

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 2.

УДК 3 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-63-80

Задача о нахождении функции по ее шаровым средним

Н. П. Волчкова, Вит. В. Волчков

Волчкова Наталья Петровна — кандидат физико-математических наук, доцент, Донецкий национальный технический университет (г. Донецк).

e-mail: volna936@gmail.com, volchkova.n.p@gmail.com

Волчков Виталий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, Донецкий государственный университет (г. Донецк).

e-mail: v.volchkov@donnu.ru

Аннотация

Классическим свойством непостоянной $2r$ -периодической функции на вещественной оси является отсутствие у нее периода, несоизмеримого с r . Одним из многомерных аналогов этого утверждения является следующая хорошо известная теорема Л. Зальцмана о двух радиусах: для существования ненулевой локально суммируемой функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ с нулевыми интегралами по всем шарам радиусов r_1 и r_2 в $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы $r_1/r_2 \in E_n$, где E_n — множество всевозможных отношений положительных нулей функции Бесселя $J_{n/2}$. Условие $r_1/r_2 \notin E_n$ эквивалентно равенству $\mathcal{Z}_+(\tilde{\chi}_{r_1}) \cap \mathcal{Z}_+(\tilde{\chi}_{r_2}) = \emptyset$, где χ_r — индикатор шара $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, $\tilde{\chi}_r$ — сферическое преобразование (преобразование Фурье-Бесселя) индикатора χ_r , $\mathcal{Z}_+(\tilde{\chi}_r)$ — множество всех положительных нулей четной целой функции $\tilde{\chi}_r$. В терминах свертки теорема о двух радиусах означает, что оператор

$$\mathcal{P}f = (f * \chi_{r_1}, f * \chi_{r_2}), \quad f \in L^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

инъективен тогда и только тогда, когда $r_1/r_2 \notin E_n$. В данной работе найдена новая формула обращения оператора $\mathcal{P}$ при условии $r_1/r_2 \notin E_n$. Полученный результат существенно упрощает известные ранее процедуры восстановления функции f по заданным шаровым средним $f * \chi_{r_1}$ и $f * \chi_{r_2}$. В доказательствах используются методы гармонического анализа, а также теории целых и специальных функций.

Ключевые слова: периодические в среднем функции, радиальные распределения, теорема о двух радиусах, формулы обращения

Библиография: 37 названий.

Для цитирования:

Н. П. Волчкова, Вит. В. Волчков. Задача о нахождении функции по ее шаровым средним // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 63–80.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 2.

UDC 3 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-63-80

The problem of finding a function by its ball means values

N. P. Volchkova, Vit. V. Volchkov

Volchkova Natalia Petrovna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Donetsk National Technical University (Donetsk).

e-mail: volna936@gmail.com, volchkova.n.p@gmail.com

Volchkov Vitaliy Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Donetsk State University (Donetsk).

e-mail: v.volchkov@donnu.ru

Abstract

A classical property of a non-constant $2r$ -periodic function on the real axis is that it has no period incommensurable with r . One of the multidimensional analogues of this statement is the following well-known theorem of L. Zalcman on two radii: for the existence of a nonzero locally summable function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ with nonzero integrals over all balls of radii r_1 and r_2 in $\mathbb{R}^n$ it is necessary and sufficient that $r_1/r_2 \in E_n$, where E_n is the set of all possible ratios of positive zeros of the Bessel function $J_{n/2}$. The condition $r_1/r_2 \notin E_n$ is equivalent to the equality $\mathcal{Z}_+(\tilde{\chi}_{r_1}) \cap \mathcal{Z}_+(\tilde{\chi}_{r_2}) = \emptyset$, where χ_r is the indicator of the ball $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, $\tilde{\chi}_r$ is the spherical transform (Fourier-Bessel transform) of the indicator χ_r , $\mathcal{Z}_+(\tilde{\chi}_r)$ is the set of all positive zeros of even entire function $\tilde{\chi}_r$. In terms of convolutions, L. Zalcman's theorem means that the operator

$$\mathcal{P}f = (f * \chi_{r_1}, f * \chi_{r_2}), \quad f \in L^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

is injective if and only if $r_1/r_2 \notin E_n$. In this paper, a new formula for the inversion of the operator $\mathcal{P}$ is found under the condition $r_1/r_2 \notin E_n$. The result obtained significantly simplifies the previously known procedures for recovering a function f from given ball means values $f * \chi_{r_1}$ и $f * \chi_{r_2}$. The proofs use the methods of harmonic analysis, as well as the theory of entire and special functions.

Keywords: mean periodic functions, radial distributions, two-radii theorem, inversion formulas

Bibliography: 37 titles.

For citation:

N. P. Volchkova, Vit. V. Volchkov, 2023, "The problem of finding a function by its ball means values", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 63–80.

1. Введение

Задача о существовании ненулевой функции $f \in C(\mathbb{R}^2)$ с нулевыми интегралами по всем кругам фиксированного радиуса в $\mathbb{R}^2$ восходит к Д. Помпейю [1]. В этой работе он анонсировал следующее, но как позже выяснилось, неверное утверждение: если $f \in C(\mathbb{R}^2)$ и

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \text{const}$$

для любого круга $K \subset \mathbb{R}^2$ фиксированного радиуса r , то f является постоянной. Ошибочное доказательство сформулированного утверждения было опубликовано в работе [2].

Первые примеры ненулевых функций с нулевыми интегралами по всем кругам фиксированного радиуса в $\mathbb{R}^2$ были найдены Л. Чакаловым [3]. Он заметил, что

$$\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 1} \sin(\lambda x) dx dy = 2\pi \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda} J_1(\lambda) = 2\pi \sin(\lambda a) \mathbf{I}_1(\lambda),$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν ,

$$\mathbf{I}_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)}{z^\nu}.$$

В частности, если $\mathbf{I}_1(\lambda) = 0$, то функция $f(x, y) = \sin \lambda x$ имеет нулевые интегралы по всем кругам единичного радиуса в $\mathbb{R}^2$. Аналогичные примеры, связанные с нулями функции $\mathbf{I}_{n/2}$, можно построить и для шаровых средних в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$. Отсюда видно, что знание средних функции f по всем шарам одного радиуса недостаточно для однозначного восстановления f . В дальнейшем изучением класса функций $f \in L^{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, имеющих нулевые интегралы по всем шарам фиксированного радиуса в $\mathbb{R}^n$, занимались многие авторы (см. [4]–[9] и библиографию к этим работам). Хорошо известным результатом в этом направлении является следующий аналог знаменитой теоремы Ж. Дельсарта [10] о двух радиусах для гармонических функций.

