

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 2.

УДК 514.172, 514.177.2, 515.124

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-81-128

**Устойчивость границы в проблеме Ферма — Штейнера
в гиперпространствах над конечномерными
нормированными пространствами¹**

А. Х. Галстян

Галстян Арсен Хачатурович — аспирант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: ares.1995@mail.ru

Аннотация

Проблема Ферма — Штейнера состоит в поиске всех точек метрического пространства Y таких, что сумма расстояний от каждой из них до точек из некоторого фиксированного конечного подмножества $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ пространства Y минимальна. В настоящей работе эта проблема рассматривается в случае, когда $Y = \mathcal{H}(X)$ — это пространство непустых компактных подмножеств конечномерного нормированного пространства X , наделённое метрикой Хаусдорфа, то есть $\mathcal{H}(X)$ является *гиперпространством* над X . Множество A называют *границей*, все A_i — *граничными множествами*, а компакты, которые реализуют минимум суммы расстояний до A_i — *компактами Штейнера*.

В данной статье изучается вопрос *устойчивости* в проблеме Ферма — Штейнера при переходе от границы из конечных компактов A_i к границе, состоящей из их выпуклых оболочек $\text{Conv}(A_i)$. Под устойчивостью здесь имеется в виду, что при переходе к выпуклым оболочкам граничных компактов минимум суммы расстояний S_A не изменится.

В работе было продолжено изучение геометрических объектов, а именно, *множеств сцепки*, возникающих в проблеме Ферма — Штейнера. Также были выведены три различных достаточных условия неустойчивости границы из $\mathcal{H}(X)$, два из которых опираются на построенную теорию таких *множеств*. Для случая неустойчивой границы $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ был разработан метод поиска деформаций некоторого элемента из $\mathcal{H}(X)$, которые приводят к компактам, дающим меньшее значение суммы расстояний до $\text{Conv}(A_i)$, чем S_A .

Построенная в рамках данного исследования теория была применена к одной известной из недавних работ границе $A \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, а именно, была доказана её неустойчивость и были найдены компакты, реализующие меньшую, чем S_A , сумму расстояний до $\text{Conv}(A_i)$.

Ключевые слова: метрическая геометрия, гиперпространства, выпуклые множества, расстояние Хаусдорфа, проблема Штейнера, проблема Ферма — Штейнера, экстремальные сети.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:

А. Х. Галстян. Устойчивость границы в проблеме Ферма — Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 81–128.

¹А. Х. Галстян является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (договор No 21-8-3-3-1).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 2.

UDC 514.172, 514.177.2, 515.124

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-81-128

Boundary stability in the Fermat–Steiner problem in hyperspaces over finite-dimensional normed spaces

A. Kh. Galstyan

Galstyan Arsen Khachaturovich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: ares.1995@mail.ru

Abstract

The Fermat–Steiner problem is to find all points of the metric space Y such that the sum of the distances from each of them to points from some fixed finite subset $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ of the space Y is minimal. In this paper, this problem is considered in the case when $Y = \mathcal{H}(X)$ is the space of non-empty compact subsets of a finite-dimensional normed space X endowed with the Hausdorff metric, i.e. $\mathcal{H}(X)$ is a *hyperspace* over X . The set A is called *boundary*, all A_i are called *boundary sets*, and the compact sets that realize the minimum of the sum of distances to A_i are called *Steiner compacts*.

In this paper, we study the question of *stability* in the Fermat–Steiner problem when passing from a boundary consisting of finite compact sets A_i to a boundary consisting of their convex hulls $\text{Conv}(A_i)$. By stability here we mean that the minimum of the sum of distances S_A does not change when passing to convex hulls of boundary compact sets.

The paper continued the study of geometric objects, namely, *hook sets* that arise in the Fermat–Steiner problem. Also three different sufficient conditions for the instability of the boundary from $\mathcal{H}(X)$ were derived, two of which are based on the constructed theory of such *sets*. For the case of an unstable boundary $A = \{A_1, \dots, A_n\}$, a method was developed to search for deformations of some element from $\mathcal{H}(X)$, which lead to compact sets that give a smaller value of the sum of distances to $\text{Conv}(A_i)$ than S_A .

The theory constructed within the framework of this study was applied to one of the well-known from recent works boundary $A \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, namely, its instability was proved and compact sets were found realizing the sum of distances to $\text{Conv}(A_i)$, less than S_A .

Keywords: metric geometry, hyperspaces, convex sets, Hausdorff distance, Steiner problem, Fermat–Steiner problem, extremal networks.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

A. Kh. Galstyan, 2023, “Boundary stability in the Fermat–Steiner problem in hyperspaces over finite-dimensional normed spaces”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 81–128.

1. Введение

Во многих областях деятельности человека возникают вопросы минимизации затрат каких бы то ни было ресурсов, например, времени в пути на доставку чего-либо: чем оно меньше, тем больше выгода. Проблема, которой посвящена данная работа, как раз из этой области. Одна из частных прикладных постановок задачи может быть такой: допустим, есть ряд предприятий и ставится вопрос о постройке ещё одного дополнительного, которое ежедневно будет тесно

взаимодействовать с исходными. Вопрос — где его разместить? Логично, например, в месте, которое находится на наименьшем суммарном расстоянии от исходных предприятий.

История подобного рода задач восходит ещё к 17 веку (подробную историческую сводку можно найти, например, в работах [1, 2, 3]). А именно, в одной из своих работ Пьер Ферма сформулировал следующую проблему. Дано три точки на плоскости, требуется найти четвёртую такую, что сумма расстояний от неё до трёх изначальных минимальна. Около 1640 года Эванджелиста Торричелли, узнав об этой задаче от самого Ферма, решил её, опираясь на законы физики. Это решение было опубликовано в одной из работ Винченцо Вивiani, ученика Торричелли. До сих пор остаётся неясным вопрос о том, знал ли сам Ферма ответ на свою задачу. Историки в большинстве своём отдают пальму первенства в решении проблемы именно итальянскому учёному. Стоит отметить, что на протяжении веков задача Ферма забывалась, переоткрывалась и решалась заново разными европейскими математиками посредством новых методов и подходов (Т. Симпсон, Ф. Хейнен, Ж. Бертран и др.).

Ещё одна похожая проблема была сформулирована в 1836 году Карлом Гауссом. В письме своему ученику Г. Х. Шумахеру он задался вопросом, как построить сеть железных дорог минимальной суммарной длины, которая будет соединять четыре немецких города: Бремен, Гамбург, Ганновер и Брауншвейг (в Германии того времени весьма активно развивалось строительство железнодорожной сети по всей стране). Гаусс в своём ответе пишет, что задача Ферма здесь, а именно, поиск точки, реализующей минимум суммы расстояний до четырёх заданных, не приводит к графу минимального веса, соединяющему эти точки, в отличие от случая проблемы на трёх точках. Карл Гаусс в рамках той переписки впервые заявил о хорошо известном сегодня алгоритме построения кратчайшей сети на плоскости, соединяющей конечный набор точек: нужно перебрать все так называемые *графы Штейнера*, соединяющие эти точки [2, 4]. Минимальные сети будут среди них и только среди них. Графом Штейнера принято называть плоский граф, вершины в котором имеют степени смежности только три, два или один. И если вершина имеет степень три, то все рёбра из неё выходят под углом 120 градусов относительно друг друга, а если вершина имеет степень два, то угол между двумя исходящими рёбрами должен быть не меньше 120 градусов.

В 1934 году В. Ярник и М. Кёessler сформулировали задачи Ферма и Гаусса в более общем виде: требуется соединить n точек в k -мерном евклидовом пространстве сетью минимального веса [5]. Однако свои основные результаты они получили лишь для случая плоскости. В частности, ими было доказано, что каждая кратчайшая сеть, которая соединяет вершины правильного n -угольника, при $n > 13$ состоит из всех сторон этого n -угольника за исключением любой одной. Также Ярник и Кёessler построили очевидные сети минимального веса для $n = 3, 4, 5$.

Широкую известность задача поиска минимальных сетей приобрела с выходом в 1941 году книги Р. Куранта и Г. Роббинса “Что такое математика?” [6], которая впоследствии оказалась весьма популярной. Однако в этой работе авторы приписывают пальму первенства постановки и решения проблемы построения геометрического графа минимального веса другому математику, Якобу Штейнеру, работавшему в 19 веке в стенах Берлинского университета. Штейнер формулировал задачу следующим образом: требуется соединить три деревни A, B и C системой дорог минимальной суммарной длины. Как пишут современные историки, всё дело в том, что Курант и Роббинс узнали про задачу Ферма из опубликованных черновиков берлинского математика. Таким образом, с 40-х годов прошлого столетия проблему поиска кратчайшей сети в метрическом пространстве, соединяющей заданные точки, принято называть *проблемой Штейнера*. А родственную задачу, в которой поиск ведётся лишь среди графов типа звезда, где исходный набор точек является множеством листьев такого графа, с недавнего времени стали именовать *проблемой Ферма — Штейнера* [7].

Общая и естественная постановка задачи Ферма — Штейнера может быть такой. Пусть Y — метрическое пространство и A — конечное подмножество Y . Проблема Ферма — Штейнера

состоит в поиске всех точек $y \in Y$, находящихся на наименьшем суммарном расстоянии от точек множества $A = \{A_1, \dots, A_n\}$. В соответствии с терминологией из теории графов множество A называют *границей*. Множество всех решений всюду далее будет обозначаться через $\Sigma(A)$.

В настоящей работе рассматривается проблема Ферма — Штейнера в случае, когда $Y = \mathcal{H}(X)$ является пространством с метрикой Хаусдорфа d_H , см. раздел 2.3, всех непустых компактных подмножеств конечномерного нормированного пространства X над полем $\mathbb{R}$. Пространство $Y = \mathcal{H}(X)$ ещё называют *гиперпространством* над X , см. [8]. Таким образом, задачу можно сформулировать так. Требуется найти все $K \in \mathcal{H}(X)$, которые реализуют минимум следующего функционала:

$$S(A, K) = \sum_{i=1}^n d_H(A_i, K). \quad (1)$$

Само минимальное значение $S(A, K)$ будет далее обозначаться через S_A .

Вообще говоря, в произвольном метрическом пространстве множество $\Sigma(A)$ может оказаться пустым. Однако из [7] известно, что в ограниченно компактных метрических пространствах, то есть в таких, где всякий замкнутый шар есть компакт, решение проблемы Ферма — Штейнера всегда существует. Более того, в [7] было доказано, что если X ограниченно компактно, то и $\mathcal{H}(X)$ тоже ограниченно компактно. Хорошо известно, что в конечномерных нормированных пространствах замкнутое и ограниченное подмножество есть компакт. Таким образом, согласно сказанному выше, в данной работе всюду выполнено $\Sigma(A) \neq \emptyset$. Элементы из $\Sigma(A)$ далее будут называться *компактами Штейнера*.

Пусть $K \in \Sigma(A)$. Тогда обозначим расстояние по Хаусдорфу между K и $A_i \in A$ через d_i (A_i из границы далее будут ещё называться *граничными компактными*). Вектор $d = (d_1, \dots, d_n)$ назовём *вектором решения* проблемы. Множество всех таких векторов решений для границы A обозначим через $\Omega(A)$. Отметим, что разные компакты Штейнера могут задавать один и тот же элемент из $\Omega(A)$. При этом очевидно, что по элементу из $\Sigma(A)$ его вектор d восстанавливается однозначно. Таким образом, множество решений проблемы Ферма — Штейнера в $\mathcal{H}(X)$ разбивается на попарно непересекающиеся классы $\Sigma_d(A)$, каждый из которых соответствует своему вектору решения $d \in \Omega(A)$. Согласно работе [7] в ограниченно компактных пространствах каждый класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе по включению единственный *максимальный компакт Штейнера* (он обозначается через K_d) и, вообще говоря, множество *минимальных компактов Штейнера*. В [7] также было доказано для случая ограниченно компактных пространств, что если $d \in \Omega(A)$, то $K_d = \bigcap_{i=1}^n B_{d_i}(A_i)$, где $B_{d_i}(A_i)$ — шар (или ещё говорят замкнутая окрестность) с центром в компакте A_i , см. определение в разделе 2.2. Более того, $K \in \Sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда с некоторым минимальным компактом Штейнера $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ справедливо $K_\lambda \subset K \subset K_d$.

Геометрии пространств $\mathcal{H}(X)$ и, в частности, проблема Ферма — Штейнера в $\mathcal{H}(X)$ имеют потенциальные применения в таких прикладных областях математики, как распознавание и сравнение образов, реализация непрерывных деформаций одних геометрических объектов в другие и т. д. Поэтому в последнее время стала активно развиваться наука по работе в различных гиперпространствах (см., например, [9], в которой рассматриваются кратчайшие кривые в $\mathcal{H}(X)$), или статьи [10, 11, 12] по исследованию и приложению более общего расстояния Громова–Хаусдорфа).

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [13], где рассматривались только границы в $\mathcal{H}(X)$, все элементы которых есть конечные подмножества $\mathbb{R}^m$. В данной статье делается шаг в сторону перехода от исследования конечных граничных компактов к выпуклым компактным подмножествам в рамках проблемы Ферма — Штейнера. В частности, изучается

возможность обобщения такого понятия, как *множество сцепки*, введённого в работе [13], см. раздел 3.2. Также исследуются вопросы того, что можно сказать при переходе от границы из конечных компактов к границе, состоящей из их выпуклых оболочек. В данной работе границы, для которых минимум функционала (1) при переходе к выпуклым оболочкам граничных компактов останется прежним, будут называться *устойчивыми*, иначе — *неустойчивыми*.

В секции 2 приводятся все нужные определения и вспомогательные утверждения, которые используются в статье. Раздел 3.1 разрабатывает необходимую теорию, связанную с оператором взятия выпуклой оболочки непустого компактного подмножества, в рамках проблемы Ферма — Штейнера. В частности, важным утверждением здесь является следствие 2. Оно используется в разделе 3.4, который посвящён вопросам устойчивости границ. В разделе 3.2 происходит обобщение понятия множества сцепки, которое было сделано в [13] для границ из конечных компактов. В секции 3.3 посредством множества сцепки определённого типа $HP(F)$ раскрывается связь максимального компакта Штейнера с границей, состоящей из выпуклых компактных множеств. Результаты разделов 3.2 и 3.3 также используются в разделе 3.4. В секции 3.5 было положено начало исследованию вопроса уменьшения веса сети в неустойчивом случае. Ключевым утверждением здесь является теорема 9. Раздел 3.6 демонстрирует приложение результатов секции 3.5 на примере конкретной задачи из [7, 13]. И наконец, в разделе 4 подводятся итоги проделанной работы и обсуждаются возможные продвижения данной задачи.

Основными результатами статьи являются утверждение 10, утверждение 12, теорема 3 и теорема 5, обобщающие понятие множества сцепки, теорема 6 о взаимосвязи границы из выпуклых компактов с K_d , утверждение 13, опирающееся на следствие 2 и дающее ответ на вопрос, что произойдёт в векторах решений из $\Omega(A)$ и каким будет максимальный компакт Штейнера в случае устойчивой границы, следствия 6, 7 и теорема 9, приводящие различные достаточные условия неустойчивости границы (в теореме 9, в частности, приводится оценка снизу на величину уменьшения веса сети в неустойчивом случае), и наконец, теорема 7, раскрывающая связь между третьим достаточным условием неустойчивости (теорема 9) и вторым (следствие 7).

Отметим, что утверждение 13 не является новым, его можно найти в статье [14], однако в настоящей работе приводится альтернативное доказательство этого факта.

Также отметим, что настоящая статья является существенно переработанной и дополненной версией работы [23].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, профессору А. А. Тужилину, и профессору А. О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к ней в процессе совместной работы.

2. Необходимые определения и утверждения

Пусть (X, ρ) — произвольное метрическое пространство. Для удобства расстояние между двумя точками $a, b \in X$ будем обозначать через $|ab|$ вместо $\rho(a, b)$, а также вместо (X, ρ) будем писать просто X .

Во многих местах в тексте будут использоваться следующие общепринятые обозначения для любых двух точек a и b в случае, когда X является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$:

$$[a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1)\},$$

$$(a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in (0, 1]\},$$

$$[a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

2.1. Метрические проекции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $A \subset X$. Расстоянием от точки $p \in X$ до множества $A \subset X$ называется величина

$$|p A| = \inf\{|pa| : a \in A\}.$$

В частности, когда $A = \emptyset$, будем полагать

$$|p \emptyset| = \infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть M — непустое подмножество X . Множество всех подмножеств X обозначим через 2^X . Отображение $P_M: X \rightarrow 2^X$, заданное по правилу

$$P_M: x \mapsto \{z \in M : |xz| = |xM|\},$$

называется метрической проекцией X на M .

ЛЕММА 1. Если $M \subset X$ — непустой компакт, то для любой точки $x \in X$ множество $P_M(x)$ непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Данный результат прямо вытекает из непрерывности функции расстояния между двумя точками в метрическом пространстве.

□

В случае конечномерного нормированного пространства X верен следующий факт (см., например, [17]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 ([17]). Пусть $M \subset X$ — непустой выпуклый компакт. Тогда для любой точки $x \in X \setminus M$, для любой точки $y \in P_M(x)$ и для всех $\lambda \geq 0$ выполняется

$$y \in P_M((1 - \lambda)y + \lambda x).$$

2.2. О шарах в метрических пространствах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $A \subset X$. Множества

$$B_r(A) = \{p : |pA| \leq r\}; \quad U_r(A) = \{p : |pA| < r\}$$

называются, соответственно, замкнутым и открытым шаром с центром в A радиуса r .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно определению 1 для любого $0 \leq r < \infty$ верно

$$B_r(\emptyset) = U_r(\emptyset) = \emptyset.$$

В случае $A = \{a\}$, где $a \in X$, для краткости $B_r(\{a\})$ и $U_r(\{a\})$ будут заменяться на $B_r(a)$ и $U_r(a)$, соответственно.

ЛЕММА 2. Пусть $A \subset X$ — компакт и $0 \leq r < \infty$. Тогда $B_r(A) = \bigcup_{a \in A} B_r(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В случае, когда $A = \emptyset$, равенство очевидно. Пусть далее A непусто.

По определению $B_r(A) = \{x \in X : |xA| \leq r\}$. Покажем сначала $\{x \in X : |xA| \leq r\} \subset \bigcup_{a \in A} B_r(a)$. Пусть $p \in \{x \in X : |xA| \leq r\}$. Так как A — компакт, то согласно лемме 1

справедливо $P_A(p) \neq \emptyset$. Пусть $q \in P_A(p)$. Тогда $|pq| = |pA| \leq r$. Значит, $p \in B_r(q) \subset \bigcup_{a \in A} B_r(a)$. В силу произвольности точки p получаем $\{x \in X : |xA| \leq r\} \subset \bigcup_{a \in A} B_r(a)$.

Покажем теперь $\bigcup_{a \in A} B_r(a) \subset \{x \in X : |xA| \leq r\}$. Но для любой $p \in \bigcup_{a \in A} B_r(a)$ существует точка $q \in A$ такая, что $p \in B_r(q)$. Значит, так как $q \in A$, то $|pq| \leq r$. Следовательно, $p \in \{x \in X : |xA| \leq r\}$. Аналогично, в силу произвольности точки p имеем $\bigcup_{a \in A} B_r(a) \subset \{x \in X : |xA| \leq r\}$.

Таким образом, $B_r(A) = \{x \in X : |xA| \leq r\} = \bigcup_{a \in A} B_r(a)$.

□

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В доказательстве $\bigcup_{a \in A} B_r(a) \subset \{x \in X : |xA| \leq r\} = B_r(A)$ из леммы 2 нигде не использовалась компактность. Поэтому включение $\bigcup_{a \in A} B_r(a) \subset B_r(A)$ верно для любого $A \subset X$.

ЛЕММА 3. Пусть $A \subset X$ и $0 \leq r < \infty$. Тогда $U_r(A) = \bigcup_{a \in A} U_r(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если $A = \emptyset$, то согласно замечанию 1 имеем $U_r(A) = \emptyset$. С другой стороны, $\bigcup_{a \in A = \emptyset} U_r(a) = \emptyset$.

Значит, в таком случае $U_r(A) = \bigcup_{a \in A} U_r(a)$.

Если $r = 0$, то ввиду неотрицательности функции расстояния также получаем $U_r(A) = \bigcup_{a \in A} U_r(a) = \emptyset$.

