\kappa}{y^{2\kappa+1}}, \quad xy \geqslant 1. \tag{9}$$

Оценим теперь интегралы из (6). Имеем

$$\int_{1/y}^{\infty} f(x)\,dK_y(x) = f(x)K_y(x)\Big|_{1/y}^{\infty} - \int_{1/y}^{\infty} K_y(x)\,df(x).$$

Здесь

$$|K_y(1/y)| = \frac{1}{y^{2\kappa+1}}\left|\int_0^1 e_\kappa(-\xi)\xi^{2\kappa}\,d\xi\right| = \frac{C}{y^{2\kappa+1}},$$

откуда

$$|f(1/y)K_y(1/y)| = \left|\int_{1/y}^{\infty} df(x)\right| |K_y(1/y)| \leqslant \frac{C}{y^{\kappa+1}}\int_{1/y}^{\infty} x^\kappa\,|df(x)|.$$

Далее по (9) и (4)

$$|f(x)K_y(x)| \leqslant \frac{Cx^\kappa}{y^{\kappa+1}}\int_x^\infty |df(u)| \leqslant \frac{C}{y^{\kappa+1}}\int_x^\infty u^\kappa\,|df(u)| \to 0, \quad x\to\infty,$$

$$\left|\int_{1/y}^{\infty} K_y(x)\,df(x)\right| \leqslant \frac{C}{y^{\kappa+1}}\int_{1/y}^{\infty} x^\kappa\,|df(x)|.$$

Таким образом,

$$\left|\int_{1/y}^{\infty} f(x)e_\kappa(-xy)\,d\mu_\kappa(x)\right| \leqslant \frac{C}{y^{\kappa+1}}\int_{1/y}^{\infty} x^\kappa\,|df(x)|.$$

Неравенство (5) установлено. Оно влечет существование преобразования Данкля $\mathcal{F}_\kappa(f)$ в смысле главного значения (с несвязанными пределами в нуле и бесконечности) и его непрерывность вне окрестности нуля. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть неотрицательная функция $f \in BV_{loc,0}$ удовлетворяет условию* (4). *Тогда для $a>0$*

$$\int_{1\leqslant|ax|\leqslant 2}\frac{f(x)}{|x|}\,dx \leqslant C\int_{|y|\leqslant 2a} |\mathcal{F}_\kappa(f)(y)|\,|y|^{2\kappa}\,dy.$$

Доказательство. В [4, лемма 3.2] построена четная непрерывная функция $K\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ (ядро типа Фейера), зависящая от параметра $a>0$ и удовлетворяющая следующим условиям:

$$\operatorname{supp} K \subset [-2a,2a], \quad K(t)\leqslant K(0)=1, \quad t\in\mathbb{R},$$

$$\mathcal{F}_\kappa(K)(s) = C(\kappa)a^{2\kappa+1}j^2_{\kappa+1/2}(as), \quad s\in\mathbb{R}, \quad \mathcal{F}_\kappa(K)(s)\geqslant ca^{2\kappa+1}, \quad 1\leqslant|as|\leqslant 2.$$

Здесь учтена взаимосвязь между преобразованиями Данкля и Бесселя–Ханкеля для четных функций. Из свойств нормированной функции Бесселя следует, что

$$\mathcal{F}_\kappa(K)(s)\leqslant C, \quad |as|\leqslant 1, \quad \mathcal{F}_\kappa(K)(s)\leqslant C|s|^{-2\kappa-2}, \quad |as|\geqslant 1.$$

Пусть функция f удовлетворяет условиям леммы. Тогда по лемме 1 для нее определено непрерывное преобразование Данкля. Далее из самосопряженности преобразования Данкля следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}_\kappa(K)(x)\,d\mu_\kappa(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\kappa(f)(y)K(y)\,d\mu_\kappa(y).$$

Для обоснования этого равенства достаточно доказать, что интегралы сходятся абсолютно. Для правого интеграла это следует из ограниченности носителя K. Из свойств $\mathcal{F}_\kappa(K)$ и ограниченности f вне окрестности нуля левый интеграл с точностью до константы оценивается

$$\int_{|x|\leqslant 1}|f(x)|\,|x|^{2\kappa}\,dx + \int_{|x|\geqslant 1}|f(x)|\,|x|^{-2}\,dx < \infty.$$