ТЕОРЕМА 1 ([11], [12]). Пусть $r_1, r_2 \in (0, +\infty)$, $\Lambda_n = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ — последовательность всех положительных нулей функции $J_{n/2}$, занумерованных в порядке возрастания, E_n — множество чисел вида α/β , где $\alpha, \beta \in \Lambda_n$. Тогда:

1) если $r_1/r_2 \notin E_n$, $f \in L^{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\int_{|x-y| \leq r_1} f(x) dx = \int_{|x-y| \leq r_2} f(x) dx = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

то f — нулевая функция;

2) если $r_1/r_2 \in E_n$, то существует ненулевая вещественно аналитическая функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющая соотношениям (1).

В терминах сверток (см. формулу (6) ниже) теорема 1 означает, что оператор

$$\mathcal{P}f = (f * \chi_{r_1}, f * \chi_{r_2}), \quad f \in L^{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n) \quad (2)$$

инъективен тогда и только тогда, когда $r_1/r_2 \notin E_n$ (здесь и далее, χ_r — индикатор шара $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$). В связи с этим возникает проблема о нахождении явной формулы обращения оператора $\mathcal{P}$ при условии $r_1/r_2 \notin E_n$.

Следующий результат К.А. Беренштейна, А. Ижера и Б.А. Тейлора [14], [15] дает частичное решение этой проблемы.

ТЕОРЕМА 2 ([14], [15]). Пусть $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ — пространства распределений и распределений с компактными носителями на $\mathbb{R}^n$ соответственно. Предположим, что число r_1/r_2 плохо приближается элементами E_n , т.е. существуют положительные константы c_1 и c_2 , такие что

$$\left| \frac{r_1}{r_2} - \frac{\alpha}{\beta} \right| \geq \frac{c_1}{(1 + \beta)^{c_2}}$$

для всех положительных нулей α и β функции $J_{n/2}$. Тогда можно построить явно распределения $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ с носителями $\text{supp } \nu_1 \subset \overline{B}_{r_2}$, $\text{supp } \nu_2 \subset \overline{B}_{r_1}$, такие что

$$f = \nu_1 * (f * \chi_{r_1}) + \nu_2 * (f * \chi_{r_2})$$

для любого распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Отметим, что дополнение A_n к множеству положительных чисел, плохо приближаемых элементами E_n , имеет нулевую лебегову меру и его пересечение с любым интервалом $(a, b) \subset (0, +\infty)$ является множеством мощности континуум [16, лемма 14]. Условие $r_1/r_2 \notin A_n$ в теореме 2 нельзя опустить в силу известных фактов о разрешимости аналитического уравнения Безу (см. [15], [17]). Позже К.А. Беренштейн, Р. Гей и А. Ижер [18] получили следующий локальный результат для случая $r_1/r_2 \notin E_n$.

ТЕОРЕМА 3 ([18]). Пусть $r_1/r_2 \notin E_n$, $R > r_1 + r_2$, $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ — строго возрастающая последовательность положительных чисел с пределом $R/(r_1 + r_2) - 1$, $R_k = (r_1 + r_2)(1 + \varepsilon_k)$, $R_0 = 0$. Тогда для любого $r > 0$, $r \in [R_{k-1}, R_k)$, и любой сферической гармонике Y степени m на единичной сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ можно построить явно две последовательности распределений $\mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{B}_l$ порядка не выше $n + 3$ с компактными носителями в B_{R-r_1} и B_{R-r_2} соответственно, такие что для $l \geq cm^2$ и любой функции $f \in C^\infty(B_R)$ имеет место оценка

$$\left| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r\sigma) Y(\sigma) d\sigma - \langle \mathfrak{A}_l, f * \chi_{r_1} \rangle - \langle \mathfrak{B}_l, f * \chi_{r_2} \rangle \right| \leq \frac{\gamma}{l} (R - r)^{-N} r^{-(n-3)/2} \max_{\substack{|\alpha| \leq N \\ |x| \leq R'_k}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x) \right|, \quad (3)$$

где $N = [(n + 13)/2] + 1$, $R'_k = (2R + R_k)/3$, γ и c — положительные константы, зависящие от r_1 , r_2 , R , n , ε_1 .

Здесь уместно сделать несколько замечаний. Распределения $\mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{B}_l$ имеют весьма сложный вид и строятся как обратные преобразования Фурье-Бесселя к некоторым линейным комбинациям произведений рациональных и бесселевых функций (см. доказательство предложения 8 и теоремы 9 в [18]). Далее, всякая функция $f \in C^\infty(B_R)$ представима в виде сходящегося в пространстве $C^\infty(B_R)$ ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_m} f_{m,j}(r) Y_j^{(m)}(\sigma), \quad x = r\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad (4)$$

где $\{Y_j^{(m)}\}_{j=1}^{d_m}$ — фиксированный ортонормированный базис в пространстве сферических гармоник степени m на $\mathbb{S}^{n-1}$,

$$f_{m,j}(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r\sigma) \overline{Y_j^{(m)}(\sigma)} d\sigma$$

(см., например, [19, гл. 1, § 2, предложение 2.7], [20, § 1]). Поэтому оценка (3) при $l \rightarrow \infty$ и разложение (4) влекут восстановление функции $f \in C^\infty(B_R)$ по ее шаровым средним $f * \chi_{r_1}$ и $f * \chi_{r_2}$ в шаре B_R . Переход к классу $L^{1,\text{loc}}(B_R)$ можно осуществить с помощью сглаживания f свертками вида $f * \varphi_\varepsilon$, где φ_ε — "шапочка" в $\mathbb{R}^n$ (см. [18, п. 3]). С учетом сделанных замечаний, теорему 3 при $R = \infty$ можно рассматривать как решение сформулированной выше проблемы. Однако, приведенная конструкция является весьма громоздкой и трудна для восприятия. Поэтому представляет интерес нахождение более простых формул обращения для оператора (2). Целью данной работы является решение этой задачи.