Пусть далее $A \neq \emptyset$ и $0 < r < \infty$. По определению $U_r(A) = \{x \in X : |xA| < r\}$. Покажем сначала $\{x \in X : |xA| < r\} \subset \bigcup_{a \in A} U_r(a)$. Пусть $p \in \{x \in X : |xA| < r\}$. Это означает, что $|pA| = \inf_{a \in A} |pa| < r$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $a' \in A$ такая, что $|pa'| \leq |pA| + \varepsilon$. Подберём ε так, чтобы выполнялось $|pa'| \leq |pA| + \varepsilon < r$. Таким образом, мы имеем точку $a' \in A$ такую, что $p \in U_r(a') \subset \bigcup_{a \in A} U_r(a)$. В силу произвольности точки p получаем $\{x \in X : |xA| < r\} \subset \bigcup_{a \in A} U_r(a)$.

Покажем теперь $\bigcup_{a \in A} U_r(a) \subset \{x \in X : |xA| < r\}$. Но для любой $p \in \bigcup_{a \in A} U_r(a)$ существует точка $q \in A$ такая, что $p \in U_r(q)$, то есть $|pq| < r$. Значит, так как $q \in A$, то $|pq| < r$. Следовательно, $p \in \{x \in X : |xA| < r\}$. Аналогично, в силу произвольности точки p получаем $\bigcup_{a \in A} U_r(a) \subset \{x \in X : |xA| < r\}$.

Таким образом, $U_r(A) = \{x \in X : |xA| < r\} = \bigcup_{a \in A} U_r(a)$.

□

Согласно [15] справедливо следующее утверждение, которое нам понадобится далее.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 ([15]). Для непустого $A \subset X$ функция

$$f: X \rightarrow \mathbb{R},$$

заданная правилом

$$f: x \mapsto |xA|,$$

непрерывна.

Всюду далее множество всех граничных точек подмножества $A \subset X$ будем обозначать через ∂A .

ЛЕММА 4. Пусть A — непустое подмножество нормированного пространства X и $r \geq 0$. Тогда для любого $p \in \partial B_r(A)$ справедливо $|p A| = r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $p \in \partial B_r(A)$. Рассмотрим последовательности точек $\{x_n\} \subset B_r(A)$ и $\{y_n\} \subset X \setminus B_r(A)$, сходящиеся к p . Заметим, что $|x_i A| \leq r$ и $|y_j A| > r$ для всех i, j . В силу утверждения 2, а также ввиду $\|p - x_i\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и $\|p - y_j\| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ получаем $|p A| \leq r$ и $|p A| \geq r$. Значит, $|p A| = r$.

□

ЛЕММА 5. Пусть x — точка в нормированном пространстве X и $r \geq 0$. Тогда для любого $p \in X$ из $|px| = r$ следует $p \in \partial B_r(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Проведём луч l из x , проходящий через p . Для любого $\varepsilon > 0$ и для любой точки $y \in U_\varepsilon(p) \cap [x, p]$ в силу линейности пространства X верно $|xy| \leq r$. С другой стороны, снова ввиду линейности пространства X для любой точки $y \in U_\varepsilon(p) \cap l \setminus [x, p]$ справедливо $|xy| > r$. Значит, всякая окрестность точки p содержит как точки из $B_r(x)$, так и точки из $X \setminus B_r(x)$. Следовательно, p — граничная точка для $B_r(x)$, то есть $p \in \partial B_r(x)$.

□

ЛЕММА 6. Пусть A — компактное подмножество нормированного пространства X и $0 \leq r < \infty$. Тогда $\partial B_r(A) \subset \bigcup_{a \in A} \partial B_r(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если $A = \emptyset$, то $B_r(A) = \emptyset$ согласно замечанию 1. Значит, $\partial B_r(A) = \emptyset \subset \bigcup_{a \in A} \partial B_r(a)$.

Пусть теперь $A \neq \emptyset$. Возьмём точку $p \in \partial B_r(A)$. Согласно лемме 4 верно $|p A| = r$. Также ввиду компактности A имеем $P_A(p) \neq \emptyset$. Пусть $x \in P_A(p)$. Следовательно, получаем $|px| = r$, и поэтому по лемме 5 имеем $p \in \partial B_r(x)$. Отсюда $p \in \bigcup_{a \in A} \partial B_r(a)$. Значит, в силу произвольности $p \in \partial B_r(A)$ справедливо $\partial B_r(A) \subset \bigcup_{a \in A} \partial B_r(a)$.

□

Следующий факт можно найти, например, в работе [13].

ЛЕММА 7 ([13]). Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — точки нормированного пространства со строго выпуклой нормой. Тогда если множество

$$C = B_{r_1}(a_1) \cap \dots \cap B_{r_n}(a_n)$$

состоит более чем из одной точки, то оно имеет непустую внутренность.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Все результаты из разделов 2 и 3 работы [13], опирающиеся на лемму 7, прямо обобщаются без изменения доказательств на случай конечномерных нормированных пространств со строго выпуклой нормой, а все остальные утверждения из этих разделов обобщаются точно так же без каких бы то ни было изменений в доказательствах на случай произвольных конечномерных нормированных пространств. Более того, все результаты работы [13] аналогично без изменений распространяются на случай, быть может, пересекающихся конечных граничных компактов.

Далее потребуется следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Суммой Минковского двух подмножеств A и B линейного пространства называется множество

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Также по определению полагаем

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\},$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$.

ЛЕММА 8. Пусть A — непустое замкнутое подмножество пространства X и $r, r' \geq 0$. Тогда $B_r(B_{r'}(A)) = B_{r+r'}(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В силу замкнутости множества A имеем

$$B_r(B_{r'}(A)) = A + B_r(0) + B_{r'}(0) = A + B_{r+r'}(0) = B_{r+r'}(A).$$

□

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть A — выпуклый компакт в нормированном пространстве X . Тогда $B_r(A)$ выпукло для любого $r \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если $r = \infty$, то $B_r(A) = X$ для любого A , следовательно, $B_r(A)$ выпукло. Пусть далее $r < \infty$.

Если $A = \emptyset$, то $B_r(A) = \emptyset$ согласно замечанию 1, а значит, тоже выпукло.

Пусть теперь $A \neq \emptyset$. В силу компактности A по лемме 2 имеем $B_r(0) + A = \bigcup_{a \in A} B_r(a) = B_r(A)$.

Также из [16] известно, что сумма Минковского двух выпуклых множеств выпукла. Но $B_r(0)$ и A выпуклы. Поэтому $B_r(A)$ тоже выпукло.

□

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть A — выпуклое подмножество в нормированном пространстве X . Тогда $U_r(A)$ выпукло для любого $r \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если $r = \infty$, то $U_r(A) = X$ для непустого A и $U_r(A) = \emptyset$ для пустого A . Следовательно, $B_r(A)$ выпукло при $r = \infty$ для любого A . Пусть далее $r < \infty$.

Если $A = \emptyset$, то $U_r(A) = \emptyset$ согласно замечанию 1, а значит, также выпукло.

Пусть теперь $A \neq \emptyset$. В силу леммы 2 верно $U_r(0) + A = \bigcup_{a \in A} U_r(a) = U_r(A)$. Из [16] известно, что сумма Минковского двух выпуклых множеств выпукла. Множества $U_r(0)$ и A выпуклы. Поэтому $U_r(A)$ тоже выпукло.

□

2.3. О расстояниях между подмножествами метрического пространства

В определениях 5 и 6 множества $A \subset X$ и $B \subset X$ непусты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Расстоянием между A и B называется величина

$$|A B| = \inf_{a \in A} |a B| = \inf_{a \in A, b \in B} |ab|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Расстоянием Хаусдорфа между A и B называется величина

$$d_H(A, B) = \inf \{r : A \subset B_r(B), B \subset B_r(A)\}.$$

Геометрия расстояния Хаусдорфа довольно подробно описана, например, в работе [18].

Обозначим множество непустых замкнутых и ограниченных подмножеств пространства X через $\mathcal{H}(X)$. Известно (см., например, [19, 20]), что в отличие от $|AB|$ расстояние Хаусдорфа $d_H(A, B)$ задаёт метрику на $\mathcal{H}(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Метрическое пространство $(\mathcal{H}(X), d_H)$ называется гиперпространством над пространством X .*

В леммах 9, 10 и 11 пространство X является конечномерным нормированным пространством над полем $\mathbb{R}$. Отметим, что лемма 9 используется только для доказательства леммы 10.

ЛЕММА 9. *Пусть $M \in \mathcal{H}(X)$, $x \in M$ и l — луч с началом в точке x . Тогда $l \cap \partial M \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Обозначим $l \cap M$ через l' . Заметим, что l' замкнуто как пересечение двух замкнутых множеств. Более того, l' — компакт как замкнутое подмножество компакта. Рассмотрим функцию $f: l' \rightarrow \mathbb{R}$, заданную правилом $a \mapsto \|a - x\|$. Функция f непрерывна как функция расстояния, и на l' она достигает своей точной верхней грани, так как l' компакт. Пусть $p \in l' \subset M$ такая, что

$$\max_{a \in l'} f(a) = f(p). \quad (2)$$

Но в силу (2) и ввиду линейности пространства X любая окрестность точки p содержит точки, не лежащие в M . Значит, по определению $p \in \partial M$. Следовательно, $l \cap \partial M \neq \emptyset$.

□

ЛЕММА 10. *Пусть $A, C \in \mathcal{H}(X)$, A — выпукло, $r > 0$, $C \subset B_r(A)$ и $|C \partial B_r(A)| = \gamma > 0$. Тогда для любого $0 \leq \delta \leq \min\{r, \gamma\}$ верно $C \subset B_{r-\delta}(A)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Допустим противное, что $C \setminus B_{r-\delta}(A) \neq \emptyset$. Пусть $x \in C \setminus B_{r-\delta}(A)$ и $y \in P_{B_{r-\delta}(A)}(x)$. Выпустим луч l из точки y , проходящий через x . Ввиду ограниченности множества A имеем $B_r(A) \in \mathcal{H}(X)$. Отсюда по лемме 9 получаем $l \cap \partial B_r(A) \neq \emptyset$. Пусть $z \in l \cap \partial B_r(A)$. По лемме 8 справедливо $\partial B_r(A) = \partial B_\delta(B_{r-\delta}(A))$. Поэтому $z \in \partial B_\delta(B_{r-\delta}(A))$. При этом согласно утверждению 1 верно $y \in P_{B_{r-\delta}(A)}(z)$. Значит, в силу леммы 4

$$\|z - y\| = \delta.$$

Но $x \in C$, $z \in \partial B_r(A)$ и по условию $|C \partial B_r(A)| = \gamma$, поэтому

$$\|z - x\| \geq \gamma.$$

При этом

$$\delta \leq \min\{r, \gamma\} \leq \gamma.$$

Следовательно,

$$\delta = \|z - y\| = \|z - x\| + \|x - y\| \geq \gamma + \|x - y\|.$$

Отсюда $\|x - y\| = 0$. Таким образом, $x = y$. Значит, $x \in \partial B_{r-\delta}(A) \subset B_{r-\delta}(A)$. Но по предположению $x \in C \setminus B_{r-\delta}(A)$. Получили противоречие. Значит, $C \setminus B_{r-\delta}(A) = \emptyset$, то есть $C \subset B_{r-\delta}(A)$. Лемма доказана.

□

ЛЕММА 11. *Пусть $M, N \in \mathcal{H}(X)$, $|MN| = \gamma > 0$ и $0 < \varepsilon < \gamma$. Тогда $|U_\varepsilon(M) \cap N| = \gamma - \varepsilon$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Покажем, что $|U_\varepsilon(M) \cap N| \leq \gamma - \varepsilon$. В силу компактности M и N существуют такие $x \in M$, $y \in N$, что длина отрезка $[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y \mid \lambda \in [0, 1]\}$ равна γ . Значит, ввиду $\varepsilon < \gamma$ можно выбрать такое $\lambda' \in (0, 1)$, что $\|x - (1 - \lambda')x - \lambda'y\| = \varepsilon$. Обозначим точку $(1 - \lambda')x + \lambda'y$ через z . Значит, $|z \cap M| \leq \varepsilon$, так как $x \in M$.

Покажем, что на самом деле $|z \cap M| = \varepsilon$. Допустим, что $|z \cap M| = \varepsilon' < \varepsilon$. Отметим, что ввиду $z \in (x, y)$ верно $\|z - y\| = \gamma - \varepsilon$. В силу компактности M найдётся точка $t \in M$ такая, что $\|t - z\| = \varepsilon'$. Но тогда длина ломаной, состоящей из двух звеньев $[t, z]$ и $[z, y]$, равна $\varepsilon' + \gamma - \varepsilon < \gamma$. Противоречие с тем, что $|M \cap N| = \gamma$. Поэтому $|z \cap M| = \varepsilon$.

В силу линейности пространства X имеем $|z \cap U_\varepsilon(M)| = 0$. Отсюда ввиду $\|z - y\| = \gamma - \varepsilon$ получаем $|U_\varepsilon(M) \cap N| \leq \gamma - \varepsilon$.

Покажем, что $|U_\varepsilon(M) \cap N| = \gamma - \varepsilon$. Допустим, $|U_\varepsilon(M) \cap N| < \gamma - \varepsilon$. Пусть $a \in B_\varepsilon(M)$ и $b \in N$ такие, что $\|a - b\| < \gamma - \varepsilon$. Рассмотрим $c \in P_M(a)$, то есть $\|c - a\| \leq \varepsilon$. Но тогда длина ломаной, состоящей из двух звеньев $[c, a]$ и $[a, b]$, строго меньше, чем γ . Получили противоречие с тем, что $|M \cap N| = \gamma$. Значит, $|U_\varepsilon(M) \cap N| = \gamma - \varepsilon$. Лемма доказана.

□

2.4. Разные вспомогательные утверждения и обозначения

В данном подразделе X — конечномерное нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Введём отображение $\text{Conv}: \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$, которое каждому элементу гиперпространства $\mathcal{H}(X)$ ставит в соответствие его выпуклую оболочку.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5 ([14]). *Преобразование Conv является 1-липшицевым.*

Согласно работе [21] справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 1 ([21]). *Пусть A и B — непустые выпуклые компакты в X . Тогда*

$$f: [|AB|, +\infty) \rightarrow \mathcal{H}(X),$$

$$f: r \mapsto B_r(A) \cap B,$$

непрерывно.

Замыкание подмножества $M \subset X$ всюду далее будем обозначать через $\text{Cl } M$. В разделе 3.4 будет нужна следующая лемма.

ЛЕММА 12. *Пусть B — выпуклое подмножество X с непустой внутреннейстью и U — открытое подмножество X . Тогда если $\partial B \cap U \neq \emptyset$, то $\text{Int } B \cap U \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Известно [16, 22], что в конечномерном нормированном пространстве для любого выпуклого множества B с непустой внутреннейстью верно

$$\text{Cl}(\text{Int } B) = \text{Cl } B. \quad (3)$$

Пусть $x \in \partial B \cap U$. Так как U — открытое подмножество X и $x \in U$, то U является окрестностью точки x . Из (3) получаем, что любая точка из $\text{Cl } B$ является точкой прикосновения для $\text{Int } B$. Но $x \in \partial B \subset \text{Cl } B$. Значит, $\text{Int } B \cap U \neq \emptyset$. Лемма доказана.

□

3. Основная часть

Как отмечалось выше, в данной работе будут рассматриваться только гиперпространства $\mathcal{H}(X)$, построенные над конечномерными нормированными пространствами, а в качестве метрики на них будет браться расстояние Хаусдорфа.

Итак, пусть X всюду далее — конечномерное нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$, $A = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ — произвольная (если не оговорено противное) граница, $d = \{d_1, \dots, d_n\} \in \Omega(A)$ и $K_d \in \Sigma_d(A)$ — максимальный компакт Штейнера.

3.1. О некоторых свойствах выпуклых оболочек

Отображение Conv , вообще говоря, не сохраняет метрику Хаусдорфа d_H . Продемонстрируем этот факт на примере, см. рис. 1. Пусть $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$ и $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}$, где ближайшая точка из L для k_i — это l_i , $|k_i l_i| = c_1$ и $|k_5 l_5| = c_2 > c_1$. Замечаем, что $d_H(K, L) = c_2$ и $d_H(\text{Conv}(K), \text{Conv}(L)) = c_1$.

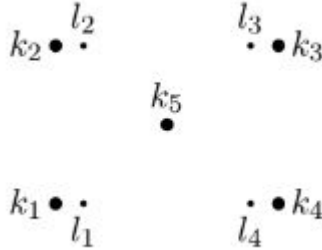


Рис. 1: Случай, когда $d_H(\text{Conv}(K), \text{Conv}(L)) < d_H(K, L)$

Заметим, что в случае выше справедливо также следующее неравенство: $d_H(K, \text{Conv}(L)) < d_H(K, L)$. Однако если взять выпуклую оболочку только одного компакта, то расстояние по Хаусдорфу может и увеличиться, см. рис. 2. А именно, пусть $K = \{k_1, k_2\}$ и $L = \{l_1, l_2\}$, где $|k_i l_i| = c$. Замечаем, что $d_H(K, L) = c$ и $d_H(K, \text{Conv}(L)) = \sqrt{c^2 + (\frac{|l_1 l_2|}{2})^2} > c = d_H(K, L)$.



Рис. 2: Случай, когда $d_H(K, \text{Conv}(L)) > d_H(K, L)$

Из сказанного выше возникает вопрос: когда Conv сохранит расстояние между двумя компактами? Оказывается, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A, B \in \mathcal{H}(X)$ и $d_H(A, B) = r$. Преобразование Conv сохраняет расстояние между A, B , если и только если существует $a \in A$ такая, что $U_r(a) \cap \text{Conv}(B) = \emptyset$, или существует $b \in B$ такая, что $U_r(b) \cap \text{Conv}(A) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Необходимость. По теореме Каратеодори любую точку a' из $\text{Conv}(A)$ можно представить в виде $a' = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i a_i$, где $a_i \in A$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i = 1$ и N — размерность пространства X . Так как $A \subset U_r(\text{Conv}(B))$, то для любой $a_i \in A$ существует $b_i \in \text{Conv}(B)$ такая, что $|a_i b_i| < r = d_H(A, B)$. Замечаем, что $b' = \sum_i \lambda_i b_i \in \text{Conv}(B)$. Следовательно,

$\|a' - b'\| = \|\sum_i \lambda_i(a_i - b_i)\| \leq \sum_i \lambda_i \|a_i - b_i\| < r$. Значит, $\text{Conv}(A) \subset U_r(\text{Conv}(B))$. Аналогично получаем, что $\text{Conv}(B) \subset U_r(\text{Conv}(A))$. Значит,

$$d_H(\text{Conv}(A), \text{Conv}(B)) = \min\{s : \text{Conv}(A) \subset B_s(\text{Conv}(B)), \text{Conv}(B) \subset B_s(\text{Conv}(A))\} < r$$

— противоречие. Поэтому существует $a \in A$ такая, что $U_r(a) \cap \text{Conv}(B) = \emptyset$, или существует $b \in B$ такая, что $U_r(b) \cap \text{Conv}(A) = \emptyset$.

Достаточность. Не ограничивая общности, пусть существует $a \in A$ такая, что $U_r(a) \cap \text{Conv}(B) = \emptyset$. Допустим, что расстояние не сохранилось. Согласно утверждению 5 оно могло лишь уменьшиться, то есть $r > d_H(\text{Conv}(A), \text{Conv}(B))$. Это означает, что для найденной точки $a \in A \subset \text{Conv}(A)$ существует точка $b \in \text{Conv}(B)$ такая, что $|ab| < r = d_H(A, B)$. Поэтому $b \in U_r(a)$. Но тогда $b \in U_r(a) \cap \text{Conv}(B)$ — противоречие.

□

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть $\{K_1, \dots, K_n\} \subset \mathcal{H}(X)$. Тогда $\text{Conv}(\bigcap_{i=1}^n K_i) \subset \bigcap_{i=1}^n \text{Conv}(K_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Имеем: $\bigcap_{i=1}^n K_i \subset K_j$ для всех j . Поэтому $\text{Conv}(\bigcap_{i=1}^n K_i) \subset \text{Conv}(K_j)$ для всех j . Значит, $\text{Conv}(\bigcap_{i=1}^n K_i) \subset \bigcap_{i=1}^n \text{Conv}(K_i)$.