Из свойств K следует, что

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}_\kappa(f)(y)K(y)\,d\mu_\kappa(y)\right|\leqslant C\int_{|y|\leqslant 2a}|\mathcal{F}_\kappa(f)(y)|\,|y|^{2\kappa}\,dy.$$

С учетом неотрицательности f

$$\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathcal{F}_\kappa(K)(x)\,d\mu_\kappa(x)\geqslant ca^{2\kappa+1}\int_{1\leqslant|ax|\leqslant 2}f(x)\,|x|^{2\kappa}\,dx\geqslant c\int_{1\leqslant|ax|\leqslant 2}\frac{f(x)}{|x|}\,dx.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3 ([11]). *Если $t>0$, $\nu\geqslant 0$, $f\in GM$, $\int_{|x|\geqslant t/c}|x|^{\nu-1}|f(x)|\,dx<\infty$, то*

$$\int_{|x|\geqslant t}|x|^{\nu}\,|df(x)|\leqslant C\int_{|x|\geqslant t/c}|x|^{\nu-1}|f(x)|\,dx,$$

где $c>1$ — константа функции из GM-условия (2).

Доказательство. Так как в [11] не приведено прямое доказательство этого факта, сделаем это. Достаточно ограничиться случаем $\nu>0$, $x>0$. Тогда, используя GM-условие (2), интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned}\int_t^\infty x^\nu\,|df(x)|&=-\int_t^\infty x^\nu\,d\int_x^\infty|df(u)|\\&=t^\nu\int_t^\infty|df(u)|-\lim_{x\to\infty}x^\nu\int_x^\infty|df(u)|+\nu\int_t^\infty x^{\nu-1}\int_x^\infty|df(u)|\,dx\\&\leqslant C\biggl(t^\nu\int_{t/c}^\infty u^{-1}|f(u)|\,du+\lim_{x\to\infty}x^\nu\int_{x/c}^\infty u^{-1}|f(u)|\,du+\int_t^\infty x^{\nu-1}\int_{x/c}^\infty u^{-1}|f(u)|\,du\,dx\biggr)\\&\leqslant C\biggl(\int_{t/c}^\infty u^{\nu-1}|f(u)|\,du+\lim_{x\to\infty}\int_{x/c}^\infty u^{\nu-1}|f(u)|\,du+\int_{t/c}^\infty\int_x^\infty u^{-1}|f(u)|\,dx^\nu\biggr)\\&=C\biggl(\int_{t/c}^\infty u^{\nu-1}|f(u)|\,du+(t/c)^\nu\int_{t/c}^\infty u^{-1}|f(u)|\,du+\int_{t/c}^\infty u^{\nu-1}|f(u)|\,du\biggr)\leqslant C\int_{t/c}^\infty u^{\nu-1}|f(u)|\,du.\end{aligned}$$

Лемма 3 установлена.

Лемма 4. *Если $1\leqslant p\leqslant\infty$, $f\in GM$ и $\||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa}<\infty$ то условие* (4) *выполнено.*

Доказательство. Аналогично случаю четных функций [4, замечание 3.1]). По лемме 3

$$\begin{aligned}I=\int_{|x|\leqslant 1}|f(x)|\,|x|^{2\kappa}\,dx+\int_{|x|\geqslant 1}|x|^\kappa\,|df(x)|&\leqslant C\biggl(\int_{|x|\leqslant 1}|f(x)|\,|x|^{2\kappa}\,dx+\int_{|x|\geqslant 1/c}|x|^{\kappa-1}|f(x)|\,dx\biggr)\\&\leqslant C\int_{\mathbb{R}}\frac{|x|^{2\kappa}}{(1+|x|)^{\kappa+1}}\,|f(x)|\,dx=C\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(x)|}{(1+|x|)^{\kappa+1}}\,d\mu_\kappa(x),\end{aligned}$$

откуда по неравенству Гёльдера

$$I\leqslant C\Bigl\|\frac{|x|^{\delta-\gamma}}{(1+|x|)^{\kappa+1}}\Bigr\|_{p',\kappa}\||x|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa}.$$