2. Формулировка основного результата

Далее, как обычно, $\mathbb{C}^n$ — n -мерное комплексное пространство с эрмитовым скалярным произведением

$$(\zeta, \varsigma) = \sum_{j=1}^n \zeta_j \bar{\varsigma}_j, \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n), \quad \varsigma = (\varsigma_1, \dots, \varsigma_n).$$

Преобразованием Фурье-Лапласа распределения $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ является целая функция

$$\widehat{T}(\zeta) = \langle T(x), e^{-i(\zeta, x)} \rangle, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

При этом $\widehat{T}$ растет на $\mathbb{R}^n$ не быстрее полинома и

$$\langle \widehat{T}, \psi \rangle = \langle T, \widehat{\psi} \rangle, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (5)$$

где $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — пространство Шварца быстро убывающих функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (см. [21, гл. 7]).

Если $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и хотя бы одно из этих распределений имеет компактный носитель, то их свертка $T_1 * T_2$ является распределением в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, действующим по правилу

$$\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle = \langle T_2(y), \langle T_1(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad (6)$$

где $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$. Для $T_1, T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула Бореля

$$\widehat{T_1 * T_2} = \widehat{T_1} \widehat{T_2}. \quad (7)$$

Пусть $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$ — пространство радиальных (инвариантных относительно вращений пространства $\mathbb{R}^n$) распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$. Простейшим примером распределения из класса $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$ является дельта-функция Дирака δ с носителем в нуле. Сферическое преобразование распределения $T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\widetilde{T}(z) = \langle T, \varphi_z \rangle, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (8)$$

где φ_z — сферическая функция в $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\varphi_z(x) = 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(z|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(см. [22, гл. 4]). Функция φ_z однозначно определяется следующими условиями:

- 1) φ_z радиальная и $\varphi_z(0) = 1$;
- 2) φ_z удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta(\varphi_z) + z^2 \varphi_z = 0. \quad (9)$$

Отметим, что $\widetilde{T}$ — четная целая функция экспоненциального типа и преобразование Фурье $\widehat{T}$ выражается через $\widetilde{T}$ по формуле

$$\widehat{T}(\zeta) = \widetilde{T}(\sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2}), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n. \quad (10)$$

Множество всех нулей функции $\widetilde{T}$, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ и не принадлежащих отрицательной части мнимой оси, обозначим $\mathcal{Z}_+(\widetilde{T})$.

Для $T = \chi_r$ имеем (см. [9, часть 2, гл. 3, формула (3.90)])

$$\widetilde{\chi}_r(z) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n \mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(rz). \quad (11)$$

Отсюда и из формулы

$$\mathbf{I}'_\nu(z) = -z \mathbf{I}_{\nu+1}(z) \quad (12)$$

(см. [23, гл. 7, п. 7.2.8, формула (51)]) находим

$$\widetilde{\chi}'_r(z) = -(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^{n+2} z \mathbf{I}_{\frac{n}{2}+1}(rz). \quad (13)$$

Используя хорошо известные свойства нулей функций Бесселя (см., например, [23, гл. 7, п. 7.9]), можно получить соответствующую информацию о множестве $\mathcal{Z}_+(\tilde{\chi}_r)$. В частности, все нули $\tilde{\chi}_r$ являются простыми, принадлежат $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и

$$\mathcal{Z}_+(\tilde{\chi}_r) = \left\{ \frac{\lambda_1}{r}, \frac{\lambda_2}{r}, \dots \right\}. \quad (14)$$

Кроме того, поскольку функции $J_{\frac{n}{2}-1}$ и $J_{\frac{n}{2}}$ не имеют общих нулей на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, то корректно определена функция

$$\chi_r^\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} - 1 \right) \chi_r(x), \quad \lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\chi}_r).$$

Пусть

$$p_r(z) = \prod_{j=1}^m \left(z - \left(\frac{\lambda_j}{r} \right)^2 \right), \quad m = \left[\frac{n+7}{4} \right], \quad (15)$$

$$\xi_r = p_r(\Delta) \chi_r. \quad (16)$$

Тогда в силу формулы

$$\widetilde{p(\Delta)T}(z) = p(-z^2) \tilde{T}(z) \quad (p - \text{алгебраический многочлен}), \quad (17)$$

имеем

$$\tilde{\xi}_r(z) = p_r(-z^2) \tilde{\chi}_r(z), \quad (18)$$

$$\mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_r) = \left\{ \frac{\lambda_1}{r}, \frac{\lambda_2}{r}, \dots \right\} \cup \left\{ \frac{i\lambda_1}{r}, \frac{i\lambda_2}{r}, \dots, \frac{i\lambda_m}{r} \right\}, \quad (19)$$

причем все нули $\tilde{\xi}_r$ являются простыми. Кроме того,

$$\mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_{r_1}) \cap \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_{r_2}) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} \notin E_n. \quad (20)$$

Для $\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_r)$ положим

$$\xi_r^\lambda = p_r(\Delta) \chi_r^\lambda, \quad (21)$$

если $\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\chi}_r)$, и

$$\xi_r^\lambda = q_{r,\lambda}(\Delta) \chi_r, \quad (22)$$

если $p_r(-\lambda^2) = 0$, где

$$q_{r,\lambda}(z) = -\frac{p_r(z)}{z + \lambda^2}. \quad (23)$$

Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\frac{r_1}{r_2} \notin E_n$, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} f = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_{r_1})} \sum_{\mu \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_{r_2})} \frac{4\lambda\mu}{(\lambda^2 - \mu^2) \tilde{\xi}_{r_1}'(\lambda) \tilde{\xi}_{r_2}'(\mu)} & \left(p_{r_2}(\Delta) ((f * \chi_{r_2}) * \xi_{r_1}^\lambda) - \right. \\ & \left. - p_{r_1}(\Delta) ((f * \chi_{r_1}) * \xi_{r_2}^\mu) \right), \end{aligned} \quad (24)$$

где ряд (24) сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Равенство (24) восстанавливает распределение f по известным сверткам $f * \chi_{r_1}$ и $f * \chi_{r_2}$ (см. (15), (18), (19), (21)–(23)). Таким образом, теорема 4 дает решение сформулированной выше задачи. Одномерный аналог формулы (24) получен авторами ранее в работе [24]. Относительно других результатов, связанных с обращением оператора сферического среднего, см. [25]–[34].

3. Вспомогательные утверждения

Приведем сначала свойства функций $\mathbf{I}_\nu$, которые потребуются в дальнейшем.