□

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть $K \in \mathcal{H}(X)$. Тогда $B_r(\text{Conv}(K)) = \text{Conv}(B_r(K))$ для любого $r \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

По теореме Каратеодори

$$\text{Conv}(K) = \bigcup_{p_1, \dots, p_{N+1} \in K} \bigcup_{\lambda_1 + \dots + \lambda_{N+1} = 1} \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_{N+1} p_{N+1},$$

где $\lambda_i \geq 0$ и N — размерность пространства X . Также

$$\bigcup_{p_1, \dots, p_{N+1} \in K} \bigcup_{\lambda_1 + \dots + \lambda_{N+1} = 1} \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_{N+1} p_{N+1} = \bigcup_{\lambda_1 + \dots + \lambda_{N+1} = 1} \lambda_1 K + \dots + \lambda_{N+1} K.$$

Отсюда имеем в силу свойств суммы Минковского

$$\begin{aligned} B_r(\text{Conv}(K)) &= \text{Conv}(K) + B_r(0) = \\ &= \left(\bigcup_{\lambda_1 + \dots + \lambda_{N+1} = 1} \lambda_1 K + \dots + \lambda_{N+1} K \right) + B_r(0) = \bigcup_{\lambda_1 + \dots + \lambda_{N+1} = 1} (\lambda_1 K + \dots + \lambda_{N+1} K + B_r(0)) = \\ &= \bigcup_{\lambda_1 + \dots + \lambda_{N+1} = 1} \lambda_1 (K + B_r(0)) + \dots + \lambda_{N+1} (K + B_r(0)) = \text{Conv}(K + B_r(0)) = \text{Conv}(B_r(K)). \end{aligned}$$

□

Обозначим $\bigcap_{i=1}^n B_{d_i}(\text{Conv}(A_i))$ через K_d^{Conv} .

СЛЕДСТВИЕ 1. $\text{Conv}(K_d) \subset K_d^{\text{Conv}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

По утверждению 6 имеем

$$\text{Conv}(K_d) = \text{Conv}\left(\bigcap_{i=1}^n B_{d_i}(A_i)\right) \subset \bigcap_{i=1}^n \text{Conv}(B_{d_i}(A_i)).$$

По утверждению 7 получаем

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Conv}(B_{d_i}(A_i)) = \bigcap_{i=1}^n B_{d_i}(\text{Conv}(A_i)) = K_d^{\text{Conv}}.$$

Поэтому $\text{Conv}(K_d) \subset K_d^{\text{Conv}}$.

□

СЛЕДСТВИЕ 2. Для всех i выполняется $d_H(\text{Conv}(A_i), K_d^{\text{Conv}}) \leq d_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Имеем $K_d^{\text{Conv}} \subset B_{d_i}(\text{Conv}(A_i))$. С другой стороны, так как $A_i \subset B_{d_i}(K_d)$, то

$$\text{Conv}(A_i) \subset \text{Conv}(B_{d_i}(K_d)).$$

По утверждению 7 получаем

$$\text{Conv}(B_{d_i}(K_d)) = B_{d_i}(\text{Conv}(K_d)).$$

И в силу следствия 1

$$B_{d_i}(\text{Conv}(K_d)) \subset B_{d_i}(K_d^{\text{Conv}}).$$

Таким образом, $\text{Conv}(A_i) \subset B_{d_i}(K_d^{\text{Conv}})$ для всех i . Следовательно,

$$d_H(\text{Conv}(A_i), K_d^{\text{Conv}}) \leq d_i.$$

□

3.2. Далёкие, неплотные и дискретные точки, их взаимосвязь

Введём следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть дана граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$. Точку $a \in A_i$ назовём далёкой точкой компакта A_i для вектора $\tilde{d} = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\tilde{d}_j \geq 0$, если $U_{\tilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^n B_{\tilde{d}_j}(A_j) = \emptyset$. Множество всех далёких для вектора $\tilde{d}$ точек компакта $A_i \in A$ обозначим через $F_{\tilde{d}}^{A_i}$. Также положим $F_{\tilde{d}}^A = \bigcup_j F_{\tilde{d}}^{A_j}$.

Отметим, что если $\tilde{d} = d \in \Omega(A)$, то

$$U_{\tilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^n B_{\tilde{d}_j}(A_j) = U_{d_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^n B_{d_j}(A_j) = U_{d_i}(a) \cap K_d,$$

где K_d — максимальный компакт Штейнера в классе решений $\Sigma_d(A)$.

Часто уточнение о том, для какого именно вектора $\tilde{d}$ точка $a \in A_i$ является далёкой, будет опускаться, где это не вызовет недоразумений. Напомним, что векторы решений обозначаются в тексте через d , а компоненты вектора решения через d_i , то есть $d_i = d_H(A_i, K)$, где $K \in \Sigma_d(A)$.

В данной работе нас интересует поведение именно векторов решений $d \in \Omega(A)$. Поэтому всюду далее в тексте, если не оговорено противное, далёкие точки будут рассматриваться только для $d \in \Omega(A)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Если $a \in F_d^{A_i}$ и $d_i > 0$, то $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset \partial K_d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $a \in A_i$ — далёкая, то есть $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$. Значит, $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset \partial B_{d_i}(a)$. В нормированном пространстве любая точка из $\partial B_{d_i}(a)$ является точкой прикосновения для $U_{d_i}(a)$. Но $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset K_d$. Поэтому, так как $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$ и $d_i > 0$, в любой окрестности точки из $B_{d_i}(a) \cap K_d$ содержатся как точки из K_d , так и точки, не лежащие в K_d . Следовательно, по определению граничных точек $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset \partial K_d$.

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Границу A , все элементы которой являются выпуклыми компактами, назовём *выпуклой*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Пусть $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ — выпуклая граница, $a \in A_i$ — далёкая точка и $d_i > 0$. Тогда $a \in \partial A_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Так как $a \in A_i$ — далёкая, то $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$. Следовательно, так как $d_i > 0$, то $a \in X \setminus K_d$. Компакт K_d выпуклый в силу выпуклости границы. Поэтому согласно утверждению 1 для точки a и для любой точки $p \in P_{K_d}(a)$ верно $p \in P_{K_d}(a_\lambda)$ при всех $\lambda \geq 0$, где $a_\lambda = (1 - \lambda)p + \lambda a$.

Заметим, что $B_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$, так как $A_i \subset B_{d_i}(K_d)$. Значит, $|aK_d| = d_i$ ввиду того, что a — далёкая точка. Но $p \in P_{K_d}(a)$, поэтому $|ap| = d_i$ по определению 2.

Допустим, что $a \in \text{Int } A_i$. Тогда в силу линейности пространства X существует такое $\lambda > 1$, что $|a_\lambda p| > |ap| = d_i$ и при этом $a_\lambda \in A_i$. Ввиду того, что $p \in P_{K_d}(a_\lambda)$, имеем $|a_\lambda K_d| > d_i$. Значит, $A_i \not\subset B_{d_i}(K_d)$. Получили противоречие с тем, что $d_i = d_H(A_i, K_d)$. Поэтому $a \in \partial A_i$.

□

Вообще говоря, неясно, для любой ли конечной границы $A \subset \mathcal{H}(X)$ далёкие точки всегда найдутся хотя бы в одном A_i и хотя бы для одного вектора $d \in \Omega(A)$. Например, возможно, не исключена ситуация, изображённая на рисунке 3. А именно, $A = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}$, где $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$; $\mathfrak{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$; $\mathfrak{C} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Предположим, что вектор

$$d = (d_1 = d_H(\mathfrak{A}, K_d); d_2 = d_H(\mathfrak{B}, K_d); d_3 = d_H(\mathfrak{C}, K_d)),$$

по которому построен

$$\begin{aligned} K_d = & (B_{d_1}(a_1) \cap B_{d_2}(b_1) \cap B_{d_3}(c_1)) \cup \\ & \cup (B_{d_1}(a_2) \cap B_{d_3}(c_1)) \cup (B_{d_1}(a_2) \cap B_{d_2}(b_3) \cap B_{d_3}(c_2)) \cup (B_{d_1}(a_3) \cap B_{d_2}(b_3)) \cup \\ & \cup (B_{d_1}(a_3) \cap B_{d_2}(b_4) \cap B_{d_3}(c_4)), \end{aligned}$$

принадлежит $\Omega(A)$. Причём, оба множества

$$B_{d_1}(a_2) \cap B_{d_3}(c_1) \subset U_{d_2}(b_2)$$

и

$$B_{d_1}(a_3) \cap B_{d_2}(b_3) \subset U_{d_3}(c_3)$$

одноточечны. Замечаем, что если мы сколь угодно уменьшим d_1 , то перестроенный в соответствии с уменьшенным расстоянием d_1 компакт K_d , обозначим его через $K_{d'}$ уже не будет компактом Штейнера, так как тогда, например, $b_2 \notin B_{d_2}(K_{d'})$, чего быть не может по определению расстояния Хаусдорфа. Аналогично, если сколь угодно уменьшим d_2 , то $c_3 \notin B_{d_3}(K_{d'})$ и если сколь угодно уменьшим d_3 , то снова $b_2 \notin B_{d_2}(K_{d'})$.

При этом $U_{d_1}(a_i) \cap K_d \neq \emptyset$, $U_{d_2}(b_i) \cap K_d \neq \emptyset$ и $U_{d_3}(c_i) \cap K_d \neq \emptyset$ для всех i . Таким образом, если в самом деле данный вектор d является решением проблемы Ферма — Штейнера для границы A , то у всех граничных компактов из A нет далёких точек.

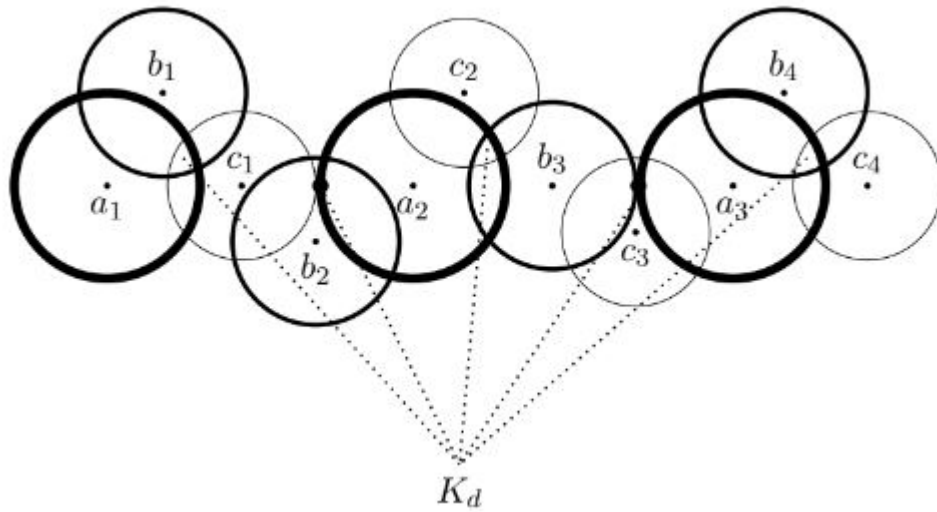


Рис. 3: Случай границы без далёких точек

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть дана граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$. Точку $a \in A_i$ назовём *неплотной точкой* компакта A_i для вектора $\tilde{d} = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\tilde{d}_j \geq 0$, если $\text{Int}(B_{\tilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^n B_{\tilde{d}_j}(A_j)) = \emptyset$. Множество всех неплотных для вектора $\tilde{d}$ точек компакта $A_i \in A$ обозначим через $L_{\tilde{d}}^{A_i}$. Также положим $L_{\tilde{d}}^A = \bigcup_j L_{\tilde{d}}^{A_j}$.

Аналогично, если $\tilde{d} = d \in \Omega(A)$, то

$$\text{Int}(B_{\tilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^n B_{\tilde{d}_j}(A_j)) = \text{Int}(B_{d_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^n B_{d_j}(A_j)) = \text{Int}(B_{d_i}(a) \cap K_d),$$

где K_d — максимальный компакт Штейнера в классе решений $\Sigma_d(A)$.

Как в случае далёких точек, уточнение о том, для какого именно вектора $\tilde{d}$ точка $a \in A_i$ является неплотной, будет опускаться, где это не вызовет недоразумений. Напомним, что векторы решений из $\Omega(A)$ обозначаются в тексте через d , а их компоненты — через d_i .

В данной работе нас интересует поведение именно векторов решений $d \in \Omega(A)$. Поэтому всюду далее в тексте, если не оговорено противное, неплотные точки будут рассматриваться только для $d \in \Omega(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В силу определения 8 далёкие точки всегда являются неплотными. Действительно, если $a \in F_d^{A_i}$, то $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$ и поэтому $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset \partial B_{d_i}(a)$ при $d_i > 0$, либо $B_{d_i}(a) \cap K_d = \{a\}$ при $d_i = 0$. Следовательно, $\text{Int}(B_{d_i}(a) \cap K_d) = \emptyset$, то есть $a \in L_d^{A_i}$ — неплотная точка.

Однако обратное, вообще говоря, неизвестно. А именно, неясно, всегда ли неплотные точки являются далёкими.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. Если $\text{Cl}(\text{Int } K_d) = K_d$, то для вектора d все неплотные точки совпадают с далёкими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Напомним, что в настоящей работе через F_d^A обозначается множество всех далёких точек для вектора d , а через L_d^A — множество всех неплотных точек для вектора d . Согласно замечанию 4 имеем $F_d^A \subset L_d^A$. Поэтому нужно доказать $L_d^A \subset F_d^A$ при условии, что $\text{Cl}(\text{Int } K_d) = K_d$.

Пусть $a \in A_i$ — неплотная точка, то есть $\text{Int}(B_{d_i}(a) \cap K_d) = \emptyset$. Покажем, что тогда $a \in F_d^A$, то есть $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$. Допустим противное, а именно, $U_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Возьмём $x \in U_{d_i}(a) \cap K_d$. В силу условия $\text{Cl}(\text{Int } K_d) = K_d$ любая точка из K_d является точкой прикосновения для $\text{Int } K_d$. Значит, так как $U_{d_i}(a)$ является окрестностью взятой точки $x \in K_d$, то $U_{d_i}(a) \cap \text{Int } K_d \neq \emptyset$. Хорошо известно, что в топологических пространствах внутренность пересечения конечного числа множеств равна пересечению их внутренностей. Поэтому $\emptyset \neq U_{d_i}(a) \cap \text{Int } K_d = \text{Int } B_{d_i}(a) \cap \text{Int } K_d = \text{Int}(B_{d_i}(a) \cap K_d) = \emptyset$. Получили противоречие.

Значит, из $\text{Int}(B_{d_i}(a) \cap K_d) = \emptyset$ следует $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$. Поэтому $L_d^A \subset F_d^A$. Отсюда $L_d^A = F_d^A$. Утверждение доказано.

□

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $\text{Int } K_d \neq \emptyset$ и граница A выпукла, то для вектора d все неплотные точки совпадают с далёкими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Граница A выпукла, поэтому K_d — выпуклый компакт как пересечение выпуклых множеств.

Известно [16, 22], что в конечномерном нормированном пространстве для любого выпуклого множества M с непустой внутренностью верно $\text{Cl}(\text{Int } M) = \text{Cl } M$. Так как K_d — компакт, то $\text{Cl } K_d = K_d$. Следовательно, $\text{Cl}(\text{Int } K_d) = K_d$.

Таким образом, мы приходим к условию утверждения 10. Значит, для вектора d все неплотные точки совпадают с далёкими.

□

ТЕОРЕМА 3. Пусть граница A является выпуклой. Тогда для любого вектора $d \in \Omega(A)$ существует граничный компакт A_i , содержащий далёкую для этого вектора решения точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Допустим противное, то есть что для всех A_i и всех точек $a \in A_i$ выполнено $U_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Но тогда $A_i \subset U_{d_i}(K_d)$ для любого i . Значит, положительна величина:

$$\gamma_i = |A_i \cap \partial B_{d_i}(K_d)|.$$

Следовательно, в силу конечного числа компактов в границе A получаем

$$\gamma = \min_{i \in [1, n]} \gamma_i > 0.$$

Таким образом, для любого i согласно лемме 10 имеем

$$A_i \subset B_{d_i-\gamma}(K_d).$$

По условию все A_i выпуклы, значит, K_d тоже выпуклый. Поэтому согласно теореме 1 множество $B_{d_i}(A_i) \cap K_d$ меняется непрерывно при малых возмущениях d_i . Зафиксируем номер i . Таким образом, для $0 < \varepsilon < \gamma$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$K_d = B_{d_i}(A_i) \cap K_d \subset B_\varepsilon(B_{d_i-\delta}(A_i) \cap K_d).$$

Обозначим $B_{d_i-\delta}(A_i) \cap K_d$ через K . Таким образом, $K_d \subset B_\varepsilon(K)$. Значит, для любого j согласно лемме 8 верно

$$A_j \subset B_{d_j-\gamma}(K_d) \subset B_{d_j-\gamma}(B_\varepsilon(K)) = B_{d_j-\gamma+\varepsilon}(K).$$

При этом $K \subset K_d \subset B_{d_j}(A_j)$ для всех j и $K \subset B_{d_i-\delta}(A_i)$. Значит, $d_H(K, A_j) \leq d_j$ и $d_H(K, A_i) \leq \max(d_i - \delta, d_i - \gamma + \varepsilon) < d_i$. Следовательно, $S(A, K) < S(A, K_d)$, получили противоречие. Теорема доказана.

□

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть граница A является выпуклой и $\text{Int } K_d \neq \emptyset$. Тогда для любого вектора $d \in \Omega(A)$ существует граничный компакт A_i , содержащий неплотную для этого вектора решения точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Согласно следствию 3 в случае выпуклой границы и непустой внутренней максимального компакта Штейнера K_d далёкие точки совпадают с неплотными. Но в силу теоремы 3 у выпуклой границы существует по крайней мере одна далёкая точка. Значит, существует по крайней мере одна неплотная точка.

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Границу A , все элементы которой являются конечными множествами, назовём *финитной*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Пусть дана граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$. Точку $a \in A_i$ назовём *дискретной точкой* компакта A_i для вектора $\tilde{d} = (\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\tilde{d}_j \geq 0$, если $\#B_{\tilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^n B_{\tilde{d}_j}(A_j) < \infty$. Множество всех дискретных для вектора $\tilde{d}$ точек компакта $A_i \in A$ обозначим через $D_{\tilde{d}}^{A_i}$. Также положим $D_{\tilde{d}}^A = \bigcup_j D_{\tilde{d}}^{A_j}$.

Снова, если $\tilde{d} = d \in \Omega(A)$, то

$$\#B_{\tilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^n B_{\tilde{d}_j}(A_j) = \#B_{d_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^n B_{d_j}(A_j) = \#B_{d_i}(a) \cap K_d,$$

где K_d — максимальный компакт Штейнера в классе решений $\Sigma_d(A)$.

Как с далёкими и с неплотными точками, ввиду ясности часто не будет уточняться вектор $\tilde{d}$, для которого точка $a \in A_i$ является дискретной.

В данной работе нас интересует поведение именно векторов решений $d \in \Omega(A)$. Поэтому всюду далее в тексте, если не оговорено противное, дискретные точки будут рассматриваться только для $d \in \Omega(A)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. Если $a \in A_i$ дискретна, то $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset \partial K_d$.

Как было отмечено в замечании 3, доказательство утверждения 11 в наших условиях дословно повторяет соответствующее доказательство из [13] для случая $X = \mathbb{R}^m$ и финитной границы A с попарно непересекающимися компактными.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $A \subset \mathcal{H}(X)$ — финитная граница и норма пространства X строго выпукла. Тогда для любого вектора $d \in \Omega(A)$ по крайней мере в одном граничном компакте A_i найдётся дискретная точка для этого вектора решения.

Снова, как отмечено в замечании 3, доказательство теоремы 4 в точности такое же, как и в [13] для случая $X = \mathbb{R}^m$ с попарно непересекающимися граничными компактными.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. В случае финитной границы $A \subset \mathcal{H}(X)$ и пространства X со строго выпуклой нормой для вектора $d \in \Omega(A)$ неплотные точки совпадают с дискретными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Напомним, что в настоящей работе через D_d^A обозначается множество всех дискретных точек для вектора d , а через L_d^A — множество всех неплотных точек для вектора d . Согласно утверждению 11 имеем $D_d^A \subset L_d^A$. Поэтому нужно доказать, что $L_d^A \subset D_d^A$ в случае финитной границы A и строго выпуклой нормы X .