Здесь с учетом (3)

$$d_\kappa\Bigl(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\Bigr)-\frac{d_\kappa}{p}<\delta-\gamma<d_\kappa\Bigl(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\Bigr)-\frac{d_\kappa}{p}+\frac{d_\kappa+1}{2}$$

или

$$-\frac{2\kappa+1}{p'}<\delta-\gamma<-\frac{2\kappa+1}{p'}+\kappa+1.$$

При $p'=\infty$ это влечет ограниченность функции $\frac{|x|^{\delta-\gamma}}{(1+|x|)^{\kappa+1}}$. При $p'<\infty$ в окрестности нуля

$$J=\Bigl(\frac{|x|^{\delta-\gamma}}{(1+|x|)^{\kappa+1}}\Bigr)^{p'}|x|^{2\kappa}\asymp|x|^{(\delta-\gamma)p'+2\kappa},$$

что интегрируемо в силу $(\delta-\gamma)p'+2\kappa>-1$. В окрестности бесконечности имеем

$$J\asymp|x|^{(\delta-\gamma)p'+2\kappa-(\kappa+1)p'},$$

что также интегрируемо в силу $(\delta-\gamma)p'+2\kappa-(\kappa+1)p'<-1$. Таким образом, $\bigl\|\frac{|x|^{\delta-\gamma}}{(1+|x|)^{\kappa+1}}\bigr\|_{p',\kappa}<\infty$ при $1\leqslant p'\leqslant\infty$. Лемма 4 доказана.

Теперь докажем части (a)–(c) теоремы 1 для $f\in GM$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

(a) Пусть $\||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa}<\infty$. Тогда по лемме 4

$$\int_{|x|\leqslant 1}|f(x)|\,|x|^{2\kappa}\,dx+\int_{|x|\geqslant 1}|x|^{\kappa}\,|df(x)|<\infty,$$

откуда по лемме 1 получаем, что преобразование Данкля $\mathcal{F}_\kappa(f)$ определено в смысле главного значения как непрерывная вне окрестности нуля функция.

Покажем, что $\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa}<\infty$. Для этого воспользуемся весовыми неравенствами Харди и Беллмана для меры Данкля [9, теорема 3.1]: для $1\leqslant p\leqslant\infty$

$$\||x|^{-\alpha}H_{|x|}f\|_{p,\kappa}\leqslant C\||x|^{d_\kappa-\alpha}f\|_{p,\kappa},\quad \alpha>\frac{d_\kappa}{p},$$

$$\||x|^{-\alpha}B_{|x|}f\|_{p,\kappa}\leqslant C\||x|^{d_\kappa-\alpha}f\|_{p,\kappa},\quad \alpha<\frac{d_\kappa}{p},$$

где интегральные операторы Харди H и Беллмана B определяются равенствами

$$H_{|x|}f=\int_{|y|\leqslant|x|}f(y)\,d\mu_\kappa(y),\quad B_{|x|}f=\int_{|y|\geqslant|x|}f(y)\,d\mu_\kappa(y).$$

Отсюда с помощью замены переменного для соответствующих α получаем

$$\||x|^{\alpha-2d_\kappa/p}H_{1/|x|}f\|_{p,\kappa}\leqslant C\||x|^{d_\kappa-\alpha}f\|_{p,\kappa},\quad \||x|^{\alpha-2d_\kappa/p}B_{1/|x|}f\|_{p,\kappa}\leqslant C\||x|^{d_\kappa-\alpha}f\|_{p,\kappa}. \tag{10}$$

По леммам 1, 3

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_\kappa(f)(y)|&\leqslant C\biggl(\int_{|x|\leqslant 1/|y|}|f(x)|\,|x|^{2\kappa}\,dx+\frac{1}{|y|^{\kappa+1}}\int_{|x|\geqslant 1/|y|}|x|^{\kappa}\,|df(x)|\biggr)\\&\leqslant C\biggl(\int_{|x|\leqslant 1/|y|}|f(x)|\,d\mu_\kappa(x)+\frac{1}{|y|^{\kappa+1}}\int_{|x|\geqslant 1/(c|y|)}|x|^{-\kappa-1}|f(x)|\,d\mu_\kappa(x)\biggr)\\&\leqslant C\bigl(H_{1/|y|}f+|y|^{-\kappa-1}B_{1/(c|y|)}(|\cdot|^{-\kappa-1}f)\bigr),\end{aligned}$$