ЛЕММА 1. 1) При $\nu > -1/2$, $z \in \mathbb{C}$ имеет место неравенство

$$|\mathbf{I}_\nu(z)| \leq \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}. \quad (25)$$

2) Если $\nu \in \mathbb{R}$, то

$$|\mathbf{I}_\nu(z)| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|^{\nu+\frac{1}{2}}}, \quad \operatorname{Im} z \rightarrow \infty. \quad (26)$$

3) Пусть $\nu > -1$, $\{\lambda_{\nu,j}\}_{j=1}^\infty$ — последовательность всех положительных нулей функции $\mathbf{I}_\nu$, занумерованных в порядке возрастания. Тогда

$$\lambda_{\nu,j} = \pi \left(j + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right) + O\left(\frac{1}{j}\right), \quad j \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Кроме того,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\lambda_{\nu,j})^{\nu+\frac{3}{2}} |\mathbf{I}_{\nu+1}(\lambda_{\nu,j})| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из интегрального представления Пуассона [23, гл. 7, п. 7.12, формула (8)] имеем

$$\mathbf{I}_\nu(z) = \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^1 \cos(uz) (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} du.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} |\mathbf{I}_\nu(z)| &\leq \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^1 e^{u|\operatorname{Im} z|} (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} du \leq \\ &\leq \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \frac{1}{2} \mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \nu + \frac{1}{2}\right) e^{|\operatorname{Im} z|} = \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

2) Из асимптотического разложения бesselевых функций [23, гл. 7, п. 7.13.1, формула (3)] следует равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\nu(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{-\nu-\frac{1}{2}} \left(\cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ &\left. + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty, \quad -\pi < \arg z < \pi. \end{aligned} \quad (29)$$

Учитывая, что

$$|\cos w| \sim \frac{e^{|\operatorname{Im} w|}}{2}, \quad \operatorname{Im} w \rightarrow \infty,$$

из (29) получаем (26).

3) Асимптотика (27) для нулей $\mathbf{I}_\nu$ хорошо известна (см., например, [8, гл. 7, формула (7.9)]). Тогда

$$\cos\left(\lambda_{\nu,j} - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi j - \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{j}\right)\right) = O\left(\frac{1}{j}\right), \quad j \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \sin \left(\lambda_{\nu, j} - \frac{\pi \nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| = 1.$$

Используя это соотношение и равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\nu+1}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{-\nu-\frac{3}{2}} \left(\sin \left(z - \frac{\pi \nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + O \left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|} \right) \right), \quad z \rightarrow \infty, \quad -\pi < \arg z < \pi \end{aligned}$$

(см. (29)), приходим к (28). $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого $r > 0$

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_r)} \frac{1}{|\tilde{\xi}_r'(\lambda)|} < +\infty. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (18) и (13), находим

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_r'(\lambda) &= p_r(-\lambda^2) \tilde{\chi}_r'(\lambda) - 2\lambda p_r'(-\lambda^2) \tilde{\chi}_r(\lambda) = \\ &= -(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^{n+2} \lambda p_r(-\lambda^2) \mathbf{I}_{\frac{n}{2}+1}(r\lambda) - 2\lambda p_r'(-\lambda^2) \tilde{\chi}_r(\lambda). \end{aligned}$$

Теперь из (14) и (19) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_r)} \frac{1}{|\tilde{\xi}_r'(\lambda)|} &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{|\tilde{\xi}_r'(i\lambda_j/r)|} + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^{n+1}} \times \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j |p_r(-\lambda_j^2/r^2)| |\mathbf{I}_{\frac{n}{2}+1}(\lambda_j)|}. \end{aligned}$$

Этот ряд сравним со сходящимся рядом

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2m-\frac{n+1}{2}}}$$

(см. (15), (27) и (28)). Отсюда получаем требуемое утверждение. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — четная целая функция и $g(\lambda) = 0$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\left| \frac{\lambda g(z)}{z^2 - \lambda^2} \right| \leq \max_{|\zeta - z| \leq 2} |g(\zeta)|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (31)$$

где при $z = \pm\lambda$ левая часть в (31) доопределена по непрерывности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\left| \frac{2\lambda g(z)}{z^2 - \lambda^2} \right| = \left| \frac{g(z)}{z - \lambda} - \frac{g(z)}{z + \lambda} \right| \leq \left| \frac{g(z)}{z - \lambda} \right| + \left| \frac{g(z)}{z + \lambda} \right|. \quad (32)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (32).

Если $|z - \lambda| > 1$, то

$$\left| \frac{g(z)}{z - \lambda} \right| \leq |g(z)| \leq \max_{|\zeta - z| \leq 2} |g(\zeta)|. \quad (33)$$

Пусть $|z - \lambda| \leq 1$. Тогда применяя принцип максимума модуля к целой функции $\frac{g(\zeta)}{\zeta - \lambda}$, получаем

$$\left| \frac{g(z)}{z - \lambda} \right| \leq \max_{|\zeta - \lambda| \leq 1} \left| \frac{g(\zeta)}{\zeta - \lambda} \right| = \max_{|\zeta - \lambda| = 1} |g(\zeta)|.$$

Учитывая, что окружность $|\zeta - \lambda| = 1$ содержится в круге $|\zeta - z| \leq 2$, приходим к оценке

$$\left| \frac{g(z)}{z - \lambda} \right| \leq \max_{|\zeta - z| \leq 2} |g(\zeta)|, \quad (34)$$

которая справедлива для всех $z \in \mathbb{C}$ (см. (33)).