Пусть $a \in A_i$ — неплотная точка, то есть $\text{Int}(B_{d_i}(a) \cap K_d) = \emptyset$. Покажем, что тогда $a \in D_d^A$, то есть $\#B_{d_i}(a) \cap K_d < \infty$. Имеем

$$K_d = \bigcup_{j_1, \dots, j_n} B_{d_1}(a_{j_1}^1) \cap \dots \cap B_{d_n}(a_{j_n}^n).$$

Так как по условию $\text{Int}(B_{d_i}(a) \cap K_d) = \emptyset$, то

$$\text{Int}(B_{d_i}(a) \cap B_{d_1}(a_{j_1}^1) \cap \dots \cap B_{d_n}(a_{j_n}^n)) = \emptyset$$

для всех наборов $j_1, \dots, j_n$. Значит, согласно лемме 7 каждое множество

$$B_{d_i}(a) \cap B_{d_1}(a_{j_1}^1) \cap \dots \cap B_{d_n}(a_{j_n}^n)$$

одноточечно. В силу финитности границы A таких множеств конечное число. Поэтому множество $B_{d_i}(a) \cap K_d$ состоит из конечного числа точек. Следовательно, точка a является дискретной точкой. Отсюда в силу произвольности a получаем $L_d^A \subset D_d^A$. Значит, $L_d^A = D_d^A$. Утверждение доказано.

□

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть граница A является финитной, а пространство X имеет строго выпуклую норму. Тогда для любого вектора $d \in \Omega(A)$ существует граничный компакт A_i , содержащий неплотную для этого вектора решения точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Согласно утверждению 12 в случае финитной границы и пространства X со строго выпуклой нормой дискретные точки совпадают с неплотными. Но в силу теоремы 4 у финитной границы существует по крайней мере одна дискретная точка для любого вектора $d \in \Omega(A)$. Значит, существует по крайней мере одна неплотная точка.

□

Из утверждений 10 и 12 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Если $A \subset \mathcal{H}(X)$ — финитная граница, норма пространства X строго выпукла и выполняется условие $\text{Cl}(\text{Int } K_d) = K_d$, то

$$F_d^A = L_d^A = D_d^A.$$

Введём обозначения, которые нам понадобятся в следующих разделах настоящей работы. Пусть $\tilde{d} \in \mathbb{R}^n$, и $\tilde{d}_j \geq 0$ для всех j . Положим также, что $Y_{\tilde{d}}^{A_i}$ — один из трёх типов точек $F_{\tilde{d}}^{A_i}$, $L_{\tilde{d}}^{A_i}$ или $D_{\tilde{d}}^{A_i}$, то есть $Y_{\tilde{d}}^{A_i} \in \{F_{\tilde{d}}^{A_i}, L_{\tilde{d}}^{A_i}, D_{\tilde{d}}^{A_i}\}$ и $Y_{\tilde{d}}^A \in \{F_{\tilde{d}}^A, L_{\tilde{d}}^A, D_{\tilde{d}}^A\}$. Тогда

- $\text{HP}(p, Y_{\tilde{d}}^{A_i}) := B_{\tilde{d}_i}(p) \cap \bigcap_{j=1}^n B_{\tilde{d}_j}(A_j)$, где $p \in Y_{\tilde{d}}^{A_i}$;
- $\text{HP}(Y_{\tilde{d}}^{A_i}) := \bigcup_{p \in Y_{\tilde{d}}^{A_i}} \text{HP}(p, Y_{\tilde{d}}^{A_i})$;
- $\text{HP}(Y_{\tilde{d}}^A) := \bigcup_i \text{HP}(Y_{\tilde{d}}^{A_i})$.

Отметим, что если $\tilde{d} = d \in \Omega(A)$, то $\bigcap_{j=1}^n B_{\tilde{d}_j}(A_j) = K_d$ — максимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$. Поэтому в таком случае $\text{HP}(p, Y_{\tilde{d}}^{A_i}) = B_{d_i}(p) \cap \bigcap_{j=1}^n B_{d_j}(A_j) = B_{d_i}(p) \cap K_d$, где $p \in Y_{\tilde{d}}^{A_i}$.

Подчеркнём, что в обозначении $\text{HP}(p, Y_{\tilde{d}}^{A_i})$ параметр $Y_{\tilde{d}}^{A_i}$ определяет свойство, которым обладает множество $B_{\tilde{d}_i}(p) \cap \bigcap_{j=1}^n B_{\tilde{d}_j}(A_j)$. А именно, при $p \in F_{\tilde{d}}^{A_i}$ имеем $U_{\tilde{d}_i}(p) \cap \bigcap_{j=1}^n B_{\tilde{d}_j}(A_j) = \emptyset$; при $p \in L_{\tilde{d}}^{A_i}$ верно $\text{Int}(B_{\tilde{d}_i}(p) \cap \bigcap_{j=1}^n B_{\tilde{d}_j}(A_j)) = \emptyset$; а при $p \in D_{\tilde{d}}^{A_i}$ справедливо $\#B_{\tilde{d}_i}(p) \cap \bigcap_{j=1}^n B_{\tilde{d}_j}(A_j) < \infty$.

Далее везде, где будет ясно, о какой границе A и о каком векторе $\tilde{d}$ идёт речь, верхний индекс A и нижний индекс $\tilde{d}$ будут опускаться, а именно, $Y_{\tilde{d}}^{A_i}$ и $Y_{\tilde{d}}^A$ будут заменяться на Y^i и Y соответственно при $Y \in \{F, L, D\}$.

Напомним, что векторы решений обозначаются в тексте через d , а компоненты вектора решения через d_i , то есть $d_i = d_H(A_i, K)$, где $K \in \Sigma_d(A)$.

Леммы 13, 14, 15 и замечание 5 сформулированы, чтобы раскрыть геометрию множества $\text{HP}(F^i)$, которое далее будет часто использоваться.

ЛЕММА 13. Если $d_i = 0$, то $\text{HP}(F_d^{A_i}) = A_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Так как $d_i = 0$, то для любой точки $a \in A_i$ верно $U_{d_i}(a) = \emptyset$, и значит, $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$. Следовательно, $F^i = A_i$. Ввиду того, что $0 = d_i = d_H(A_i, K_d)$, имеем $A_i = K_d$. Поэтому $\text{HP}(F^i) = B_{d_i}(F^i) \cap K_d = A_i$.

□

ЛЕММА 14. Если $A_i \subset K_d$ и $A_i \neq K_d$, то $\text{HP}(F_d^{A_i}) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Так как $A_i \subset K_d$ и $A_i \neq K_d$, то $d_i > 0$. Значит, для любой точки $a \in A_i$ справедливо $U_{d_i}(a) \neq \emptyset$. При этом $a \in A_i \subset K_d$. Следовательно, $U_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$ для любой точки $a \in A_i$. Поэтому $F^i = \emptyset$. Отсюда согласно замечанию 1 верно $\text{HP}(F^i) = B_{d_i}(F^i) \cap K_d = \emptyset$.

□

Заметим, что $\text{HP}(F_d^{A_i})$ можно определить следующим образом. Ввиду того, что $F_d^{A_i}$ — это множество всех далёких точек в A_i , имеем $F_d^{A_i} = A_i \setminus U_{d_i}(K_d)$. Тогда по лемме 2 в силу

компактности $F_d^{A_i}$ верно

$$\text{НР}(F_d^{A_i}) = \bigcup_{p \in F_d^{A_i}} \text{НР}(p, F_d^{A_i}) = \bigcup_{p \in F_d^{A_i}} (B_{d_i}(p) \cap K_d) = \left(\bigcup_{p \in F_d^{A_i}} B_{d_i}(p) \right) \cap K_d = B_{d_i}(F_d^{A_i}) \cap K_d. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Множество $\text{НР}(F_d^{A_i})$ — компакт как пересечение двух компактов.

ЛЕММА 15. Множество $\text{НР}(F_d^{A_i})$ непусто тогда и только тогда, когда $F_d^{A_i}$ непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Согласно лемме 2

$$\text{НР}(F^i) = B_{d_i}(F^i) \cap K_d = \bigcup_{f \in F^i \subset A_i} B_{d_i}(f) \cap K_d.$$

Напомним, что для любой точки $a \in A_i$ верно $B_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Следовательно, $\bigcup_{f \in F^i \subset A_i} B_{d_i}(f) \cap K_d \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $F^i \neq \emptyset$. Лемма доказана.

□

3.3. О взаимосвязи выпуклой границы с максимальным компактом Штейнера

Главным результатом, содержащимся в данном разделе, является теорема 6 о взаимосвязи выпуклой границы $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ с максимальным компактом Штейнера K_d . Под взаимосвязью здесь имеется в виду то, как именно каждый шар $B_{d_i}(A_i)$ пересекается, то есть взаимодействует, с компактом K_d . Теорема 6 говорит о том, что это пересечение обязано содержать элементы из множества $\text{НР}(F_d^A) \subset K_d$ (как было отмечено, более лаконично такое множество в тексте ещё обозначается через $\text{НР}(F)$). Также теорема 6 утверждает, что если сам компакт A_i не порождает множество $\text{НР}(F^i) \subset \text{НР}(F)$, то есть если $\text{НР}(F^i) = \emptyset$, что эквивалентно $F^i = \emptyset$ согласно лемме 15, то тогда $\text{НР}(F) \cap \partial B_{d_i}(A_i) \neq \emptyset$. Однако прежде чем переходить к формулировке этой теоремы и её доказательству, требуется ввести следующий вспомогательный результат, лемма 16.

Отметим, что все результаты настоящего раздела формулируются для некоторого вектора решения $d \in \Omega(A)$, где $A = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$.

Пусть граница A выпукла, $\text{НР}(F^i) \neq \emptyset$ и для некоторого $j \neq i$ верно $\text{НР}(F^i) \subset U_{d_j}(A_j)$. Положим

$$\gamma = |\text{НР}(F^i) \cap \partial B_{d_j}(A_j)|. \quad (5)$$

Тогда справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 16. Для любого $0 < \varepsilon < \gamma$ найдётся $\Delta > 0$ такое, что для любого $0 \leq \delta \leq \Delta$ при

$$H = B_{d_i+\delta}(F^i) \cap K_d$$

верно

$$|H \cap \partial B_{d_j}(A_j)| \geq \gamma - \varepsilon > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $p \in F^i$, то есть $U_{d_i}(p) \cap K_d = \emptyset$. По условию все граничные компакты выпуклы, значит, K_d тоже выпуклый. Поэтому согласно теореме 1 множество $\text{НР}(p, F^i) = B_{d_i}(p) \cap K_d$ меняется непрерывно при увеличении d_i .

Пусть $0 < \varepsilon < \gamma$. Тогда для ε найдётся такое $\Delta > 0$, что для любого $0 \leq \delta \leq \Delta$ верно

$$H(p) := B_{d_i+\delta}(p) \cap K_d \subset B_{d_i+\Delta}(p) \cap K_d \subset U_\varepsilon(B_{d_i}(p) \cap K_d) = U_\varepsilon(\text{НР}(p, F^i)).$$

Заметим, что $\text{НР}(p, F^i) \subset \text{НР}(F^i)$. Напомним, что согласно (5) имеем $|\text{НР}(F^i) \partial B_{d_j}(A_j)| = \gamma$. Поэтому $|\text{НР}(p, F^i) \partial B_{d_j}(A_j)| =: \gamma' \geq \gamma$. Но тогда по лемме 11

$$|U_\varepsilon(\text{НР}(p, F^i)) \partial B_{d_j}(A_j)| = \gamma' - \varepsilon \geq \gamma - \varepsilon.$$

Значит, так как $H(p) \subset U_\varepsilon(\text{НР}(p, F^i))$, то

$$|H(p) \partial B_{d_j}(A_j)| \geq \gamma - \varepsilon > 0.$$

Отсюда

$$\inf_{p \in F^i} |H(p) \partial B_{d_j}(A_j)| \geq \gamma - \varepsilon > 0.$$

В силу компактности F^i , по лемме 2 имеем равенство

$$\bigcup_{p \in F^i} H(p) = \bigcup_{p \in F^i} (B_{d_i+\delta}(p) \cap K_d) = \left(\bigcup_{p \in F^i} B_{d_i+\delta}(p) \right) \cap K_d = B_{d_i+\delta}(F^i) \cap K_d = H.$$

Следовательно, $|H \partial B_{d_j}(A_j)| \geq \gamma - \varepsilon > 0$. Лемма доказана.

□

ТЕОРЕМА 6 (О взаимосвязи выпуклой границы с K_d). Пусть граница A выпукла и все d_i положительны для некоторого $d \in \Omega(A)$. Тогда для любого номера i существует точка $p \in \text{НР}(F)$ такая, что $p \in \text{НР}(F^i)$ или $p \in \partial B_{d_i}(A_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Допустим противное, а именно, пусть существует номер i такой, что для любой $p \in \text{НР}(F)$ верно $p \notin \text{НР}(F^i)$ и $p \notin \partial B_{d_i}(A_i)$. Значит,

$$\text{НР}(F^i) = \emptyset.$$

Также по определению $\text{НР}(F) \subset K_d$. Но $K_d = \bigcap_{i=1}^n B_{d_i}(A_i)$. Значит, $\text{НР}(F) \subset B_{d_i}(A_i)$. Следовательно, ввиду $\text{НР}(F) \cap \partial B_{d_i}(A_i) = \emptyset$ имеем

$$\text{НР}(F) \subset U_{d_i}(A_i).$$

Так как $\text{НР}(F^j) \subset U_{d_i}(A_i)$ и $\text{НР}(F^j)$ — компакт согласно замечанию 5, то $\gamma_j = |\text{НР}(F^j) \cdot \partial B_{d_i}(A_i)| > 0$ для всех непустых $\text{НР}(F^j)$. По теореме 3 существует по крайней мере один $A_j \in A$ такой, что $\text{НР}(F^j) \neq \emptyset$. Поэтому определено

$$\gamma = \min_{j: \text{НР}(F^j) \neq \emptyset} \gamma_j > 0.$$

Пусть $\text{НР}(F^k) \neq \emptyset$, что эквивалентно $F^k \neq \emptyset$ по лемме 15. Тогда согласно лемме 16 для $0 < \varepsilon < \gamma$ найдётся $R_k > 0$ такое, что для любого $0 < r_k \leq R_k$ верно $|(B_{d_k+r_k}(F^k) \cap K_d) \partial B_{d_i}(A_i)| \geq \gamma_k - \varepsilon \geq \gamma - \varepsilon > 0$.

Введём обозначения:

$$r = \min_{j: \text{НР}(F^j) \neq \emptyset} r_j > 0;$$

$$H_j = B_{d_j+r}(F^j) \cap K_d. \quad (6)$$

Согласно замечанию 1 если $F^j = \emptyset$, то $B_{d_j+r}(F^j) = \emptyset$ и поэтому $H_j = \emptyset$. С другой стороны, так как $F^j \subset A_j$ и $B_{d_j}(a) \cap K_d \neq \emptyset$ для любой $a \in A_j$, то из $H_j = \emptyset$ следует $B_{d_j+r}(F^j) = \emptyset$. Но $F^j \subset B_{d_j+r}(F^j)$. Значит, $F^j = \emptyset$. Таким образом, $H_j = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $F^j = \emptyset$.

Заметим, что из сказанного выше вытекает

$$\eta := \min_{j: H_j \neq \emptyset} |H_j \partial B_{d_i}(A_i)| = \min_{j: F^j \neq \emptyset} |H_j \partial B_{d_i}(A_i)| \geq \gamma - \varepsilon > 0. \quad (7)$$

Отметим, что согласно замечанию 1 при $F^j = \emptyset$ верно $U_r(F^j) \subset B_r(F^j) = \emptyset$. Тогда для

$$A'_j := A_j \setminus U_r(F^j) \quad (8)$$

имеем $A'_j \subset A_j$ и при $F^j = \emptyset$ получаем $A'_j = A_j$.

Замечаем, что $A'_j \subset U_{d_j}(K_d)$ для любого j . Следовательно, в силу компактности A'_j , для всех непустых A'_j положительна величина $\mu_j = |A'_j \partial B_{d_j}(K_d)|$. Поэтому, так как все d_i положительны, получаем

$$\mu = \min\{\min_{A'_j \neq \emptyset} \mu_j, \min_i d_i\} > 0.$$

Таким образом, для любого j в силу леммы 10 имеем

$$A'_j \subset B_{d_j-\mu}(K_d). \quad (9)$$

По условию все A_j выпуклы. Также по условию $\text{HP}(F^i) = \emptyset$. Значит, для любой точки $a \in A_i$ верно $U_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Следовательно, верно $|A_i K_d| < d_i$. Поэтому согласно теореме 1 множество $B_{d_i}(A_i) \cap K_d$ меняется непрерывно при небольших уменьшениях d_i . Значит, для $0 < \varepsilon < \min\{\eta, \mu\}$ существует $0 < \delta \leq d_i - |A_i K_d|$ такое, что

$$K_d = B_{d_i}(A_i) \cap K_d \subset B_\varepsilon(B_{d_i-\delta}(A_i) \cap K_d).$$

Без ограничения общности будем считать $\delta \leq \varepsilon$. Для удобства введём обозначение

$$K = B_{d_i-\delta}(A_i) \cap K_d. \quad (10)$$

Таким образом,

$$K_d \subset B_\varepsilon(K). \quad (11)$$

Для любого j в силу (6) верно $H_j \subset K_d \subset B_{d_i}(A_i)$ и в силу (7) для всех непустых H_j имеем $0 < \eta \leq |H_j \partial B_{d_i}(A_i)|$. Но $\delta \leq \varepsilon < \eta$, поэтому по лемме 10 имеем $H_j \subset B_{d_i-\delta}(A_i)$ для всех j . При этом, как отмечалось выше, $H_j \subset K_d$. Значит, ввиду (10) для всех j верно

$$H_j \subset K. \quad (12)$$

ЛЕММА 17. Для всех j верно $A_j \cap U_r(F^j) \subset B_{d_j}(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если $F^j = \emptyset$, то $A_j \cap U_r(F^j) = \emptyset \subset B_{d_j}(K)$. Пусть теперь $F^j \neq \emptyset$.

Для произвольной $p \in A_j$ имеем $B_{d_j}(p) \cap K_d \neq \emptyset$. Значит, для любой точки $p \in A_j \cap U_r(F^j)$ тоже верно

$$B_{d_j}(p) \cap K_d \neq \emptyset. \quad (13)$$

Однако согласно лемме 8 имеем

$$B_{d_j}(A_j \cap U_r(F^j)) \subset B_{d_j}(U_r(F^j)) \subset B_{d_j}(B_r(F^j)) = B_{d_j+r}(F^j). \quad (14)$$

Отсюда в силу (14), (6), и (12) справедливо

$$B_{d_j}(A_j \cap U_r(F^j)) \cap K_d \subset B_{d_j+r}(F^j) \cap K_d = H_j \subset K. \quad (15)$$

Согласно замечанию 2 верно $\bigcup_{p \in A_j \cap U_r(F^j)} B_{d_j}(p) \subset B_{d_j}(A_j \cap U_r(F^j))$. Поэтому в силу (15) справедливо

$$\left(\bigcup_{p \in A_j \cap U_r(F^j)} B_{d_j}(p) \right) \cap K_d \subset K. \quad (16)$$

Отсюда для любой точки $p \in A_j \cap U_r(F^j)$ в силу (13) и (16) имеем $\emptyset \neq B_{d_j}(p) \cap K_d \subset K$. Значит, $p \in B_{d_j}(K)$. Следовательно,

$$A_j \cap U_r(F^j) \subset B_{d_j}(K).$$

Лемма доказана.

□

ЛЕММА 18. Для всех j верно $A_j \subset B_{d_j}(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Для любого j в силу (9) имеем

$$A'_j \subset B_{d_j-\mu}(K_d) \quad (17)$$

Согласно (11) верно

$$B_{d_j-\mu}(K_d) \subset B_{d_j-\mu+\varepsilon}(K). \quad (18)$$

Но ввиду сделанного выше выбора $0 < \varepsilon < \mu$ справедливо

$$B_{d_j-\mu+\varepsilon}(K) \subset B_{d_j}(K). \quad (19)$$

Отсюда согласно (17), (18) и (19) получаем

$$A'_j \subset B_{d_j}(K). \quad (20)$$

При этом по лемме 17 справедливо

$$A_j \cap U_r(F^j) \subset B_{d_j}(K) \quad (21)$$

Но ввиду (8) для любого j верно

$$A_j = A'_j \cup (A_j \cap U_r(F^j)). \quad (22)$$

Значит, в силу (20), (21) и (22) получаем

$$A_j \subset B_{d_j}(K).$$

Лемма доказана.