откуда

$$\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa}\leqslant C\bigl(\||y|^{-\gamma}H_{1/|y|}f\|_{p,\kappa}+\||y|^{-\gamma-\kappa-1}B_{1/(c|y|)}(|\cdot|^{-\kappa-1}f)\|_{p,\kappa}\bigr).$$

Воспользуемся (10) с $\alpha = \frac{2d_\kappa}{p} - \gamma > \frac{d_\kappa}{p}$ в случае оператора H и $\alpha = \frac{2d_\kappa}{p} - \gamma - \kappa - 1 < \frac{d_\kappa}{p}$ в случае оператора B. Отсюда $\frac{d_\kappa}{p} - \frac{d_\kappa+1}{2} < \gamma < \frac{d_\kappa}{p}$, что влечет условие (3). Теперь вспоминая, что $\delta = d_\kappa(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}) = d_\kappa(\frac{2}{p} - 1)$, находим

$$\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa} \leqslant C\big(\||x|^{d_\kappa-(2d_\kappa/p-\gamma)}f\|_{p,\kappa} + \||x|^{d_\kappa-(2d_\kappa/p-\gamma-\kappa-1)-\kappa-1}f\|_{p,\kappa}\big) \leqslant C\||x|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa}.$$

Часть (a) установлена.

(b) Пусть выполнено (4). Тогда по лемме 1 преобразование Данкля $\mathcal{F}_\kappa(f)$ определено в смысле главного значения и непрерывно вне окрестности нуля.

Далее пусть $f \geqslant 0$ и $\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa} < \infty$. Покажем, что $\||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa} < \infty$. Для этого воспользуемся несложно проверяемыми неравенствами (см. также [4])

$$f(x) \leqslant \int_{|u|\geqslant|x|} |df(u)| \leqslant C\int_{|u|\geqslant|x|/c} \frac{f(u)}{|u|}\,du \leqslant C\int_{|u|\geqslant|x|/(2c)}\int_{|u|\leqslant|v|\leqslant2|u|} \frac{f(v)}{|v|}\,dv\,\frac{du}{|u|}.$$

Отсюда по лемме 2

$$f(x) \leqslant C\int_{|u|\geqslant|x|/(2c)}\int_{|y|\leqslant2/|u|} |\mathcal{F}_\kappa(f)(y)|\,d\mu_\kappa(y)\,\frac{du}{|u|} = CB_{|x|/(2c)}(|u|^{-d_\kappa}H_{2/|u|}\mathcal{F}_\kappa(f)).$$

Вновь воспользуемся неравенствами Харди и Беллмана. Для $\alpha = \delta - \gamma < \frac{d_\kappa}{p}$

$$\||x|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa} \leqslant C\||u|^{d_\kappa-\alpha}(|u|^{-d_\kappa}H_{2/|u|}\mathcal{F}_\kappa(f))\|_{p,\kappa} = C\||u|^{\gamma-\delta}H_{2/|u|}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa}.$$

Здесь $\gamma > \frac{d_\kappa}{p} - d_\kappa$, что шире $\gamma > \frac{d_\kappa}{p} - \frac{d_\kappa+1}{2}$, так как $d_\kappa \geqslant 1$. Теперь для $\alpha = \frac{2d_\kappa}{p} + \gamma - \delta > \frac{d_\kappa}{p}$

$$\||u|^{\gamma-\delta}H_{2/|u|}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa} \leqslant C\||x|^{d_\kappa-\alpha}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa} = C\||x|^{-\gamma}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa},$$

где вновь $\gamma > \frac{d_\kappa}{p} - d_\kappa$. Часть (b) установлена.

Часть (c) вытекает из того факта, что для четных функций имеем случай преобразования Бесселя–Ханкеля, где необходимость условия (3) доказана в работе [4].

Теорема 1 доказана.