Аналогично,

$$\left| \frac{g(z)}{z + \lambda} \right| \leq \max_{|\zeta - z| \leq 2} |g(\zeta)|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (35)$$

поскольку $g(-\lambda) = 0$. Из (34), (35) и (32) следует требуемое утверждение. $\square$

ЛЕММА 3. Функция χ_r^λ удовлетворяет уравнению

$$\Delta(\chi_r^\lambda) + \lambda^2 \chi_r^\lambda = -\chi_r, \quad \lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\chi}_r). \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \Delta(\chi_r^\lambda) + \lambda^2 \chi_r^\lambda, \varphi \rangle &= \langle \chi_r^\lambda, (\Delta + \lambda^2) \varphi \rangle = \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \int_{|x| \leq r} \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} - 1 \right) \Delta \varphi(x) dx + \\ &+ \int_{|x| \leq r} \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} - 1 \right) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Применим к первому интегралу формулу Грина

$$\int_G (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial G} \left(v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma$$

(см., например, [35, гл. 5, § 21, п. 2]). Тогда

$$\begin{aligned} \langle \Delta(\chi_r^\lambda) + \lambda^2 \chi_r^\lambda, \varphi \rangle &= \frac{1}{\lambda^2} \int_{|x| \leq r} \Delta \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} - 1 \right) \varphi(x) dx - \\ &- \frac{1}{\lambda^2} \int_{|x|=r} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} - 1 \right) d\sigma(x) + \\ &+ \int_{|x| \leq r} \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} - 1 \right) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из (9) получаем

$$\langle \Delta(\chi_r^\lambda) + \lambda^2 \chi_r^\lambda, \varphi \rangle = -\frac{1}{\lambda^2} \int_{|x|=r} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \right) d\sigma(x) - \langle \chi_r, \varphi \rangle.$$

Теперь используя формулу

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(f(|x|)) = f'(|x|), \quad \mathbf{n} = \frac{x}{|x|}$$

и равенство (12), находим

$$\begin{aligned} \langle \Delta(\chi_r^\lambda) + \lambda^2 \chi_r^\lambda, \varphi \rangle &= \int_{|x|=r} \varphi(x) |x| \frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} d\sigma(x) - \langle \chi_r, \varphi \rangle = \\ &= r \frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\lambda r)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \int_{|x|=r} \varphi(x) d\sigma(x) - \langle \chi_r, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что $\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\lambda r) = 0$ в силу соотношения (11), поскольку $\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\chi}_r)$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из (17) и инъективности сферического преобразования следует, что для распределений $U, T \in \mathcal{E}'_q(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{T})$

$$\Delta U + \lambda^2 U = -T \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{U}(z) = \frac{\tilde{T}(z)}{z^2 - \lambda^2}. \quad (37)$$

Поэтому соотношение (36) влечет равенство

$$\widetilde{\chi_r^\lambda}(z) = \frac{\tilde{\chi}_r(z)}{z^2 - \lambda^2}, \quad \lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\chi}_r). \quad (38)$$

ЛЕММА 4. Пусть $\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_r)$. Тогда

$$\tilde{\xi}_r^\lambda(z) = \frac{\tilde{\xi}_r(z)}{z^2 - \lambda^2}. \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (39) легко следует из (17) и замечания 3. Действительно, если $\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\chi}_r)$, то в силу (21), (17), (38) и (18) имеем

$$\tilde{\xi}_r^\lambda(z) = p_r(-z^2) \widetilde{\chi_r^\lambda}(z) = \frac{p_r(-z^2) \tilde{\chi}_r(z)}{z^2 - \lambda^2} = \frac{\tilde{\xi}_r(z)}{z^2 - \lambda^2}.$$

Аналогично, если $p_r(-\lambda^2) = 0$, то

$$\tilde{\xi}_r^\lambda(z) = q_{r,\lambda}(-z^2) \tilde{\chi}_r(z) = \frac{p_r(-z^2) \tilde{\chi}_r(z)}{z^2 - \lambda^2} = \frac{\tilde{\xi}_r(z)}{z^2 - \lambda^2}$$

(см. (22), (23), (17) и (18)). $\square$

ЛЕММА 5. Пусть

$$\eta_r^\lambda = \frac{2\lambda}{\tilde{\xi}_r'(\lambda)} \xi_r^\lambda, \quad \lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_r). \quad (40)$$

Тогда

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_r)} \eta_r^\lambda = \delta, \quad (41)$$

где ряд (41) сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ определим функцию $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ равенством

$$\psi(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{i(x,y)} dx, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда (см. (5), (10) и (39))

$$\begin{aligned} \langle \eta_r^\lambda, \varphi \rangle &= \langle \eta_r^\lambda, \widehat{\psi} \rangle = \langle \widehat{\eta_r^\lambda}, \psi \rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \widetilde{\eta_r^\lambda}(|x|) dx = \frac{2}{\widetilde{\xi_r'}(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \frac{\lambda \widetilde{\xi_r}(|x|)}{|x|^2 - \lambda^2} dx. \end{aligned}$$

Используя это представление и лемму 2, получаем

$$|\langle \eta_r^\lambda, \varphi \rangle| \leq \frac{2}{|\widetilde{\xi_r'}(\lambda)|} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} |\widetilde{\xi_r}(\zeta)| dx.$$

Из (18), (11) и (25) имеем

$$\begin{aligned} \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} |\widetilde{\xi_r}(\zeta)| &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} |p_r(-\zeta^2)| |\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(r\zeta)| \leq \\ &\leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} |p_r(-\zeta^2)| \cdot e^{r|\operatorname{Im}\zeta|} \leq \\ &\leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n e^{2r}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} |p_r(-\zeta^2)|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$|\langle \eta_r^\lambda, \varphi \rangle| \leq \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} r^n e^{2r}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1) |\widetilde{\xi_r'}(\lambda)|} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} |p_r(-\zeta^2)| dx. \quad (42)$$

Это неравенство и следствие 1 показывают, что ряд (41) сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ к некоторому распределению f с носителем в $\overline{B_r}$. По лемме 4 для сферического преобразования этого распределения справедливо равенство

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi_r})} \widetilde{\eta_r^\lambda}(z) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi_r})} \frac{2\lambda}{\widetilde{\xi_r'}(\lambda)} \frac{\widetilde{\xi_r}(z)}{z^2 - \lambda^2}. \quad (43)$$

При этом, если $\mu \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi_r})$, то

$$\widetilde{f}(\mu) = \frac{2\mu}{\widetilde{\xi_r'}(\mu)} \lim_{z \rightarrow \mu} \frac{\widetilde{\xi_r}(z)}{z^2 - \mu^2} = 1. \quad (44)$$