□

Заметим, что $K \subset K_d \subset B_{d_j}(A_j)$ для всех j . Значит, по лемме 18 для всех j имеем

$$d_H(K, A_j) \leq d_j. \quad (23)$$

ЛЕММА 19. $d_H(K, A_i) \leq \max(d_i - \delta, d_i - \mu + \varepsilon) < d_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Напомним, что по предположению $\text{HP}(F^i) = \emptyset$, что по лемме 15 эквивалентно $F^i = \emptyset$. Отсюда согласно (8) и замечанию 1 верно

$$A'_i = A_i \setminus U_r(F^i) = A_i. \quad (24)$$

Далее, в силу (10)

$$K = B_{d_i-\delta}(A_i) \cap K_d \subset B_{d_i-\delta}(A_i).$$

При этом ввиду (24), (17) и (18) верно

$$A_i = A'_i \subset B_{d_i-\mu+\varepsilon}(K).$$

Поэтому $d_H(K, A_i) \leq \max(d_i - \delta, d_i - \mu + \varepsilon) < d_i$, так как $0 < \varepsilon < \mu$. Лемма доказана.

□

Следовательно, согласно (23) и лемме 19 верно $S(A, K) < S(A, K_d)$. Получили противоречие. Теорема доказана.

□

3.4. Устойчивость границы в проблеме Ферма — Штейнера

Пусть дана финитная граница $A = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$. Обозначим границу $\{\text{Conv}(A_1), \dots, \text{Conv}(A_n)\}$ через A^{Conv} . Введём определение устойчивой границы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Финитную границу $A = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ назовём устойчивой, если $S_A = S_{A^{\text{Conv}}}$, иначе — неустойчивой.*

ЗАМЕЧАНИЕ 6. *В силу следствия 2 для любой финитной границы A верно неравенство $S_A \geq S_{A^{\text{Conv}}}$.*

Напомним, что множество $\bigcap_{i=1}^n B_{d_i}(\text{Conv}(A_i))$ в разделе 3.1 было обозначено через K_d^{Conv} . Справедливость следующего утверждения была показана в работе [14], однако здесь приводится его альтернативное доказательство на основе следствия 2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13 (Необходимое условие устойчивости). *Если граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ устойчива, то $\Omega(A) \subset \Omega(A^{\text{Conv}})$ и для любого $\Sigma_d(A^{\text{Conv}})$ множество K_d^{Conv} является максимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A^{\text{Conv}})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ устойчива. Возьмём $d \in \Omega(A)$. В силу $S_A = S_{A^{\text{Conv}}}$ и следствия 2 мы получаем, что $d_H(\text{Conv}(A_i), K_d^{\text{Conv}}) = d_i$ для всех i . Отсюда существует класс решений $\Sigma_d(A^{\text{Conv}})$ и, таким образом, $d \in \Omega(A^{\text{Conv}})$. Значит, так как $K_d^{\text{Conv}} = \bigcap_{i=1}^n B_{d_i}(\text{Conv}(A_i))$, мы получаем, что K_d^{Conv} — максимальный компакт Штейнера в $\Sigma_d(A^{\text{Conv}})$. Также мы показали, что $\Omega(A) \subset \Omega(A^{\text{Conv}})$.

□

Пусть нам дана финитная граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ (неважно, устойчивая или нет), произвольный вектор решения $d \in \Omega(A)$ и соответствующий компакт $K_d^{\text{Conv}} = \bigcap_{i=1}^n B_{d_i}(\text{Conv}(A_i))$. Чтобы сформулировать следующие утверждения, напомним некоторые обозначения, введённые в разделе 3.2, а именно, выпишем их для частного случая вектора $d \in \Omega(A)$ и границы $A^{\text{Conv}} = \{\text{Conv}(A_1), \dots, \text{Conv}(A_n)\}$:

- $F_d^{\text{Conv}(A_i)} := \{a \in \text{Conv}(A_i) \mid U_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} = \emptyset\};$
- $\text{HP}(F_d^{\text{Conv}(A_i)}) := B_{d_i}(F_d^{\text{Conv}(A_i)}) \cap K_d^{\text{Conv}};$
- $\text{HP}(F_d^{\text{Conv}}) := \bigcup_i \text{HP}(F_d^{\text{Conv}(A_i)});$
- $L_d^{\text{Conv}(A_i)} := \{a \in \text{Conv}(A_i) \mid \text{Int}(B_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}}) = \emptyset\}.$

Из утверждения 13 и теоремы 3 вытекает следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 6 (Первое достаточное условие неустойчивости). *Пусть граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ финитна и $d \in \Omega(A)$. Если для всех i верно $F_d^{\text{Conv}(A_i)} = \emptyset$ или для всех i верно $L_d^{\text{Conv}(A_i)} = \emptyset$, то граница A неустойчива.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Допустим противное, что граница A устойчива. Но тогда согласно утверждению 13 верно, что $d \in \Omega(A^{\text{Conv}})$ и компакт K_d^{Conv} является максимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A^{\text{Conv}})$.

Пусть для всех i выполняется $F_d^{\text{Conv}(A_i)} = \emptyset$. В таком случае вектор решения $d \in \Omega(A^{\text{Conv}})$ является вектором, для которого ни в одном граничном компакте нет далёких точек. Так как граница A^{Conv} выпукла, то мы приходим к противоречию с теоремой 3.

Пусть теперь для всех i верно $L_d^{\text{Conv}(A_i)} = \emptyset$. Тогда согласно определению множества $L_d^{\text{Conv}(A_i)}$ для всех $a \in \text{Conv}(A_i)$ справедливо, что

$$\emptyset \neq \text{Int}(B_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}}) = \text{Int } B_{d_i}(a) \cap \text{Int } K_d^{\text{Conv}}.$$

Отсюда $\text{Int } K_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$. Значит, согласно следствию 3 в силу выпуклости границы A^{Conv} получаем

$$L_d^{\text{Conv}(A_i)} = F_d^{\text{Conv}(A_i)}.$$

Таким образом, снова имеем ситуацию, когда для всех i выполнено $F_d^{\text{Conv}(A_i)} = \emptyset$, что в случае выпуклой границы противоречит теореме 3, как отмечено выше. Следовательно, граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ неустойчива.

□

Далее, также из утверждения 13 и теоремы 6 вытекает следствие ниже.

СЛЕДСТВИЕ 7 (Второе достаточное условие неустойчивости). *Пусть граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ финитна. Пусть также все d_i положительны для некоторого $d \in \Omega(A)$. Если существует номер s такой, что $\text{HP}(F_d^{\text{Conv}(A_s)}) = \emptyset$ и для любой $p \in \text{HP}(F_d^{\text{Conv}})$ верно $p \notin \partial B_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$, тогда граница A неустойчива.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Допустим противное, что граница A устойчива. Но тогда согласно утверждению 13 компакт K_d^{Conv} является максимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A^{\text{Conv}})$. Таким образом, мы пришли к тому, что существует номер s такой, что для всех точек $p \in \text{HP}(F_d^{\text{Conv}})$ верно, что $p \notin \text{HP}(F_d^{\text{Conv}(A_s)})$ (так как $\text{HP}(F_d^{\text{Conv}(A_s)}) = \emptyset$) и согласно условию $p \notin \partial B_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$. Также отметим, что граница A^{Conv} является выпуклой и по условию все d_i положительны. Следовательно, получаем противоречие с теоремой 6. Значит, граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ неустойчива.

□

Следующая теорема даёт альтернативный способ понять, когда свойство максимального компакта Штейнера из теоремы 6 не выполняется для K_d^{Conv} и вектора решения $d \in \Omega(A)$, а именно, эта теорема говорит, при каких условиях для номера s и всех точек $p \in \text{HP}(F_d^{A^{\text{Conv}}})$ будет верно $p \notin \text{HP}(F_d^{\text{Conv}(A_s)})$ и $p \notin \partial B_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$. Преимущество этого способа заключается в том, что в нём не нужно находить все множества $\text{HP}(F_d^{\text{Conv}(A_i)})$.

Итак, положим

$$U_d^{\text{Conv}} = \text{Int } K_d^{\text{Conv}}.$$

Заметим, что так как внутренность пересечения равна пересечению внутренностей, то верно $U_d^{\text{Conv}} = \bigcap_{i=1}^n \text{Int } B_{d_i}(\text{Conv}(A_i))$. Отметим, что для любого $K \in \mathcal{H}(X)$ при $r > 0$ справедливо $\text{Int } B_r(K) = U_r(K)$, а при $r = 0$ и $\text{Int } K \neq \emptyset$ выполнено $\text{Int } B_0(K) = \text{Int } K \neq U_0(K) = \emptyset$.

Напомним, что согласно теореме 4 в случае финитной границы A и пространства X со строго выпуклой нормой для любого класса $\Sigma_d(A)$ по крайней мере в одном граничном компакте A_i найдётся дискретная точка, то есть $\text{HP}(D_d^A) \neq \emptyset$.

Всюду далее в случае финитной границы A количество точек в компакте $A_i \in A$ будет обозначаться через m_i .

Сформулируем отдельно условия, которыми будем пользоваться в рамках данной работы.

УСЛОВИЯ 1.

- (1) Норма пространства X строго выпукла;
- (2) Граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ финитна;
- (3) $U_d^{\text{Conv}} = \text{Int } K_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$, где $d \in \Omega(A)$;
- (4) $d_s > 0$;
- (5) $\left(\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s) \right) \cap \text{HP}(D_d^A) \subset U_d^{\text{Conv}}$.

В силу утверждения 12 имеем $\text{HP}(D_d^A) = \text{HP}(L_d^A)$, поэтому пункт (5) из условий 1 можно заменить на

$$\left(\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s) \right) \cap \text{HP}(L_d^A) \subset U_d^{\text{Conv}}. \quad (25)$$

Более того, если также выполнено $\text{Cl}(\text{Int } K_d) = K_d$, то по теореме 5 получаем $\text{HP}(D_d^A) = \text{HP}(L_d^A) = \text{HP}(F_d^A)$ и, значит, пункт (5) из условий 1 или выражение (25) можно заменить на

$$\left(\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s) \right) \cap \text{HP}(F_d^A) \subset U_d^{\text{Conv}}. \quad (26)$$

ТЕОРЕМА 7 (Условия нарушения взаимосвязи K_d^{Conv} с границей A^{Conv}). Пусть выполнены все пункты (1)–(5) из условий 1. Тогда для любой точки $p \in \text{HP}(F_d^{A^{\text{Conv}}})$ верно $p \notin \text{HP}(F_d^{\text{Conv}(A_s)})$ и $p \notin \partial B_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Будем считать, что пункты (1)–(5) из условий 1 выполнены. Опишем план доказательства. В начале будет показано, что $\text{HP}(F_d^{\text{Conv}(A_s)}) = \emptyset$ — лемма 20. Затем мы покажем, что при $i \neq s$ для любой точки $a \in A_i \cap F_d^{\text{Conv}(A_i)}$ верно $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \cap \partial B_{d_s}(\text{Conv}(A_s)) = \emptyset$ — лемма 21. И наконец, докажем, что $\text{HP}(F_d^{\text{Conv}(A_i)}) \cap \partial B_{d_s}(\text{Conv}(A_s)) = \emptyset$ при $i \neq s$ — лемма 23.

ЛЕММА 20. $F_d^{\text{Conv}(A_s)} = \emptyset$ и, значит, $\text{HP}(F_d^{\text{Conv}(A_s)}) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $a \in A_s$. Рассмотрим два случая: $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно и бесконечно. Отметим, что множество $B_{d_s}(a) \cap K_d$ не может быть пустым, так как $A_s \subset B_{d_s}(K_d)$.

Если $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно, то $a \in D_d^{A_s}$ и $B_{d_s}(a) \cap K_d = \text{HP}(a, D_d^{A_s})$. Значит, $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \subset \text{HP}(a, D_d^{A_s})$. Но $\text{HP}(a, D_d^{A_s}) \subset K_d$. Отсюда $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d = \partial B_{d_s}(a) \cap \text{HP}(a, D_d^{A_s})$. Тогда согласно пункту (5) из условий 1 справедливо $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \subset U_d^{\text{Conv}}$.

Если $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d = \emptyset$, то $U_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$, так как $B_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Но тогда ввиду $K_d \subset K_d^{\text{Conv}}$ справедливо $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$ и, значит, $a \notin F_d^{\text{Conv}(A_s)}$.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Напомним, что мы имеем $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \subset U_d^{\text{Conv}}$. Поэтому в данном случае верно $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \cap U_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$. Отсюда справедливо $\partial B_{d_s}(a) \cap U_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$. Следовательно, так как U_d^{Conv} открыто, по лемме 12 получаем $U_{d_s}(a) \cap U_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$, и, значит, $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$. Отсюда $a \notin F_d^{\text{Conv}(A_s)}$.

Рассмотрим теперь второй случай: $B_{d_s}(a) \cap K_d$ бесконечно. Но тогда $B_{d_s}(a) \cap K_d^{\text{Conv}}$ тоже бесконечно, так как $K_d \subset K_d^{\text{Conv}}$. Отсюда в силу строгой выпуклости нормы пространства X и выпуклости компакта K_d^{Conv} множество $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\text{Conv}}$ также бесконечно. Значит, тоже получаем $a \notin F_d^{\text{Conv}(A_s)}$.

Следовательно, для любой $a \in A_s$ верно $a \notin F_d^{\text{Conv}(A_s)}$, то есть $A_s \subset U_{d_s}(K_d^{\text{Conv}})$. Но выпуклая оболочка подмножества лежит в выпуклой оболочке объемлющего множества. Также замечаем, что в силу выпуклости K_d^{Conv} и леммы 4 множество $U_{d_s}(K_d^{\text{Conv}})$ выпукло. Следовательно, справедливо

$$\text{Conv}(A_s) \subset \text{Conv}(U_{d_s}(K_d^{\text{Conv}})) = U_{d_s}(K_d^{\text{Conv}}).$$

Отсюда для любой точки $a \in \text{Conv}(A_s)$ верно $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$. Поэтому $F_d^{\text{Conv}(A_s)} = \emptyset$ и, значит, в силу замечания 1 имеем

$$\text{HP}(F_d^{\text{Conv}(A_s)}) = B_{d_s}(F_d^{\text{Conv}(A_s)}) \cap K_d^{\text{Conv}} = \emptyset \cap K_d^{\text{Conv}} = \emptyset.$$

Лемма доказана.

□

ЛЕММА 21. $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$ для любой $a \in A_i \cap F_d^{\text{Conv}(A_i)}$ при $i \neq s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Так как $a \in F_d^{\text{Conv}(A_i)}$, то $U_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} = \emptyset$. Поэтому в силу строгой выпуклости нормы пространства X и выпуклости компакта K_d^{Conv} множество $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}}$ одноточечно. Но тогда пересечение $B_{d_i}(a) \cap K_d$ тоже одноточечно как непустое подмножество $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}}$, то есть

$$B_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} = B_{d_i}(a) \cap K_d = \text{HP}(a, D_d^{A_i}). \quad (27)$$

Ввиду пунктов (4) и (5) из условий 1, а также в силу $U_d^{\text{Conv}} = \bigcap_{j=1}^n \text{Int } B_{d_j}(\text{Conv}(A_j))$ справедливо

$$\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s) \cap \text{HP}(a, D_d^{A_i}) \subset U_d^{\text{Conv}} \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)), \quad (28)$$

При этом так как $\text{HP}(a, D_d^{A_i}) \subset K_d \subset B_{d_s}(A_s)$ и $B_{d_s}(A_s) = \bigcup_{j=1}^{m_s} B_{d_s}(a_j^s)$ по лемме 2 ввиду компактности A_s , то согласно лемме 3

$$\begin{aligned} \text{HP}(a, D_d^{A_i}) \setminus \bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s) &= \text{HP}(a, D_d^{A_i}) \cap \bigcup_{j=1}^{m_s} U_{d_s}(a_j^s) = \\ &= \text{HP}(a, D_d^{A_i}) \cap U_{d_s}(A_s) \subset U_{d_s}(A_s) \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)). \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда в силу (28) и (29) получаем $\text{HP}(a, D_d^{A_i}) \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$. Значит, ввиду (27)

$$B_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)).$$

Лемма доказана.

□

ЛЕММА 22. Пусть $i \neq s$, $a \in F_d^{\text{Conv}(A_i)}$ и для каждой $a_j^i \in A_i$ выполняется

$$B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\text{Conv}} \cap U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)) \neq \emptyset.$$

Тогда верно

$$B_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Имеем $a \in F_d^{\text{Conv}(A_i)} \subset \text{Conv}(A_i)$. Значит, по свойству выпуклых оболочек найдутся такие $\lambda_j \geq 0$ с условием $\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j = 1$, что $a = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j a_j^i$. В таком случае для каждой $a_j^i \in A_i$ возьмём точку $p_j \in B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\text{Conv}} \cap U_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$. В силу выпуклости $K_d^{\text{Conv}} \cap U_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$ верно

$$p := \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j p_j \in K_d^{\text{Conv}} \cap U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)).$$

Но тогда так как $p_j \in B_{d_i}(a_j^i)$, то

$$\|a - p\| = \left\| \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j (a_j^i - p_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j \|a_j^i - p_j\| \leq d_i.$$

Значит, справедливо $p \in B_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \cap U_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$. Но в силу строгой выпуклости нормы пространства X , выпуклости компакта K_d^{Conv} , а также согласно условию $U_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} = \emptyset$ множество $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}}$ одноточечно. Значит, $\{p\} = B_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$. Лемма доказана.

□

ЛЕММА 23. $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$ для любой $a \in F_d^{\text{Conv}(A_i)}$ при $i \neq s$, то есть $\text{HP}(F_d^{\text{Conv}(A_i)}) \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $a \in \text{Conv}(A_i) \setminus A_i$, где $i \neq s$, и

$$a \in F_d^{\text{Conv}(A_i)}, \quad (30)$$

то есть $U_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} = \emptyset$.

Нам нужно показать, что $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$. Докажем, что для каждой $a_j^i \in A_i$ множество $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\text{Conv}} \cap U_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$ непусто.

Существует два случая. Первый, когда $U_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\text{Conv}} = \emptyset$, то есть $a_j^i \in F_d^{\text{Conv}(A_i)}$. Но тогда по лемме 21 справедливо $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\text{Conv}} \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$. Поэтому $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\text{Conv}} \cap U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)) \neq \emptyset$, так как $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$ ввиду $a_j^i \in A_i \subset B_{d_i}(K_d^{\text{Conv}})$ согласно определению расстояния Хаусдорфа.

Второй случай, когда $U_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$, то есть $a_j^i \notin F_d^{\text{Conv}(A_i)}$. По условию $U_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$, поэтому K_d^{Conv} выпуклое множество с непустой внутренностью. Значит, по лемме 12 если $U_{d_i}(a_j^i) \cap \partial K_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$, то $U_{d_i}(a_j^i) \cap U_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$. Если же $U_{d_i}(a_j^i) \cap \partial K_d^{\text{Conv}} = \emptyset$, то всё равно $U_{d_i}(a_j^i) \cap U_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$, так как $U_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$ согласно предположению. Отсюда $U_{d_i}(a_j^i) \cap U_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$. Но так как $K_d^{\text{Conv}} \subset B_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$, то $U_d^{\text{Conv}} \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$. Следовательно, $U_{d_i}(a_j^i) \cap U_d^{\text{Conv}} \cap U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)) \neq \emptyset$, и отсюда $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\text{Conv}} \cap U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)) \neq \emptyset$.

Таким образом, для каждой $a_j^i \in A_i$

$$B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\text{Conv}} \cap U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)) \neq \emptyset.$$

Значит, согласно условию (30) и в силу леммы 22 справедливо

$$B_{d_i}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$$

при $i \neq s$. Отсюда ввиду произвольности точки $a \in \text{Conv}(A_i) \setminus A_i$ и леммы 21 получаем

$$\text{HP}(F_d^{\text{Conv}(A_i)}) \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)).$$

Лемма доказана.

□

Таким образом, для любой точки $p \in \text{HP}(F_d^{\text{Conv}(A_i)})$ верно $p \notin \text{HP}(F_d^{\text{Conv}(A_s)})$ согласно лемме 20 и $p \notin \partial B_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$ согласно лемме 23. Доказательство теоремы закончено.

□

3.5. О достаточном условии неустойчивости, дающем оценку на уменьшение веса сети

Теорема 7 из предыдущего раздела говорит о том, что в случае выполнения пунктов (1)–(5) из условий 1 для K_d^{Conv} нарушается свойство максимального компакта Штейнера из теоремы 6. В свою очередь если все $d_i > 0$, то следствие 7 говорит, что при нарушении свойства из теоремы 6 для K_d^{Conv} граница A оказывается неустойчивой.