4. Случай (κ, a)-обобщенного преобразования Фурье

Теорему 1 несложно обобщить на случай одномерного (κ, a)-обобщенного (деформированного) преобразования Фурье (см. [7])

$$\mathcal{F}_{\kappa,a}(f)(y) = c_{\kappa,a}\int_{\mathbb{R}} f(x)B_{\kappa,a}(x,y)|x|^{2\kappa+a-2}\,dx,$$

где $\kappa \geqslant 0$, $a > 0$, $2\kappa + a > 1$ и ядро $B_{\kappa,a}(x,y) = b_{\kappa,a}(xy)$,

$$b_{\kappa,a}(t) = j_{\frac{2\kappa-1}{a}}\Big(\frac{2}{a}\,|t|^{\frac{a}{2}}\Big) + \frac{\Gamma(\frac{2\kappa-1}{a}+1)}{\Gamma(\frac{2\kappa+1}{a}+1)}\,\frac{t}{(ai)^{\frac{2}{a}}}\,j_{\frac{2\kappa+1}{a}}\Big(\frac{2}{a}\,|t|^{\frac{a}{2}}\Big).$$

При $a = 2$ имеем преобразование Данкля.

Пусть $\frac{2\kappa-1}{a} \geqslant -\frac{1}{2}$. Случай четных GM-функций изучен в работе [7], где обобщенное преобразование Фурье сводится к деформированному преобразованию Бесселя–Ханкеля

$$\mathcal{F}_{\kappa,a}(f)(y) = c_{\kappa,a}\int_{\mathbb{R}} f(x)j_{\frac{2\kappa-1}{a}}\Big(\frac{2}{a}\,|xy|^{\frac{a}{2}}\Big)|x|^{2\kappa+a-2}\,dx.$$

В этом случая гипотеза Боаса при выполнении условий как в теореме 1 кратко записывается в виде

$$\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_{\kappa,a}(f)\|_{p,\kappa,a} \asymp \||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa,a}, \quad \gamma \in \Big(\frac{d_{\kappa,a}}{p} - \frac{d_{\kappa,a}+\frac{a}{2}}{2}, \frac{d_{\kappa,a}}{p}\Big),$$

где $\delta = d_{\kappa,a}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$, $d_{\kappa,a} = 2\kappa + a - 1$.

Нетрудно проверить, следуя доказательству теоремы 1, что гипотеза Боаса остается верной, если функция не обязательно четная и GM-условие определено аналогично (2). Для этого достаточно проверить свойства ограниченности ядра в окрестности нуля и нужного асимптотического поведения его первообразной в окрестности бесконечности, которое может быть выведено как при доказательстве леммы 1. При $|t| \leqslant 1$ ограниченность $e_{\kappa,a}(t)$ при $\frac{2\kappa-1}{a} \geqslant -\frac{1}{2}$ вытекает из ограниченности нормированной функции Бесселя, а при $|t| \geqslant 1$ имеем

$$\Big|\int_0^t b_{\kappa,a}(\xi)|\xi|^{2\kappa+a-2}\,d\xi\Big| \leqslant C\Big(\Big|\int_0^{\frac{2}{a}|t|^{\frac{a}{2}}} J_{\frac{2\kappa-1}{a}}(\xi)\xi^{\frac{2\kappa-1}{a}+1}\,d\xi\Big| + \Big|\int_0^{\frac{2}{a}|t|^{\frac{a}{2}}} J_{\frac{2\kappa+1}{a}}(\xi)\xi^{\frac{2\kappa-1}{a}+1}\,d\xi\Big|\Big) \leqslant C|t|^{\frac{d_{\kappa,a}-\frac{a}{2}}{2}}.$$

В заключении скажем, что интересно изучить случай $\frac{2\kappa-1}{a} < -\frac{1}{2}$, когда требуется более детальное изучение свойств ядра обобщенного преобразования Фурье. Некоторые результаты в этом направлении содержаться в недавней работе [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Benedetto J.J., Heinig H.P. Weighted Fourier inequalities: New proofs and generalizations // J. Fourier Anal. Appl. 2003. Vol. 9. P. 1–37.

2. Boas R.P. The integrability class of the sine transform of a monotonic function // Studia Math. 1972. Vol. 44. P. 365–369.

3. Debernardi A. The Boas problem on Hankel transforms // J. Fourier Anal. Appl. 2019. Vol. 25. P. 3310–3341.

4. De Carli L., Gorbachev D., Tikhonov S. Pitt and Boas inequalities for Fourier and Hankel transforms // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 408, no. 2. P. 762–774.

5. De Carli L., Gorbachev D., Tikhonov S. Weighted gradient inequalities and unique continuation problems // Calc. Var. Partial Dif. 2020. Vol. 59, no. 3. Article 89.