Далее, поскольку $\widetilde{f}(z) - 1$ и $\widetilde{\xi_r}(z)$ являются четными целыми функциями экспоненциального типа, то в силу (44) и простоты нулей $\widetilde{\xi_r}$ их отношение

$$h(z) = \frac{\widetilde{f}(z) - 1}{\widetilde{\xi_r}(z)}$$

является целой функцией не выше первого порядка (см. [36, гл. 1, § 9, следствие из теоремы 12]). При $\operatorname{Im} z = \pm \operatorname{Re} z$, $z \neq 0$ она оценивается следующим образом:

$$|h(z)| \leq \frac{|\widetilde{f}(z)|}{|\widetilde{\xi_r}(z)|} + \frac{1}{|\widetilde{\xi_r}(z)|} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_r)} \frac{1}{\tilde{\xi}_r'(\lambda)} \left(\frac{1}{z - \lambda} - \frac{1}{z + \lambda} \right) \right| + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n |p_r(-z^2) \mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(rz)|} \leq \\
&\leq \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_r)} \frac{1}{|\tilde{\xi}_r'(\lambda)|} \left(\frac{1}{|z - \lambda|} + \frac{1}{|z + \lambda|} \right) + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n |p_r(-z^2) \mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(rz)|} \leq \\
&\leq \frac{2\sqrt{2}}{|z|} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_r)} \frac{1}{|\tilde{\xi}_r'(\lambda)|} + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n |p_r(-z^2) \mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(rz)|}.
\end{aligned}$$

Из этой оценки и соотношений (30), (26) видно, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \text{Im } z = \pm \text{Re } z}} h(z) = 0. \quad (45)$$

Тогда по принципу Фрагмена-Линделёфа функция h ограничена на $\mathbb{C}$. Теперь из (45) и теоремы Лиувилля следует, что $h = 0$. Отсюда $f = 1$, т.е. $f = \delta$. Таким образом, лемма 5 доказана. $\square$

ЛЕММА 6. Пусть $\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_{r_1})$, $\mu \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_{r_2})$. Тогда

$$(\lambda^2 - \mu^2) \eta_{r_1}^\lambda * \eta_{r_2}^\mu = \frac{4\lambda\mu}{\tilde{\xi}_{r_1}'(\lambda) \tilde{\xi}_{r_2}'(\mu)} \left(\xi_{r_2} * \xi_{r_1}^\lambda - \xi_{r_1} * \xi_{r_2}^\mu \right). \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (39), (37) и (40) имеем

$$(\Delta + \lambda^2) \left(\eta_{r_1}^\lambda \right) = -\frac{2\lambda}{\tilde{\xi}_{r_1}'(\lambda)} \xi_{r_1}, \quad (47)$$

$$(\Delta + \mu^2) \left(\eta_{r_2}^\mu \right) = -\frac{2\mu}{\tilde{\xi}_{r_2}'(\mu)} \xi_{r_2}. \quad (48)$$

Из (47), (40) и перестановочности оператора дифференцирования со сверткой получаем

$$(\Delta + \lambda^2) \left(\eta_{r_1}^\lambda * \eta_{r_2}^\mu \right) = \frac{-4\lambda\mu}{\tilde{\xi}_{r_1}'(\lambda) \tilde{\xi}_{r_2}'(\mu)} \xi_{r_1} * \xi_{r_2}^\mu.$$

Аналогично, из (48) следует, что

$$-(\Delta + \mu^2) \left(\eta_{r_1}^\lambda * \eta_{r_2}^\mu \right) = \frac{4\lambda\mu}{\tilde{\xi}_{r_1}'(\lambda) \tilde{\xi}_{r_2}'(\mu)} \xi_{r_2} * \xi_{r_1}^\lambda.$$

Складывая два последних равенства, приходим к соотношению (46). $\square$

4. Доказательство теоремы 4

Из леммы 5 получаем

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_{r_1})} \eta_{r_1}^\lambda = \delta, \quad \sum_{\mu \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_{r_2})} \eta_{r_2}^\mu = \delta. \quad (49)$$

Докажем, что

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_{r_1})} \sum_{\mu \in \mathcal{Z}_+(\tilde{\xi}_{r_2})} \eta_{r_1}^\lambda * \eta_{r_2}^\mu = \delta, \quad (50)$$

где ряд (50) сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi = \widehat{\psi}$. Для $\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_1})$, $\mu \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_2})$ имеем (см. (7) и доказательство оценки (42))

$$\begin{aligned} |\langle \eta_{r_1}^\lambda * \eta_{r_2}^\mu, \varphi \rangle| &= |\langle \eta_{r_1}^\lambda * \eta_{r_2}^\mu, \widehat{\psi} \rangle| = |\langle \widehat{\eta_{r_1}^\lambda} \widehat{\eta_{r_2}^\mu}, \psi \rangle| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \widetilde{\eta_{r_1}^\lambda}(|x|) \widetilde{\eta_{r_2}^\mu}(|x|) dx \right| = \\ &= \frac{4}{|\widetilde{\xi}_{r_1}'(\lambda) \widetilde{\xi}_{r_2}'(\mu)|} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \frac{\lambda \widetilde{\xi}_{r_1}(|x|)}{|x|^2 - \lambda^2} \frac{\mu \widetilde{\xi}_{r_2}(|x|)}{|x|^2 - \mu^2} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{4\pi^n (r_1 r_2)^n e^{2(r_1 + r_2)}}{|\widetilde{\xi}_{r_1}'(\lambda) \widetilde{\xi}_{r_2}'(\mu)| \left(\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \right)^2} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} |p_{r_1}(-\zeta^2)| \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} |p_{r_2}(-\zeta^2)| dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из (30) следует, что

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_1})} \left(\sum_{\mu \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_2})} |\langle \eta_{r_1}^\lambda * \eta_{r_2}^\mu, \varphi \rangle| \right) < \infty.$$

Значит (см., например, [37, гл. 1, теорема 1.24]), ряд в (50) сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. При этом (см. (6), (49))

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_1})} \sum_{\mu \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_2})} \langle \eta_{r_1}^\lambda * \eta_{r_2}^\mu, \varphi \rangle = \\ &= \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_1})} \left(\sum_{\mu \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_2})} \langle \eta_{r_2}^\mu(y), \langle \eta_{r_1}^\lambda(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle \right) = \\ &= \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_1})} \langle \eta_{r_1}^\lambda(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0), \end{aligned}$$

что доказывает (50).

Сворачивая обе части (50) с f и учитывая раздельную непрерывность свертывания $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ с $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, (46) и (20), находим

$$f = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_1})} \sum_{\mu \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_2})} \frac{4\lambda\mu}{(\lambda^2 - \mu^2) \widetilde{\xi}_{r_1}'(\lambda) \widetilde{\xi}_{r_2}'(\mu)} (f * (\xi_{r_2} * \xi_{r_1}^\lambda) - f * (\xi_{r_1} * \xi_{r_2}^\mu)). \quad (51)$$

Наконец, используя (51), (16) и коммутативность оператора свертки с оператором дифференцирования, приходим к формуле (24). Таким образом, теорема 4 доказана.