Целью данного раздела является поиск значения $\delta' > 0$ такого, что при выполнении всех пунктов (1)–(5) условий 1 для любого $0 < \delta \leq \delta'$ справедливо

$$S(A^{\text{Conv}}, K_d^{\text{Conv}}) - S(A^{\text{Conv}}, B_{d_s-\delta}(\text{Conv}(A_s)) \cap K_d^{\text{Conv}}) \geq \delta. \quad (31)$$

Отметим, что из неравенства (31) по определению вытекает неустойчивость границы A . Таким образом, в данном разделе мы заодно докажем, что пунктов (1)–(5) из условий 1 уже достаточно, чтобы граница A была неустойчивой, то есть не нужно требовать положительности всех компонент d_i вектора решения $d \in \Omega(A)$, а именно, следствием 7 в этом случае пользоваться уже необязательно.

Далее нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 24. Пусть выполнены все пункты (1)–(5) условий 1. Тогда

$$\emptyset \neq \text{HP}(D_d^A) \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Согласно теореме 4 из пунктов (1) и (2) условий 1 вытекает $\emptyset \neq \text{HP}(D_d^A)$.

Далее, в силу определений $\text{HP}(D_d^A)$ и K_d имеем $\text{HP}(D_d^A) \subset K_d = \bigcap_{i=1}^n B_{d_i}(A_i)$, значит,

$$\text{HP}(D_d^A) \subset B_{d_s}(A_s). \quad (32)$$

Ввиду компактности A_s по лемме 6 справедливо $\partial B_{d_s}(A_s) \subset \bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)$. Поэтому, а также согласно пункту (5) из условий 1 и определению U_d^{Conv} верно

$$\partial B_{d_s}(A_s) \cap \text{HP}(D_d^A) \subset \left(\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s) \right) \cap \text{HP}(D_d^A) \subset U_d^{\text{Conv}} \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)). \quad (33)$$

При этом

$$U_{d_s}(A_s) \cap \text{HP}(D_d^A) \subset U_{d_s}(A_s) \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)). \quad (34)$$

Таким образом, из (32), (33) и (34) получаем $\text{HP}(D_d^A) \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$.

□

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Ввиду утверждения 12 в рамках выполнения пунктов (1) и (2) условий 1 верно $\text{HP}(D_d^A) = \text{HP}(L_d^A)$, поэтому согласно лемме 24 из условий 1 также следует

$$\text{HP}(L_d^A) \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)).$$

И если при этом справедливо $\text{Cl}(\text{Int } K_d) = K_d$, то в силу теоремы 5 и леммы 24 в условиях 1 имеем

$$\text{HP}(D_d^A) = \text{HP}(L_d^A) = \text{HP}(F_d^A) \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)).$$

Обозначим мультимножество $\bigsqcup_{i=1}^n A_i$ через $\tilde{A}$. Нам понадобятся следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Отношением между множествами M и N называется произвольное подмножество декартова произведения $M \times N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть $K \in \mathcal{H}(X)$, где X — произвольное конечномерное нормированное пространство, и $d = (d_1, \dots, d_n) \in \Omega(A)$. Зададим отношение $R(K) \subset K \times \tilde{A}$ следующим образом: $(p, a_j^i) \in R(K)$, если и только если $|pa_j^i| \leq d_i$, где $A_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} \{a_j^i\}$. Отношение $R(K)$ назовем d -каноническим или просто каноническим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Пусть дано отношение $R \subset M \times N$. Двудольный граф G_R с мультимножеством вершин $M \sqcup N$, две вершины $m \in M$ и $n \in N$ которого соединены ребром, если и только если $(m, n) \in R$, называется графом отношения R .

Нам будет нужен алгоритм из работы [13] построения минимального компакта Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$ в случае финитной границы A .

АЛГОРИТМ 1. [13]

- Шаг 1. Пусть $K' \in \Sigma_d(A)$ — произвольный компакт Штейнера, например, $K' = K_d = \bigcap_{i=1}^n B_{d_i}(A_i)$, и $R' = R(K')$ — каноническое отношение.

- Шаг 2. Для каждой $a_j^i \in \tilde{A}$ выберем $p \in K'$ такую, что $(p, a_j^i) \in R'$ (для разных a_j^i выбранные точки могут совпадать); множество выбранных точек обозначим через K . Подчеркнём, что K не является мультимножеством, то есть в отличие от $\tilde{A}$ каждая точка в K встречается единожды. Таким образом, мы получим каноническое отношение $R = R(K)$ как ограничение R' на $K \times \tilde{A}$. Возьмём граф G_R этого отношения.
- Шаг 3. Если в K содержатся точки, являющиеся вершинами графа G_R , смежными лишь с вершинами степени больше 1, то выбираем любую из этих точек и удаляем её из множества K , перестраиваем отношение $R(K)$ и граф G_R . Повторяем Шаг 3 до тех пор, пока это возможно.

Утверждения 14 и 15 формулируются для случая произвольного конечномерного нормированного пространства X .

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. Алгоритм 1 корректен, результат его работы — минимальный компакт Штейнера.

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. С помощью алгоритма 1 может быть построен любой минимальный компакт $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$.

Как отмечено в замечании 3, доказательства утверждений 14 и 15 дословно повторяют соответствующие доказательства из [13] для случая $X = \mathbb{R}^m$ и финитной границы A с попарно непересекающимися компактными. Отметим, что в доказательстве утверждения 14 из работы [13] доказательство теоремы, на которую оно ссылается, также остаётся дословно таким же в случае произвольного конечномерного нормированного пространства X и, быть может, пересекающихся конечных граничных компактов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Минимальный компакт $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ назовём погружённым, если $K_\lambda \setminus \text{HP}(D_d^A) \subset \text{Int } K_d$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. Пусть норма пространства X строго выпукла, граница A финитна и $\text{Int } K_d = \emptyset$ в некотором классе $\Sigma_d(A)$. Тогда

$$K_d = \text{HP}(D_d^A) = \text{HP}(L_d^A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

По определению максимального компакта Штейнера имеем

$$K_d = \bigcap_{i=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^{m_i} B_{d_i}(a_j^i) \right) = \bigcup_{j_1 \in \{1, \dots, m_1\}, \dots, j_n \in \{1, \dots, m_n\}} B_{d_1}(a_{j_1}^1) \cap \dots \cap B_{d_n}(a_{j_n}^n). \quad (35)$$

Если множество $B_{d_1}(a_{j_1}^1) \cap \dots \cap B_{d_n}(a_{j_n}^n)$ состоит более чем из одной точки, то согласно лемме 7 в силу строгой выпуклости нормы пространства X это множество имеет непустую внутренность. Но тогда и K_d имеет непустую внутренность, что противоречит условию. Значит, в (35) каждое множество $B_{d_1}(a_{j_1}^1) \cap \dots \cap B_{d_n}(a_{j_n}^n)$ либо пусто, либо одноточечно. Ввиду финитности границы A таких множеств конечное число. Значит, $\#K_d < \infty$. Но тогда $\#B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d < \infty$ для любого $a_j^i \in A_i$, то есть $D_d^{A_i} = A_i$ для всех i . Следовательно, $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d = \text{HP}(a_j^i, D_d^{A_i})$ для любого $a_j^i \in A_i$. Отсюда, а также ввиду $K_d = \bigcap_{i=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^{m_i} B_{d_i}(a_j^i) \right)$ имеем

$$K_d = \bigcap_{i=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^{m_i} B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d \right) = \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{m_i} \text{HP}(a_j^i, D_d^{A_i}) = \text{HP}(D_d^A).$$

Так как по условию норма пространства X строго выпукла, а граница A финитна, то согласно утверждению 12 также имеем $\text{HP}(D_d^A) = \text{HP}(L_d^A)$. Таким образом, получаем

$$K_d = \text{HP}(D_d^A) = \text{HP}(L_d^A).$$

□

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть норма пространства X строго выпукла, граница A финитна и $\text{Int } K_d = \emptyset$ в некотором классе $\Sigma_d(A)$. Тогда любой минимальный компакт $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ является погружённым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Согласно утверждению 16 в наших условиях имеем $K_d = \text{HP}(D_d^A)$. Но $K_\lambda \subset K_d$. Значит, $K_\lambda \setminus \text{HP}(D_d^A) = \emptyset$. Таким образом, K_λ — погружённый минимальный компакт Штейнера.

□

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. Пусть норма пространства X строго выпукла и граница A финитна. Тогда любой класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе погружённый минимальный компакт K_λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Доказательство будет конструктивным, а именно, мы в явном виде построим такой компакт на основе алгоритма 1.

Итак, на шаге 1 в качестве компакта K' возьмём максимальный компакт Штейнера K_d . Далее на шаге 2 этого алгоритма для каждой a_j^i точку p будем выбирать следующим образом. Если a_j^i не является дискретной (или не является неплотной, или при $\text{Cl}(\text{Int } K_d) = K_d$ не является далёкой, см. теорему 5 о равенстве множеств D_d^A , L_d^A и F_d^A), то согласно лемме 7 в пространстве со строго выпуклой нормой множество

$$B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d = \bigcup_{j_1 \in \{1, \dots, m_1\}, \dots, j_n \in \{1, \dots, m_n\}} B_{d_i}(a_j^i) \cap B_{d_1}(a_{j_1}^1) \cap \dots \cap B_{d_n}(a_{j_n}^n)$$

имеет непустую внутренность:

$$\text{Int}(B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d) \neq \emptyset,$$

и в таком случае на шаге 2 построения мы возьмём точку p именно из

$$\text{Int}(B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d) = U_{d_i}(a_j^i) \cap \text{Int } K_d \subset \text{Int } K_d.$$

А если a_j^i дискретна, то по определению $\text{HP}(a_j^i, D_d^{A_i}) = B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$, и значит, $(p, a_j^i) \in R'(K_d)$ тогда и только тогда, когда $p \in \text{HP}(a_j^i, D_d^{A_i})$.

Наконец, шаг 3 проведём в точности так, как описано в алгоритме 1. В итоге получим, что по построению $K_\lambda \setminus \text{HP}(D_d^A) \subset \text{Int } K_d$. Значит, K_λ — погружённый минимальный компакт Штейнера.

□

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть норма пространства X строго выпукла и граница A финитна. Если минимальный компакт Штейнера $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ — единственный минимальный компакт в своём классе решений, то K_λ является погружённым.

Отметим, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8 ([13]). Пусть норма пространства X строго выпукла и граница $A \subset \mathcal{H}(X)$ финитна. Минимальный компакт Штейнера K_λ — единственный минимальный компакт в $\Sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $p \in K_\lambda$ существует точка a_j^i такая, что $\text{HP}(a_j^i, D_d^{A_i}) = \{p\}$.

Как было сказано в замечании 3, доказательство теоремы 8 дословно повторяет соответствующее доказательство из [13] для случая $X = \mathbb{R}^m$ и финитной границы A с попарно непесекающимися компактными. Отметим, что в этом доказательстве из работы [13] доказательства всех утверждений, на которые оно ссылается, также остаются дословно теми же в случае произвольного пространства X со строго выпуклой нормой и, быть может, пересекающимися конечными граничными компактными.

ЛЕММА 25. Пусть все пункты (1)–(5) условий 1 выполнены и минимальный компакт Штейнера $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ является погружённым. Тогда

$$\delta_1 := \left| K_\lambda \partial B_{d_s}(\text{Conv}(A_s)) \right| > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В силу леммы 24 верно

$$K_\lambda \cap \text{HP}(D_d^A) \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)). \quad (36)$$

Но по определению погружённого минимального компакта верно

$$K_\lambda \setminus \text{HP}(D_d^A) \subset \text{Int } K_d \subset U_d^{\text{Conv}} \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)). \quad (37)$$

Значит, согласно (36) и (37)

$$K_\lambda \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s)).$$

Наконец, в силу компактности K_λ и $\partial B_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$ получаем $\left| K_\lambda \partial B_{d_s}(\text{Conv}(A_s)) \right| > 0$. $\square$

ЛЕММА 26. Пусть все пункты (1)–(5) условий 1 выполнены, тогда

$$\delta_2 := \left| \text{Conv}(A_s) \partial B_{d_s}(K_d^{\text{Conv}}) \right| > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Аналогично доказательству леммы 20 покажем, что

$$\text{Conv}(A_s) \subset U_{d_s}(K_d^{\text{Conv}}).$$

Для этого сначала докажем $A_s \subset U_{d_s}(K_d^{\text{Conv}})$.

Пусть $a \in A_s$. Рассмотрим два случая: $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно и бесконечно. Напомним, что множество $B_{d_s}(a) \cap K_d$ не может быть пустым, так как $A_s \subset B_{d_s}(K_d)$.

Если $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно, то $a \in D_d^{A_s}$ и $B_{d_s}(a) \cap K_d = \text{HP}(a, D_d^{A_s})$. Значит, $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \subset \text{HP}(a, D_d^{A_s})$. Но $\text{HP}(a, D_d^{A_s}) \subset K_d$. Отсюда $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d = \partial B_{d_s}(a) \cap \text{HP}(a, D_d^{A_s})$. Тогда согласно пунктам (3) и (5) условий 1 справедливо

$$\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \subset U_d^{\text{Conv}}. \quad (38)$$

Далее возможны два варианта.

Первый, $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d = \emptyset$. Тогда $U_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$, так как $B_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Но тогда ввиду $K_d \subset K_d^{\text{Conv}}$ справедливо $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$.

Второй вариант, $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Ввиду (38) справедливо $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \cap U_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$. Отсюда имеем $\partial B_{d_s}(a) \cap U_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$. Следовательно, так как U_d^{Conv} открыто, по лемме 12 получаем $U_{d_s}(a) \cap U_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$. Таким образом, когда $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$.

Рассмотрим теперь второй случай: $B_{d_s}(a) \cap K_d$ бесконечно. Но тогда $B_{d_s}(a) \cap K_d^{\text{Conv}}$ тоже бесконечно, так как $K_d \subset K_d^{\text{Conv}}$. Отсюда согласно пункту (1) условий 1 и выпуклости компакта K_d^{Conv} верно $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$.

Следовательно, для любой $a \in A_s$ имеем $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$, что эквивалентно

$$A_s \subset U_{d_s}(K_d^{\text{Conv}}).$$

Но выпуклая оболочка подмножества лежит в выпуклой оболочке объемлющего множества. Также замечаем, что в силу выпуклости K_d^{Conv} и леммы 4 множество $U_{d_s}(K_d^{\text{Conv}})$ выпукло. Следовательно, справедливо

$$\text{Conv}(A_s) \subset \text{Conv}\left(U_{d_s}(K_d^{\text{Conv}})\right) = U_{d_s}(K_d^{\text{Conv}}). \quad (39)$$

Поэтому ввиду компактности $\text{Conv}(A_s)$ из пунктов (1)–(5) условий 1 вытекает:

$$\left| \text{Conv}(A_s) \cap \partial B_{d_s}(K_d^{\text{Conv}}) \right| > 0. \text{ Лемма доказана.}$$

□

ТЕОРЕМА 9 (Теорема об уменьшении веса сети или третье достаточное условие неустойчивости). Пусть все пункты (1)–(5) условий 1 выполнены. Тогда граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ неустойчива. Более того, в таком случае согласно леммам 25 и 26 выполнено $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, значит, $\min\{\delta_1, \delta_2, d_s\} > 0$. Выберем произвольное $0 < \delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2, d_s\}$ и положим

$$K = B_{d_s-\delta}(\text{Conv}(A_s)) \cap K_d^{\text{Conv}}. \quad (40)$$

Тогда также справедливо следующее неравенство:

$$S(A^{\text{Conv}}, K_d^{\text{Conv}}) - S(A^{\text{Conv}}, K) \geq \delta. \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Из неравенства (41) прямо вытекает неустойчивость границы A . Поэтому доказательство теоремы будет заключаться в доказательстве справедливости неравенства (41). Оно будет состоять из двух частей, каждая из которых оформлена в отдельную лемму.

ЛЕММА 27. Верно неравенство

$$d_H(\text{Conv}(A_s), K) \leq d_s - \delta < d_s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В силу выражения (39), леммы 26, выпуклости K_d^{Conv} , положительности d_s и леммы 10 получаем $\text{Conv}(A_s) \subset B_{d_s-\delta}(K_d^{\text{Conv}})$. Это эквивалентно тому, что для любой $a \in \text{Conv}(A_s)$ верно

$$B_{d_s-\delta}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset.$$

Отсюда, а также согласно (40) для любой $a \in \text{Conv}(A_s)$ справедливо

$$B_{d_s-\delta}(a) \cap K = B_{d_s-\delta}(a) \cap B_{d_s-\delta}(\text{Conv}(A_s)) \cap K_d^{\text{Conv}} = B_{d_s-\delta}(a) \cap K_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset.$$

Поэтому

$$\text{Conv}(A_s) \subset B_{d_s-\delta}(K). \quad (42)$$

Таким образом, в силу (40) и (42) имеем $d_H(\text{Conv}(A_s), K) \leq d_s - \delta < d_s$.

□

Теперь рассмотрим произвольный граничный компакт $\text{Conv}(A_i)$, $i \neq s$.

ЛЕММА 28. Верно неравенство

$$d_H(\text{Conv}(A_i), K) \leq d_i.$$

Доказательство.

Имеем

$$K \subset K_d^{\text{Conv}} \subset B_{d_i}(\text{Conv}(A_i)). \quad (43)$$

Покажем далее, что $\text{Conv}(A_i) \subset B_{d_i}(K)$.

Согласно лемме 25, выпуклости $\text{Conv}(A_s)$, положительности d_s и лемме 10 имеем $K_\lambda \subset B_{d_s-\delta}(\text{Conv}(A_s))$. И так как $K_\lambda \subset K_d \subset K_d^{\text{Conv}}$, то в силу (40) получаем

$$K_\lambda \subset B_{d_s-\delta}(\text{Conv}(A_s)) \cap K_d^{\text{Conv}} = K.$$

Отсюда, а также согласно $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ справедливо

$$A_i \subset B_{d_i}(K_\lambda) \subset B_{d_i}(K). \quad (44)$$

Множество K выпукло как пересечение выпуклых, и $B_{d_i}(K)$ выпукло по лемме 3. Таким образом, в силу (44), так как выпуклая оболочка подмножества лежит в выпуклой оболочке объемлющего множества, имеем $\text{Conv}(A_i) \subset B_{d_i}(K)$.

Поэтому, а также в силу (43) для всех $i \neq s$ справедливо

$$d_H(\text{Conv}(A_i), K) \leq d_i.$$

□

Ввиду лемм 27 и 28 получаем

$$S(A^{\text{Conv}}, K_d^{\text{Conv}}) - S(A^{\text{Conv}}, K) \geq \delta > 0.$$

Следовательно, по определению граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ неустойчива. Теорема доказана.

□

3.6. Пример неустойчивой границы

В качестве примера возьмём конфигурацию из работы [13], где $A = \{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ и $A_i = \{a_i, b_i\}$ для всех i , см. рис. 4.

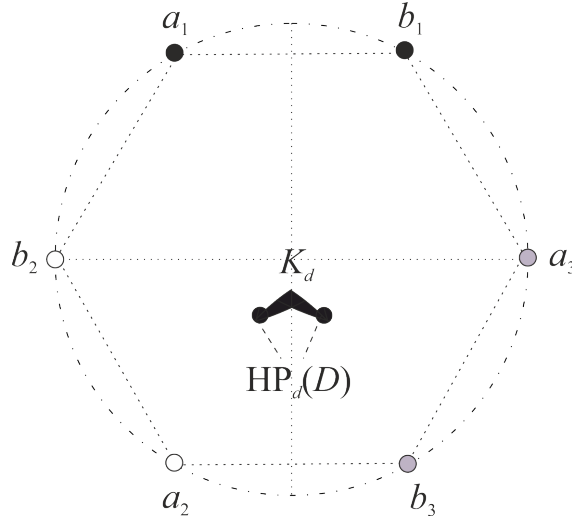


Рис. 4: Конфигурация из работы [13].

В данной конфигурации множество точек $\{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3\}$ расположено на единичной окружности с центром в начале координат, и оно является множеством вершин правильного шестиугольника. Координаты точек следующие:

$$a_1 = (-\cos(\pi/3), \sin(\pi/3));$$

$$b_1 = (\cos(\pi/3), \sin(\pi/3));$$

$$a_2 = (-\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3));$$

$$b_2 = (-1, 0);$$

$$a_3 = (1, 0);$$

$$b_3 = (\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3)).$$

На рис. 4 изображён максимальный компакт Штейнера K_d одного из трёх классов решений для границы A . Также в границе K_d выделено множество $\text{HP}(D)$, которое в данном случае состоит из двух точек и совпадает с минимальным компактом Штейнера K_λ , являющимся единственным минимальным компактом в рассматриваемом классе решений, см. работу [13].