6. Dyachenko M., Liflyand E., Tikhonov S. Uniform convergence and integrability of Fourier integrals // Jour. Math. Anal. Appl. 2010. Vol. 372. P. 328–338.

7. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. Pitt's inequalities and uncertainty principle for generalized Fourier transform // Int. Math. Res. Notices. 2016. Vol. 23. P. 7179–7200.

8. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. Sharp approximation theorems and Fourier inequalities in the Dunkl setting // J. Approx. Theory. 2020. Vol. 258. Article 105462.

9. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform // Potential Anal. 2021. Vol. 55. P. 513–538.

10. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. On the kernel of the (κ, a)-generalized Fourier transform // arXiv:2210.15730. 2022.

11. Gorbachev D., Liflyand E., Tikhonov S. Weighted Fourier inequalities: Boas' conjecture in $\mathbb{R}^n$ // J. d'Anal. Math. 2011. Vol. 114. P. 99–120.

12. Gorbachev D., Liflyand E., Tikhonov S. Weighted norm inequalities for integral transforms // Indiana Univ. Math. J. 2018. Vol. 67, no. 5. P. 1949–2003.

13. Liflyand E., Tikhonov S. Extended solution of Boas' conjecture on Fourier transforms // C.R. Math. Acad. Sci. Paris. 2008. Vol. 346. P. 1137–1142.

14. Liflyand E., Tikhonov S. Two-sided weighted Fourier inequalities // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5). 2012. Vol. XI. P. 341–362.

15. Sagher Y. Integrability conditions for the Fourier transform // J. Math. Anal. Appl. 1976. Vol. 54. P. 151–156.

REFERENCES

1. Benedetto, J.J. & Heinig, H.P. 2003. "Weighted Fourier inequalities: New proofs and generalizations", *J. Fourier Anal. Appl.*, vol. 9, pp. 1–37.

2. Boas, R.P. 1972. "The integrability class of the sine transform of a monotonic function", *Studia Math.*, vol. 44, pp. 365–369.

3. Debernardi, A. 2019. "The Boas problem on Hankel transforms", *J. Fourier Anal. Appl.*, vol. 25, pp. 3310–3341.

4. De Carli, L., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2013. "Pitt and Boas inequalities for Fourier and Hankel transforms", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 408, no. 2, pp. 762–774.

5. De Carli, L., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. "Weighted gradient inequalities and unique continuation problems", *Calc. Var. Partial Dif.*, vol. 59, no. 3, article 89.

6. Dyachenko, M., Liflyand, E.& Tikhonov, S. 2010. "Uniform convergence and integrability of Fourier integrals", *Jour. Math. Anal. Appl.*, vol. 372, pp. 328–338.

7. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2016. "Pitt's inequalities and uncertainty principle for generalized Fourier transform", *Int. Math. Res. Notices*, vol. 23, pp. 7179–7200.

8. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2020. "Sharp approximation theorems and Fourier inequalities in the Dunkl setting", *J. Approx. Theory*, vol. 258, article 105462.

9. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2021. "Riesz potential and maximal function for Dunkl transform", *Potential Anal.*, vol. 55, pp. 513–538.

10. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2022. "On the kernel of the (κ, a)-generalized Fourier transform", *arXiv:2210.15730.*

11. Gorbachev, D., Liflyand, E. & Tikhonov, S. 2011. "Weighted Fourier inequalities: Boas' conjecture in $\mathbb{R}^n$", *J. d'Anal. Math.*, vol. 114, pp. 99–120.

12. Gorbachev, D., Liflyand, E. & Tikhonov, S. 2018. "Weighted norm inequalities for integral transforms", *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 67, no. 5, pp. 1949–2003.

13. Liflyand, E. & Tikhonov, S. 2008. "Extended solution of Boas' conjecture on Fourier transforms", *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 346, pp. 1137–1142.

14. Liflyand, E. & Tikhonov, S. 2012. "Two-sided weighted Fourier inequalities", *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, vol. XI, pp. 341–362.

15. Sagher, Y. 1976. "Integrability conditions for the Fourier transform", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 54, pp. 151–156.

Получено: 17.11.2022
Принято в печать: 14.06.2023