5. Заключение

Доказательство теоремы 4 показывает, что ключевую роль в формуле (24) играет разложение дельта-функции по распределениям η_r^λ , $\lambda \in \mathcal{Z}_+(\xi_r)$ (см. лемму 5). Эта система распределений является биортогональной к системе сферических функций φ_μ , $\mu \in \mathcal{Z}_+(\xi_r)$, т.е.

$$\langle \eta_r^\lambda, \varphi_\mu \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu \neq \lambda, \\ 1, & \text{если } \mu = \lambda \end{cases}$$

(см. (8), (39) и (40)). С помощью подобных разложений можно получить формулы обращения и для других операторов свертки с радиальными распределениями. В частности, методы данной работы применимы для операторов $f \rightarrow (f * \sigma_{r_1}, f * \sigma_{r_2})$ и $f \rightarrow (f * \sigma_r, f * \chi_r)$, где σ_r — поверхностная дельта-функция, сосредоточенная на сфере радиуса r с центром в нуле из $\mathbb{R}^n$. Отметим наконец, что формула (24) существенно упрощает известные ранее процедуры восстановления функции f по заданным шаровым средним $f * \chi_{r_1}$ и $f * \chi_{r_2}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pompéiu D. Sur certains systèmes d'équations linéaires et sur une propriété intégrale de fonctions de plusieurs variables // C. R. Acad. Sci. Paris. 1929. Vol. 188. P. 1138-1139.
2. Pompéiu D. Sur une propriété intégrale de fonctions de deux variables réelles // Bull. Sci. Acad. Royale Belgique (5). 1929. Vol. 15. P. 265-269, <https://zbmath.org/JFM 55.0139.01>.
3. Chakalov L. Sur un problème de D. Pompeiu // Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.-Math., Livre 1. 1944. Vol. 40. P. 1-14.
4. Беренштейн К. А., Струппа Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направления. 1989. Т. 54. С. 5-111, <https://doi.org/10.1007/978-3-642-58011-6-1>.
5. Zalzman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations. 1992. Vol. 365. P. 185-194, <https://doi.org/10.1007/978-94-011-2436-2-17>.
6. Zalzman L. Supplementary bibliography to “A bibliographic survey of the Pompeiu problem” // Contemp. Math. (Radon Transform and Tomography). 2001. Vol. 278. P. 69-74, <https://doi.org/10.1090/conm/278>.
7. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003, <https://doi.org/10.1007/978-94-010-0023-9>.
8. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. London: Springer, 2009, <https://doi.org/10.1007/978-1-84882-533-8>.
9. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Basel: Birkhäuser, 2013, <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0572-8>.
10. Delsarte J. Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B. 1958. Vol. 246. P. 1358–1360, <https://zbmath.org/0084.09403>.
11. Zalzman L. Analyticity and the Pompeiu problem // Arch. Rat. Anal. Mech. 1972. Vol. 47, N 3. P. 237–254, <https://doi.org/10.1007/BF00250628>.

12. Smith J. D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1972. Vol. 72, N 3. P. 403-416, <https://doi.org/10.1017/S0305004100047241>.
13. Zalzman L. Offbeat integral geometry // Amer. Math. Monthly. 1980. Vol. 87, N 3. P. 161-175, <https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11994985>.
14. Berenstein C. A., Taylor B. A., Yger A. Sur quelques formules explicites de déconvolution // J. Optics (Paris). 1983. Vol. 14, N 2. P. 75-82, <https://doi.org/10.1088/0150-536X/14/2/003>.
15. Berenstein C. A., Yger A. Le problème de la déconvolution // J. Funct. Anal. 1983. Vol. 54, N 2. P. 113-160, [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(83\)90051-4](https://doi.org/10.1016/0022-1236(83)90051-4).
16. Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Мат. сборник. 1995. Т. 186, N 6. С. 15-34, <http://dx.doi.org/10.1070/SM1995v186n06ABEH000043>.
17. Berenstein C. A., Yger A. Analytic Bezout identities // Adv. Appl. Math. 1989. Vol. 10, N 1. P. 51-74, [https://doi.org/10.1016/0196-8858\(89\)90003-1](https://doi.org/10.1016/0196-8858(89)90003-1).
18. Berenstein C. A., Gay R., Yger A. Inversion of the local Pompeiu transform // J. Analyse Math. 1990. Vol. 54, N 1. P. 259-287, <https://doi.org/10.1007/bf02796152>.
19. Helgason S. Geometric Analysis on Symmetric spaces. Rhode Island: Amer. Math. Soc. Providence, 2008, <http://books.google.com/books?vid=ISBN978-1-4704-1266-1>.
20. Волчков В. В., Волчков Вит. В. Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга // Матем. сб. 2008. Т. 199, N 8. С. 29-60, <http://dx.doi.org/10.1070/SM2008v199n08ABEH003957>.
21. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, Т. I. М.: Мир, 1986, <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61497-2>.
22. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987, <http://books.google.com/books?vid=ISBN978-1-4704-1310-1>.
23. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т. II. М.: Наука, 1974, <https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140123-104529738>.
24. Волчкова Н. П., Волчков Вит. В. Проблема деконволюции для индикаторов отрезков // Математические заметки СВФУ. 2019. Т. 26, N 3. С. 1-14, <https://doi.org/10.25587/SVFU.2019.47.12.001>.
25. El Harchaoui M. Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe (Cas de deux boules) // J. Anal. Math. 1995. Vol. 67, N 1. P. 1-37, <https://doi.org/10.1007/BF02787785>.
26. Berkani M., El Harchaoui M., Gay R. Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternique - Cas des deux boules // J. Complex Variables. 2000. Vol. 43, N 1. P. 29-57, <https://doi.org/10.1080/17476930008815300>.
27. Волчков Вит. В., Волчкова Н. П. Обращение локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Докл. РАН. 2001. Т. 379, N 5. С. 587-590, <https://zbmath.org/1041.43005>.
28. Волчков Вит. В., Волчкова Н. П. Теоремы об обращении локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15, N 5. С. 169-197, <https://doi.org/10.1090/S1061-0022-04-00830-1>.