Возьмём теперь границу $A^{\text{Conv}} = \{\text{Conv}(A_1), \text{Conv}(A_2), \text{Conv}(A_3)\}$, см. рис. 5, и обозначим левую точку $\text{HP}(D)$ через p , а правую — через q .

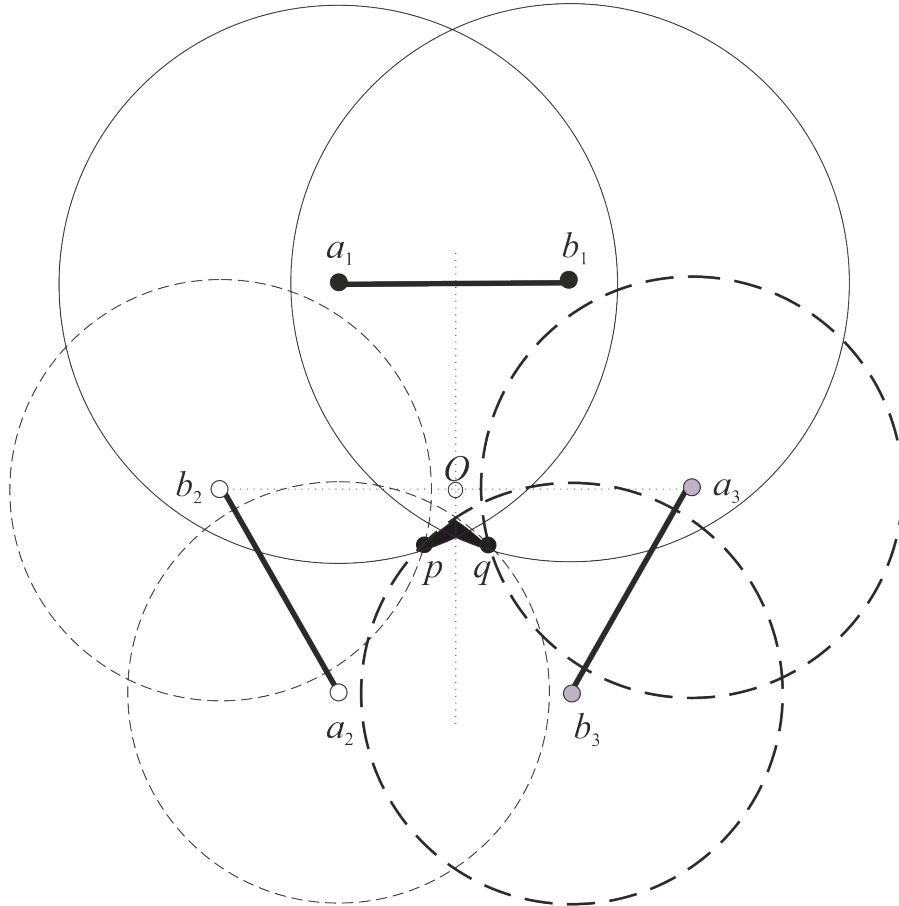


Рис. 5: Граница A^{Conv} и окрестности $U_{d_1}(A_1), U_{d_2}(A_2), U_{d_3}(A_3)$.

Согласно работе [13]

$$|Op| = |Oq| = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4\sqrt{5} - 7}}{4} < 0.5. \quad (45)$$

Также точка p лежит на отрезке $[O, a_2]$ и угол между $[O, a_2]$ и $[O, b_2]$ равен $\pi/3$. Значит, в декартовых координатах

$$p = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4\sqrt{5} - 7}}{4} \cdot (-\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3)).$$

Точка q располагается зеркально относительно вертикальной оси симметрии, проходящей через точку O , поэтому

$$q = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4\sqrt{5} - 7}}{4} \cdot (\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3)).$$

3.6.1. Обоснование неустойчивости

Норма евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ строго выпукла, описанная выше граница $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ финитна и $U_d^{\text{Conv}} \neq \emptyset$. Рассмотрим компакт $A_1 = \{a_1, b_1\}$. По условию $d_1 > 0$. Таким образом, в данном примере выполняются пункты (1)–(4) из условий 1. Покажем, что для расстояния d_1 также выполняется пункт (5) из условий 1:

$$(\partial B_{d_1}(a_1) \cup \partial B_{d_1}(b_1)) \cap \text{HP}(D) \subset \bigcap_{i=1}^3 U_{d_i}(\text{Conv}(A_i)) = U_d^{\text{Conv}}.$$

Имеем $K_\lambda = \text{HP}(D) \subset \partial B_{d_1}(a_1) \cup \partial B_{d_1}(b_1)$, см. рис. 5. Поэтому

$$(\partial B_{d_1}(a_1) \cup \partial B_{d_1}(b_1)) \cap \text{HP}(D) = \text{HP}(D).$$

Следовательно, нам нужно доказать, что $\text{HP}(D) \subset U_d^{\text{Conv}}$. Покажем сначала, что $\text{HP}(D) \subset U_{d_1}(\text{Conv}(A_1))$.

В силу (45) абсциссы точек p и q лежат строго между абсциссами точек a_1 и b_1 . При этом $p \in B_{d_1}(a_1)$ и $q \in B_{d_1}(b_1)$. Поэтому $|p[a_1, b_1]| < d_1$ и $|q[a_1, b_1]| < d_1$. Следовательно,

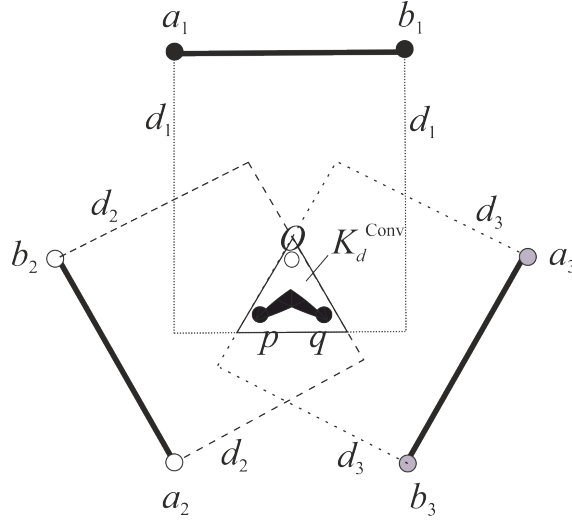
$$\text{HP}(D) = \{p, q\} \subset U_{d_1}(\text{Conv}(A_1)).$$

Далее покажем $\text{HP}(D) \subset U_{d_2}(\text{Conv}(A_2))$. Согласно доказанному в работе [13] имеем $p \in U_{d_2}(a_2)$, поэтому нам надо только показать, что $q \in U_{d_2}([a_2, b_2])$. Заметим, что треугольник a_2Ob_2 является правильным, и его сторона равна 1, так как a_i, b_i — вершины правильного шестиугольника со стороной 1 согласно условию. Отсюда высота, опущенная из вершины O , поделит противоположную сторону на два отрезка длиной 0.5 каждый. Далее, как уже было отмечено, p лежит на отрезке $[O, a_2]$, а точка q расположена симметрично относительно оси ординат. Следовательно, $q \in [O, b_3]$, и в силу (45) справедливо $|Oq| < 0.5$. Значит, ввиду параллельности отрезков $[a_2, b_2]$ и $[O, b_3]$ проекция q на $[a_2, b_2]$ попадёт внутрь этого отрезка. При этом $q \in B_{d_2}(a_2)$. Отсюда расстояние от q до отрезка $[a_2, b_2]$ меньше d_2 . Значит,

$$\text{HP}(D) = \{p, q\} \subset U_{d_2}(\text{Conv}(A_2)).$$

В силу зеркальной симметрии аналогично доказывается, что $\{p, q\} \subset U_{d_3}(\text{Conv}(A_3))$. Таким образом, мы показали

$$\text{HP}(D) \subset U_{d_i}(\text{Conv}(A_i))$$

Рис. 6: $\text{HP}(D) \subset U_d^{\text{Conv}} = \text{Int } K_d^{\text{Conv}}$.

для всех i , см. рис. 6. Следовательно, мы нашли компакт A_1 такой, что

$$\emptyset \neq \left(\partial B_{d_1}(a_1) \cup \partial B_{d_1}(b_1) \right) \cap \text{HP}(D) = \text{HP}(D) \subset \bigcap_{i=1}^3 U_{d_i}(\text{Conv}(A_i)) = U_d^{\text{Conv}}.$$

Значит, все пункты (1)–(5) условий 1 выполнены для $s = 1$. Отсюда согласно теореме 9 граница $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ является неустойчивой.

3.6.2. Уменьшение расстояния d_1

Вычислим теперь компакт, дающий меньшую сумму расстояний относительно величины $S(A^{\text{Conv}}, K_d^{\text{Conv}})$. Согласно доказанному

$$K_\lambda = \{p, q\} = \text{HP}(D) \subset U_d^{\text{Conv}} \subset U_{d_1}(\text{Conv}(A_1)).$$

Значит,

$$\delta_1 = \left| K_\lambda \partial B_{d_1}(\text{Conv}(A_1)) \right| > 0.$$

Далее, все пункты (1)–(5) условий 1 выполнены, следовательно, по лемме 26

$$\delta_2 = \left| \text{Conv}(A_1) \partial B_{d_1}(K_d^{\text{Conv}}) \right| > 0.$$

Поэтому для уменьшения веса сети можно воспользоваться теоремой 9, согласно которой величина затяжения расстояния d_1 может быть определена как, в частности, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, d_1\}$.

Найдём сначала значение δ_1 . Отрезок $[p, q]$ параллелен отрезку $[a_1, b_1]$ и, как отмечалось выше, абсциссы точек p и q лежат строго между абсциссами точек a_1 и b_1 . Следовательно, исходя из координат перечисленных точек и расстояния d_1 , равного $\sqrt{c^2 + c + 1}$, где $c = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4\sqrt{5} - 7}}{4} = 0.210424 \dots$, имеем

$$\delta_1 = -c \cdot \sin(\pi/3) - (\sin(\pi/3) - \sqrt{c^2 + c + 1}) = \sqrt{c^2 + c + 1} - (c + 1) \cdot \sin(\pi/3) = 0.071876 \dots$$

Далее, как отмечено выше, $\delta_2 = \left| [a_1, b_1] \partial B_{d_1}(K_d^{\text{Conv}}) \right|$. Покажем, что начало координат O лежит внутри K_d^{Conv} . Высота в треугольнике $a_2 O b_2$ равна $\sqrt{3}/2$. Сравним это число с $d_2 = \sqrt{c^2 - c + 1}$:

$$\sqrt{3}/2 \quad \dots \quad \sqrt{c^2 - c + 1};$$

$$3/4 \quad \dots \quad c^2 - c + 1/4 + 3/4;$$

$$0 \quad \dots \quad (c - 1/2)^2.$$

Как мы отмечали выше, $c = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4\sqrt{5}-7}}{4} < 0.5$, значит, $(c - 1/2)^2 > 0$, и поэтому $d_2 > \sqrt{3}/2$. Отсюда $O \in U_{d_2}(\text{Conv}(A_2))$, см. рис 7. Ввиду симметрии аналогично показывается, что

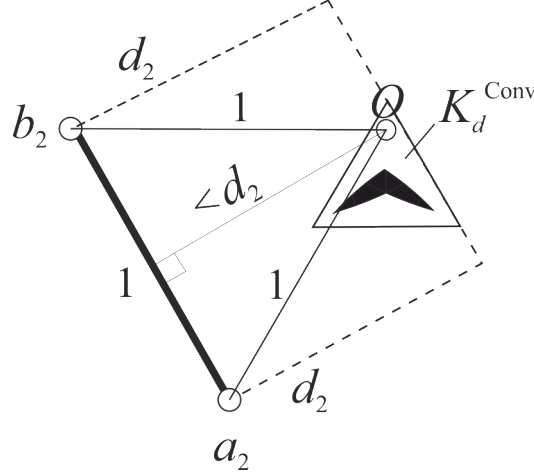


Рис. 7: $O \in U_{d_2}(\text{Conv}(A_2))$.

$O \in U_{d_3}(\text{Conv}(A_3))$. Следовательно, $O \in U_d^{\text{Conv}} \subset K_d^{\text{Conv}}$. Но $d_1 = \sqrt{c^2 + c + 1} = 1.120135 \dots$. Значит, $a_1, b_1 \in U_{d_1}(O)$, так как $|a_1 O| = |b_1 O| = 1$. Заметим, что любая точка из отрезка $[a_1, b_1]$ расположена не дальше от начала координат O , чем точка a_1 или точка b_1 . Отсюда

$$|[a_1, b_1] \partial B_{d_1}(O)| = |a_1 \partial B_{d_1}(O)| = |b_1 \partial B_{d_1}(O)| = d_1 - |a_1 O| = d_1 - |b_1 O|. \quad (46)$$

Но так как $O \in U_d^{\text{Conv}} \subset K_d^{\text{Conv}}$, то

$$B_{d_1}(O) \subset U_{d_1}(K_d^{\text{Conv}}) \subset B_{d_1}(K_d^{\text{Conv}}).$$

Следовательно, ввиду компактности $B_{d_1}(O)$ и $\partial B_{d_1}(K_d^{\text{Conv}})$ имеем, что

$$|B_{d_1}(O) \partial B_{d_1}(K_d^{\text{Conv}})| > 0. \quad (47)$$

И наконец, из (46) и (47) вытекает, что

$$\delta_2 = |[a_1, b_1] \partial B_{d_1}(K_d^{\text{Conv}})| > d_1 - |a_1 O| = 0.120135 \dots > \delta_1 = 0.071876 \dots$$

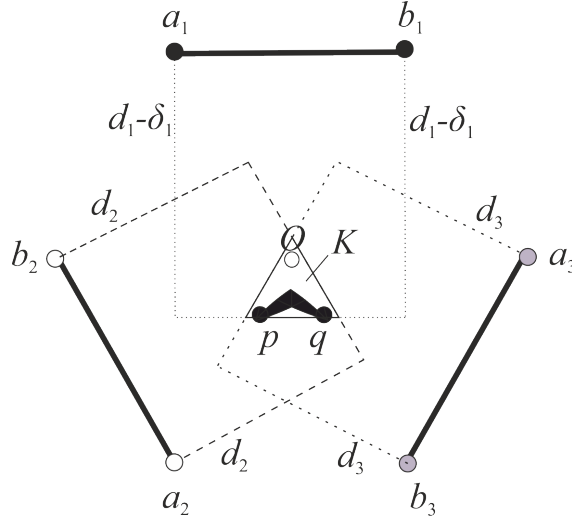
Поэтому

$$\min\{\delta_1, \delta_2, d_1\} = \delta_1 = 0.071876 \dots$$

Таким образом, по теореме 9 одним из компактов в данном случае, дающих меньшую сумму расстояний, является компакт $K = B_{d_1-\delta_1}([a_1, b_1]) \cap K_d^{\text{Conv}}$, который равен треугольнику K_d^{Conv} с основанием, поднятым вверх до пересечения с $K_\lambda = \{p, q\}$, см. рис. 8.

Заметим, что в данном случае, так как все $d_i > 0$, можно вместо d_1 в качестве затягиваемого расстояния d_s выбрать d_2 или d_3 , так как

$$(\partial B_{d_2}(a_2) \cup \partial B_{d_2}(b_2)) \cap \text{HP}(D) = (\partial B_{d_3}(a_3) \cup \partial B_{d_3}(b_3)) \cap \text{HP}(D) = \text{HP}(D)$$

Рис. 8: $K = B_{d_1 - \delta_1}([a_1, b_1]) \cap K_d^{\text{Conv}}$.

и по доказанному

$$\text{HP}(D) \subset U_d^{\text{Conv}},$$

то есть, другими словами, пункт (5) из условий 1 выполняется тоже для d_2 и d_3 .

Отметим, что в силу симметрии значение $\min\{\delta_1, \delta_2, d_2\}$, где δ_1 и δ_2 вычислены относительно d_2 , равно значению $\min\{\delta_1, \delta_2, d_3\}$, где δ_1 и δ_2 вычислены уже относительно d_3 . Поэтому достаточно рассмотреть случай какого-то одного из этих двух расстояний, например, d_2 .

3.6.3. Уменьшение расстояния d_2

Итак, найдём $\min\{\delta_1, \delta_2, d_2\}$. Согласно установленному выше, отрезок $[O, q]$ параллелен $[a_2, b_2]$, и проекция $[O, q]$ на $[a_2, b_2]$ лежит строго внутри отрезка $[a_2, b_2]$, то есть в (a_2, b_2) . Причём $|O[a_2, b_2]| = \sqrt{3}/2$ и $d_2 = 0.913156\dots$. Значит,

$$\delta_1 = |K_\lambda \partial B_{d_2}(\text{Conv}(A_2))| = |q \partial B_{d_2}(\text{Conv}(A_2))| = d_2 - \sqrt{3}/2 = 0.047130\dots$$

Теперь вычислим

$$\delta_2 = |\text{Conv}(A_2) \partial B_{d_2}(K_d^{\text{Conv}})| = |[a_2, b_2] \partial B_{d_2}(K_d^{\text{Conv}})|.$$

Выпишем уравнения прямых, на которых лежат отрезки $[a_1, b_1]$ и $[a_3, b_3]$. Для первого отрезка уравнение имеет вид $y - \sin(\pi/3) = 0$, то есть

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

а для второго оно имеет вид $\frac{x-1}{\cos(\pi/3)-1} + \frac{y}{\sin(\pi/3)} = 0$ или после эквивалентных преобразований

$$\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0.$$

Чтобы получить уравнения прямых, на которых лежат основание треугольника K_d^{Conv} и его левая боковая сторона, сдвинем первую прямую на ортогональный ей вектор $d_1(0, -1)$, а вторую прямую — также на ортогональный ей вектор $d_2(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. В итоге получим уравнения

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} + d_1 = 0, \tag{48}$$

$$\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} + 2d_2 = 0. \quad (49)$$

Отсюда координаты пересечения этих двух прямых равны

$$t := \left(\frac{3\sqrt{3} - 2(d_1 + 2d_2)}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2} - d_1 \right) = (-0.201132\dots, -0.254109\dots).$$

Серединный перпендикуляр к отрезку $[a_2, b_2]$ пройдёт через точку O и пересечёт левую сторону треугольника K_d^{Conv} , так как $O \in U_d^{\text{Conv}}$ по доказанному. Точка t — крайняя нижняя точка левой стороны этого треугольника. Значит, t лежит не выше серединного перпендикуляра к $[a_2, b_2]$. Отсюда

$$|t a_2| \leq |t b_2| = |(-1, 0) (-0.201132\dots, -0.254109\dots)| = 0.838308\dots$$

При этом $d_2 = 0.913156\dots > 0.838308\dots = |t b_2|$. Следовательно,

$$|[a_2, b_2] \partial B_{d_2}(t)| = |b_2 \partial B_{d_2}(t)|.$$

Также $t \in K_d^{\text{Conv}}$, и поэтому

$$B_{d_2}(t) \subset B_{d_2}(K_d^{\text{Conv}}).$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \delta_2 &= |[a_2, b_2] \partial B_{d_2}(K_d^{\text{Conv}})| \geq |b_2 \partial B_{d_2}(t)| = \\ &= d_2 - |t b_2| = 0.913156\dots - 0.838308\dots = 0.074847\dots > \delta_1 = 0.047130\dots \end{aligned}$$

Поэтому

$$\min\{\delta_1, \delta_2, d_2\} = \delta_1 = 0.047130\dots$$

Значит, расстояние d_2 согласно теореме 9 максимально можно уменьшить не более чем на $\delta_1 = 0.047130\dots$, и $K_\lambda = \text{HP}(D) = \{p, q\}$ будет пересекаться с границей нового компакта $K = B_{d_2-\delta_1}([a_2, b_2]) \cap K_d^{\text{Conv}}$ по точке q , то есть

$$K_\lambda \cap \partial(B_{d_2-\delta_1}([a_2, b_2]) \cap K_d^{\text{Conv}}) = \{q\}.$$

3.6.4. Уменьшение расстояния d_3

Как было отмечено выше, случай $d_s = d_3$ аналогичен ввиду симметрии случаю $d_s = d_2$ и при этом $\min\{\delta_1, \delta_2, d_3\} = \min\{\delta_1, \delta_2, d_2\} = 0.047130\dots$, где каждые δ_i вычислялись для соответствующих расстояний d_3 и d_2 . Заметим, что в случае затяжения d_3 имеем

$$K_\lambda \cap \partial(B_{d_3-\delta_1}([a_3, b_3]) \cap K_d^{\text{Conv}}) = \{p\}.$$

3.6.5. Уменьшение двух расстояний d_1 и d_2

Попробуем теперь выяснить, можно ли уменьшить сразу два расстояния, например, d_1 и d_2 , где d_1 затягивается на δ_1 , посчитанное в разделе 3.6.2, обозначим эту величину через $\delta_1(d_1)$, а d_2 затягивается на δ_1 , вычисленное в разделе 3.6.3, обозначим эту величину через $\delta_1(d_2)$. Также для удобства введём обозначения

$$K(d_1) := B_{d_1-\delta_1(d_1)}([a_1, b_1]) \cap K_d^{\text{Conv}};$$

$$K(d_2) := B_{d_2-\delta_1(d_2)}([a_2, b_2]) \cap K_d^{\text{Conv}}.$$

Покажем, что $d_H(\text{Conv}(A_2), K(d_1) \cap K(d_2)) \leq d_2 - \delta_1(d_2)$. Докажем сначала, что $[a_2, b_2] \subset B_{d_2 - \delta_1(d_2)}(K(d_1) \cap K(d_2))$. Рассмотрим точку b_2 . Точка p находится ниже точки b_2 , и $|p b_2| = d_2$, см. рис. 9. Также ввиду симметрии

$$|p \partial B_{d_3}(\text{Conv}(A_3))| = |q \partial B_{d_2}(\text{Conv}(A_2))| = \delta_1(d_2),$$

см. раздел 3.6.3. Обозначим через m пересечение отрезка $[b_2, p]$ с левой боковой стороной треугольника $K(d_1) \cap K(d_2)$. Отсюда имеем, что $[m, p] \subset K(d_1) \cap K(d_2)$ и $|mp| \geq \delta_1(d_2)$. Значит, $|b_2 m| \leq d_2 - \delta_1(d_2)$, и поэтому $b_2 \in B_{d_2 - \delta_1(d_2)}(m)$. Следовательно,

$$b_2 \in B_{d_2 - \delta_1(d_2)}(K(d_1) \cap K(d_2)). \quad (50)$$

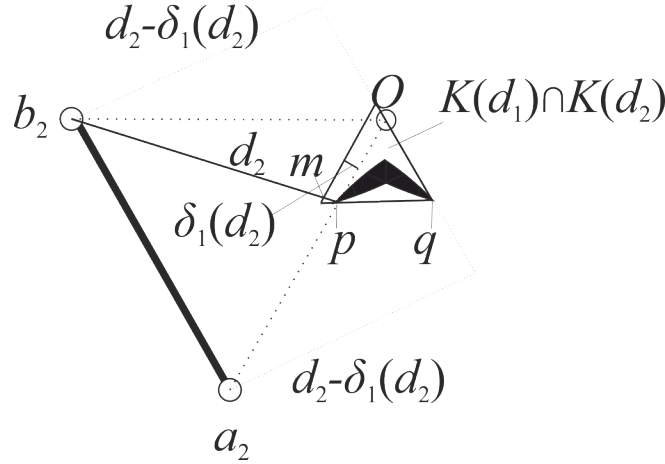


Рис. 9: $K(d_1) \cap K(d_2)$ и компакт $\text{Conv}(A_2)$.

Далее рассмотрим точку a_2 и покажем, что $a_2 \in B_{d_2 - \delta_1(d_2)}(K(d_1) \cap K(d_2))$. Имеем

$$|a_2 p| = 1 - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4\sqrt{5} - 7}}{4} = 1 - 0.210424 \dots < 0.8.$$

При этом

$$d_2 - \delta_1(d_2) = 0.913156 \dots - 0.047130 \dots > 0.8.$$

Значит, $a_2 \in B_{d_2 - \delta_1(d_2)}(p)$. Также $p \in K(d_1) \cap K(d_2)$, см. разделы 3.6.2 и 3.6.3. Отсюда

$$a_2 \in B_{d_2 - \delta_1(d_2)}(K(d_1) \cap K(d_2)). \quad (51)$$

Множество $B_{d_2 - \delta_1(d_2)}(K(d_1) \cap K(d_2))$ выпукло по лемме 3, так как $K(d_1) \cap K(d_2)$ выпуклый компакт. Следовательно, в силу (50) и (51) имеем, что

$$\text{Conv}(A_2) = [a_2, b_2] \subset B_{d_2 - \delta_1(d_2)}(K(d_1) \cap K(d_2)).$$

При этом $K(d_1) \cap K(d_2) \subset K(d_2) \subset B_{d_2 - \delta_1(d_2)}(\text{Conv}(A_2))$. Поэтому

$$d_H(\text{Conv}(A_2), K(d_1) \cap K(d_2)) \leq d_2 - \delta_1(d_2).$$

Далее покажем, что $d_H(\text{Conv}(A_1), K(d_1) \cap K(d_2)) \leq d_1 - \delta_1(d_1)$. Имеем, что $O \in K(d_1) \cap K(d_2)$ и $d_1 - \delta_1(d_1) = 1.120135 \dots - 0.071876 \dots > |a_1 O| = |b_1 O| = 1$, см. раздел 3.6.2. Следовательно, $[a_1, b_1] \subset B_{d_1 - \delta_1(d_1)}(O)$. Значит,

$$\text{Conv}(A_1) = [a_1, b_1] \subset B_{d_1 - \delta_1(d_1)}(K(d_1) \cap K(d_2)).$$

При этом

$$K(d_1) \cap K(d_2) \subset K(d_1) \subset B_{d_1 - \delta_1(d_1)}(\text{Conv}(A_1)).$$

Поэтому

$$d_H(\text{Conv}(A_1), K(d_1) \cap K(d_2)) \leq d_1 - \delta_1(d_1).$$

Наконец, докажем, что $d_H(\text{Conv}(A_3), K(d_1) \cap K(d_2)) \leq d_3$. Заметим, что $K_\lambda = \{p, q\} \subset K(d_1) \cap K(d_2)$. Также по условию имеем, что $A_3 \subset B_{d_3}(K_\lambda)$. Значит,

$$A_3 \subset B_{d_3}(K(d_1) \cap K(d_2)). \quad (52)$$

Множество $B_{d_3}(K(d_1) \cap K(d_2))$ выпукло по лемме 3, так как $K(d_1) \cap K(d_2)$ выпуклый компакт. Поэтому в силу (52) получаем

$$\text{Conv}(A_3) = [a_3, b_3] \subset B_{d_3}(K(d_1) \cap K(d_2)).$$

Также

$$K(d_1) \cap K(d_2) \subset K_d^{\text{Conv}} \subset B_{d_3}(\text{Conv}(A_3)).$$

Отсюда

$$d_H(\text{Conv}(A_3), K(d_1) \cap K(d_2)) \leq d_3.$$

Таким образом, мы установили, что в данной конфигурации можно затянуть сразу два расстояния d_1 и d_2 на свои $\delta_1(d_1)$ и $\delta_1(d_2)$. Аналогично показывается в силу симметрии, что можно одновременно затянуть d_1 и d_3 . В итоге мы имеем, что

$$S(A^{\text{Conv}}, K_d^{\text{Conv}}) - S(A^{\text{Conv}}, K(d_1) \cap K(d_2)) \geq \delta_1(d_1) + \delta_1(d_2).$$

Напомним, что величина затяжения расстояния d_3 равна $\delta_1(d_2)$ ввиду симметрии, но $\delta_1(d_1) > \delta_1(d_2)$. Поэтому одновременное уменьшение расстояний d_2 и d_3 (даже если оно возможно) даст компакт, находящийся на большем суммарном расстоянии по Хаусдорфу до граничных компактов $\text{Conv}(A_i)$, чем компакт $K(d_1) \cap K(d_2)$.

3.6.6. Об уменьшении сразу трёх расстояний d_1 , d_2 и d_3

Возникает естественный вопрос, можно ли уменьшить все расстояния d_i на соответствующие вычисленные δ_1 одновременно? Ответ отрицательный. А именно, пусть мы одновременно уменьшили описанным выше способом расстояния d_1 и d_2 и получили компакт $K(d_1) \cap K(d_2)$, см. рис. 9. Но тогда ближайшей к a_3 точкой в $K(d_1) \cap K(d_2)$ будет точка q , так как по условию $|a_3 q| = d_3$, см. рис. 5. Следовательно, расстояние d_3 никак уменьшить уже будет нельзя.

Таким образом, величина общего затяжения в данной конфигурации равна

$$\begin{aligned} S(A^{\text{Conv}}, K_d^{\text{Conv}}) - S(A^{\text{Conv}}, K(d_1) \cap K(d_2)) &\geq \delta_1(d_1) + \delta_1(d_2) = \\ &= 0.071876 \dots + 0.047130 \dots = 0.119007 \dots \end{aligned}$$

4. Заключение

В данной работе было проведено исследование вопроса устойчивости границы в проблеме Ферма — Штейнера в случае гиперпространства над конечномерным нормированным пространством X над полем $\mathbb{R}$. Такое гиперпространство всюду выше обозначалось через $\mathcal{H}(X)$. Под устойчивостью границы $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ здесь имеется в виду выполнение следующего условия:

$$\min_{K \in \mathcal{H}(X)} \sum_{i=1}^n d_H(A_i, K) = \min_{K' \in \mathcal{H}(X)} \sum_{i=1}^n d_H(\text{Conv}(A_i), K').$$

В разделах 3.4 и 3.5 были выведены три различных достаточных условия неустойчивости границы. В первом достаточном условии (следствие 6) для установления неустойчивости требуется показать, что хотя бы для одного вектора $d \in \Omega(A)$ ни один компакт $\text{Conv}(A_i)$ не содержит относительно $K_d^{\text{Conv}} = \bigcap_{i=1}^n B_{d_i}(\text{Conv}(A_i))$ так называемых далёких точек, описанных в разделе 3.2, которые согласно теореме 3 обязаны присутствовать хотя бы в одном $\text{Conv}(A_i)$, если $d \in \Omega(A^{\text{Conv}})$, где $A^{\text{Conv}} = \{\text{Conv}(A_1), \dots, \text{Conv}(A_n)\}$. Напомним, что согласно необходимому условию устойчивости если граница A устойчива, то $d = (d_1, \dots, d_n) \in \Omega(A) \subset \Omega(A^{\text{Conv}})$ и K_d^{Conv} — максимальный компакт Штейнера в $\Sigma_d(A^{\text{Conv}})$, см. утверждение 13.

Второе достаточное условие (следствие 7) может быть полезно в случае, когда относительно K_d^{Conv} такие далёкие точки для каждого вектора $d \in \Omega(A)$ в каких-то граничных компактах $\text{Conv}(A_i)$ всё же нашлись, то есть соответствующие множества $\text{HP}(F_d^{A^{\text{Conv}}})$ (см. введение обозначений перед следствием 6), лежащие в K_d^{Conv} , оказались непустыми. Тогда, как говорится в следствии 7, чтобы показать неустойчивость границы A , нужно, во-первых, найти хотя бы один вектор $d \in \Omega(A)$ и хотя бы один компакт $\text{Conv}(A_s)$, который не имеет далёких для этого вектора d точек, во-вторых, нужно доказать, что $\text{HP}(F_d^{A^{\text{Conv}}}) \subset U_{d_s}(\text{Conv}(A_s))$.

Третье достаточное условие (теорема 9) может пригодиться, с одной стороны, в случае, когда пункты (1)–(4) из условий 1 выполнены и проверить выполнимость пункта (5) из условий 1 оказывается проще, чем находить множество всех далёких точек $F_d^{A^{\text{Conv}}}$, что требуется в следствиях 6 и 7. С другой стороны, теорема 9 заодно даёт ответ на вопрос, как найти компакты, реализующие меньшую сумму расстояний до границы A^{Conv} , чем компакт K_d^{Conv} .

Применение третьего достаточного условия неустойчивости было продемонстрировано в настоящей статье на одной известной из недавних работ конфигурации, где исходная граница находится в евклидовой плоскости и состоит из трёх компактов, лежащих определённым образом на единичной окружности, см. раздел 3.6. А именно, для данной конфигурации посредством теоремы 9 была доказана её неустойчивость, а также оценена величина уменьшения значения функционала $S(A^{\text{Conv}}, K)$ относительно величины $S(A^{\text{Conv}}, K_d^{\text{Conv}})$.

В настоящей работе помимо упомянутых выше далёких точек, обнаруженных в граничных компактах финитных и выпуклых границ (финитной в данной статье называлась граница, все компакты в которой конечны, а выпуклой — граница, все компакты в которой выпуклы), также были найдены ещё два типа точек — дискретные и неплотные, см. раздел 3.2. Здесь эта теория получила развитие как продолжение соответствующей теории точек сцепки из работы [13].

В дальнейших работах было бы интересно обобщить вид пространства X , над которым рассматривалось гиперпространство в настоящей работе, обобщить теоремы о существовании дискретных, неплотных и далёких точек на случай произвольных границ, а также попытаться отыскать критерий неустойчивости границы пусть даже в гиперпространстве над конечномерным нормированным пространством. Ещё любопытно продвинуться в изучении вопроса уменьшения значения функционала $S(A^{\text{Conv}}, K)$ в неустойчивом случае. А именно, в предыдущем разделе мы каждое расстояние по отдельности затягивали на максимально возможную величину. В итоге оказалось, что таким образом можно затянуть не более двух расстояний, причём в случае расстояний d_1 и d_2 или d_1 и d_3 оставшееся третье расстояние уменьшать уже никак было нельзя. Здесь возникает вопрос, можно ли добиться большего уменьшения значения функционала $S(A^{\text{Conv}}, K)$ относительно величины $S(A^{\text{Conv}}, K_d^{\text{Conv}})$, если расстояния уменьшать не на свои максимальные величины или вообще если позволить какие-то расстояния даже увеличивать?

Все описанные выше задачи являются темами возможных дальнейших исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Branching solutions to one-dimensional variational problems // World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001, xxii+342 pp.
2. Cieslik D. Steiner minimal trees // Nonconvex Optim. Appl., 23, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, xii+319 pp.
3. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal networks: a review // Advances in dynamical systems and control, Stud. Syst. Decis. Control, 69, Springer, Cham, 2016, 43–80 pp.
4. Hwang F. K., Richards D. S., Winter P. The Steiner Tree Problem // North-Holland, 1992, 339 p.
5. Jarnik V., Kössler M. On minimal graphs containing n given points // Časopis Pěst. Mat. Fys., 63:8 (1934), 223–235 pp.
6. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов, 3-е изд., испр. и доп. // МЦНМО, М., 2001, 568 с.
7. A. Ivanov A., Tropin A., Tuzhilin A. Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance // J. Geom., 108:2 (2017), 575–590.
8. Nadler S. B. Hyperspaces of sets // Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1978, 707 p.
9. Blackburn C. C., Lund K., Schlicker S., Sigmon P., Zupan A. An introduction to the geometry of $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ // GVSU REU 2007, Grand Valley State Univ., Allendale, MI, 2007.
10. Memoli F. On the use of Gromov–Hausdorff distances for shape comparison // Eurographics symposium on point based graphics, The Eurographics Association, Prague, 2007, 81–90.
11. Memoli F. Some properties of Gromov–Hausdorff distances // Discrete Comput. Geom., 48:2 (2012), 416–440.
12. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Isometry group of Gromov–Hausdorff space // Mat. Vesnik, 71:1-2 (2019), 123–154.
13. Galstyan A. Kh., Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. The Fermat–Steiner problem in the space of compact subsets of $\mathbb{R}^m$ endowed with the Hausdorff metric // Sb. Math., 212:1 (2021), 25–56
14. Тропин А. М. Оценка длины минимальной параметрической сети в гиперпространствах при деформации граничного множества // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, 25, 2, 2021, стр. 81–107
15. Mendelson B. Introduction to topology // Dover Publications, 1990, 206 p.
16. Leonard I. E., Lewis J. E. Geometry of convex sets // Wiley, 2015, 336 p.
17. Алимов А. Р., Царьков И. Г. Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышёвских множеств // Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, No 4, с. 21–91.
18. Schlicker S. The geometry of the Hausdorff metric // GVSU REU 2008, Grand Valley State Univ., Allendale, MI, 2008, 11 pp., <http://faculty.gvsu.edu/schlicks/HMG2008.pdf>.
19. Бурого Д. Ю., Бурого Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 512 с.

20. Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа: случай компактов // М.: Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2017. 111 с.
21. А. Х. Галстян. Про непрерывность одной операции с выпуклыми компактами в конечно-мерных нормированных пространствах // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 152–160.
22. Drusvyatskiy D. Convex analysis and nonsmooth optimization // University Lecture, 2020, https://sites.math.washington.edu/ddrusv/crs/Math_516_2020/bookwithindex.pdf
23. Galstyan A. Kh. Boundary stability in the Fermat–Steiner problem in hyperspaces over finite-dimensional normed spaces // arXiv:2212.01881, 2022

REFERENCES

1. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2001, *Branching solutions to one-dimensional variational problems*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, xxii+342 pp.
2. Cieslik, D. 1998, *Steiner minimal trees*, Nonconvex Optim. Appl., 23, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, xii+319 pp.
3. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2016, “Minimal networks: a review”, *Advances in dynamical systems and control, Stud. Syst. Decis. Control*, 69, Springer, Cham, 43–80 pp.
4. Hwang, F. K., Richards, D. S. & Winter, P. 1992, *The Steiner Tree Problem*, North-Holland, 339 p.
5. Jarník, V. & Kössler, M. 1934, “On minimal graphs containing n given points”, *Časopis Pěst. Mat. Fys.*, vol. 63, no. 8, pp. 223–235.
6. Courant, R. & Robbins, H. 2001, *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods, 3-rd ed., cor. and ad.*, Izdatelstvo MCNMO, M., p. 568.
7. Ivanov, A., Tropin, A. & Tuzhilin, A. 2017, “Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance”, *J. Geom.*, vol. 108, no. 2, pp. 575–590.
8. Nadler, S. B. 1978, *Hyperspaces of sets*, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 707 p.
9. Blackburn, C. C., Lund, K., Schlicker, S., Sigmon, P. & Zupan, A. 2007, *An introduction to the geometry of $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$* , GVSU REU 2007, Grand Valley State Univ., Allendale, MI.
10. Memoli, F. 2007, “On the use of Gromov–Hausdorff distances for shape comparison”, *Eurographics symposium on point based graphics, The Eurographics Association, Prague*, pp. 81–90.
11. Memoli, F. 2012, “Some properties of Gromov–Hausdorff distances”, *Discrete Comput. Geom.*, vol. 48, no. 2, pp. 416–440.
12. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2019, “Isometry group of Gromov–Hausdorff space”, *Mat. Vesnik*, vol. 71, no. 1–2, pp. 123–154.
13. Galstyan, A. Kh., Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2021, “The Fermat–Steiner problem in the space of compact subsets of $\mathbb{R}^m$ endowed with the Hausdorff metric”, *Sb. Math.*, vol. 212, no. 1, pp. 25–56.

14. Tropin, A. M. 2021, “An Estimation of the Length of a Minimal Parametric Network in Hyperspaces under the Deformation of the Boundary Set”, *Intelligent systems. Theory and Applications*, vol. 25, no. 2, pp. 81–107.
15. Mendelson, B. 1990, *Introduction to topology*, Dover Publications, 206 p.
16. Leonard, I. E. & Lewis, J. E. 2015, *Geometry of convex sets*, Wiley, 336 p.
17. Alimov, A. R. & Tsarkov, I. G. 2014, “Connection and other geometric properties of suns and Chebyshev sets”, *Fundamental and applied mathematics*, vol. 19, no. 4, pp. 21–91.
18. Schlicker, S. 2008, “The geometry of the Hausdorff metric”, *GVSU REU 2008, Grand Valley State Univ., Allendale, MI*, 11 pp., <http://faculty.gvsu.edu/schlicks/HMG2008.pdf>.
19. Burago, D., Burago, Yu. & Ivanov, S. 2004, *A course in metric geometry*, Institute for Computer Research, Moscow–Izhevsk, p. 512.
20. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2017, *Geometry of Hausdorff and Gromov–Hausdorff distances: the case of compact sets*, Faculty of mechanics and mathematics of MSU, Moscow, p. 111.
21. Galstyan, A. Kh. 2022, “About the continuity of one operation with convex compacts in finite-dimensional normed spaces”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 152–160.
22. Drusvyatskiy, D. 2020, *Convex analysis and nonsmooth optimization*, University Lecture, https://sites.math.washington.edu/ddrusv/crs/Math_516_2020/bookwithindex.pdf
23. Galstyan A. Kh. 2022, “Boundary stability in the Fermat–Steiner problem in hyperspaces over finite-dimensional normed spaces” // [arXiv:2212.01881](https://arxiv.org/abs/2212.01881)

Получено: 17.03.2023

Принято в печать: 14.06.2023