29. Volchkov Vit. V. On functions with given spherical means on symmetric spaces // J. Math. Sci. 2011. Vol. 175, N 4. P. 402-412, <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0354-2>.
30. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Inversion of the local Pompeiu transformation on Riemannian symmetric spaces of rank one // J. Math. Sci. Vol. 2011. 179, N 2. P. 328-343, <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0597-y>.
31. Волчков В.В., Волчков Вит.В. Сферические средние на двухточечно-однородных пространствах и их приложения // Изв. РАН. Сер. матем. 2013. Т. 77, N 2. С. 3-34, <https://doi.org/10.1070/IM2013v077n02ABEH002634>.
32. Rubin B. Reconstruction of functions on the sphere from their integrals over hyperplane sections // Anal. Math. Phys. 2019. Vol. 9, N 4. P. 1627-1664, <https://doi.org/10.1007/s13324-019-00290-1>.
33. Salman Y. Recovering functions defined on the unit sphere by integration on a special family of sub-spheres // Anal. Math. Phys. 2017. Vol. 7, N 2. P. 165-185, <https://doi.org/10.1007/s13324-016-0135-7>.
34. Hielscher R., Quellmalz M. Reconstructing an function on the sphere from its means along vertical slices // Inverse Probl. Imaging. 2016. Vol. 10, N 3. P. 711-739, <https://doi.org/10.3934/ipi.2016018>.
35. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, ISBN 978-5-9221-0310-7.
36. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: URSS, 2022, ISBN 978-5-9710-9633-7.
37. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ, Т. II. М.: Юрайт-Издат, 2013, ISBN 978-5-9710-9916-2742-9.

REFERENCES

1. Pompéiu, D. 1929, "Sur certains systèmes d'équations linéaires et sur une propriété intégrale de fonctions de plusieurs variables", *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 188, pp. 1138-1139.
2. Pompéiu, D. 1929, "Sur une propriété intégrale de fonctions de deux variables réelles", *Bull. Sci. Acad. Royale Belgique (5)*, vol. 15, pp. 265-269, <https://zbmath.org/JFM 55.0139.01>.
3. Chakalov, L. 1944, "Sur un problème de D. Pompeiu", *Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.-Math., Livre 1*, vol. 40, pp. 1-14.
4. Berenstein, C.A. & Struppa, D.C. 1993, "Complex analysis and convolution equations", *Several complex variables. V: Complex analysis in partial differential equations and mathematical physics*, vol. 54, pp. 1-108, <https://doi.org/10.1007/978-3-642-58011-6-1>.
5. Zalzman, L. 1992, "A bibliographic survey of the Pompeiu problem", *Approximation by solutions of partial differential equations*, vol. 365, pp. 185-194, <https://doi.org/10.1007/978-94-011-2436-2-17>.
6. Zalzman, L. 2001, "Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem" ", *Contemp. Math. (Radon Transform and Tomography)*, vol. 278, pp. 69-74, <https://doi.org/10.1090/conm/278>.

7. Volchkov, V.V. 2003, *Integral Geometry and Convolution Equations*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, <https://doi.org/10.1007/978-94-010-0023-9>.
8. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. 2009, *Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group*, London: Springer, <https://doi.org/10.1007/978-1-84882-533-8>.
9. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. 2013, *Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces*, Basel: Birkhäuser, <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0572-8>.
10. Delsarte, J. 1958, "Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, vol. 246, pp. 1358-1360, <https://zbmath.org/0084.09403>.
11. Zalcman, L. 1972, "Analyticity and the Pompeiu problem", *Arch. Rat. Anal. Mech.*, vol. 47, № 3, pp. 237-254, <https://doi.org/10.1007/BF00250628>.
12. Smith, J. D. 1972, "Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ ", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 72, № 3, pp. 403-416, <https://doi.org/10.1017/S0305004100047241>.
13. Zalcman, L. 1980, "Offbeat integral geometry", *Amer. Math. Monthly*, vol. 87, № 3, pp. 161-175, <https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11994985>.
14. Berenstein, C.A., Taylor, B.A. & Yger, A. 1983, "Sur quelques formules explicites de déconvolution", *J. Optics (Paris)*, vol. 14, № 2, pp. 75-82, <https://doi.org/10.1088/0150-536X/14/2/003>.
15. Berenstein, C. A. & Yger, A. 1983, "Le problème de la déconvolution", *J. Funct. Anal.*, vol. 54, № 2, pp. 113-160, [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(83\)90051-4](https://doi.org/10.1016/0022-1236(83)90051-4).
16. Volchkov, V. V. 1995, "A definitive version of the local two-radii theorem", *Sb. Math.*, vol. 186, № 6, pp. 783-802, <http://dx.doi.org/10.1070/SM1995v186n06ABEH000043>.
17. Berenstein, C. A. & Yger, A. 1989, "Analytic Bezout identities", *Adv. Appl. Math.*, vol. 10, № 1, pp. 51-74, [https://doi.org/10.1016/0196-8858\(89\)90003-1](https://doi.org/10.1016/0196-8858(89)90003-1).
18. Berenstein, C.A., Gay, R. & Yger A. 1990, "Inversion of the local Pompeiu transform", *J. Analyse Math.*, vol. 54, № 1, pp. 259-287, <https://doi.org/10.1007/bf02796152>.
19. Helgason, S. 2008, *Geometric Analysis on Symmetric spaces*, Rhode Island: Amer. Math. Soc. Providence, <http://books.google.com/books?vid=ISBN978-1-4704-1266-1>.
20. Volchkov, V.V. & Volchkov, Vit.V. 2008, "Convolution equations in many-dimensional domains and on the Heisenberg reduced group", *Sb. Math.*, vol. 199, № 8, pp. 1139-1168, <http://dx.doi.org/10.1070/SM2008v199n08ABEH003957>.
21. Hörmander, L. 2003, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, vol. I. Springer-Verlag: New York, <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61497-2>.
22. Helgason, S. 1984, *Groups and Geometric Analysis*. Academic Press: New York, <http://books.google.com/books?vid=ISBN978-1-4704-1310-1>.
23. Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. & Tricomi, F.G. 1953, *Higher Transcendental Functions*, vol. II. New York: McGraw-Hill., <https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140123-104529738>.

24. Volchkova, N. P. & Volchkov, Vit. V. 2019, "Deconvolution problem for indicators of segments", *Math. Notes NEFU*, vol. 26, № 3, pp. 3-14, <https://doi.org/10.25587/SVFU.2019.47.12.001>.
25. El Harchaoui, M. 1995, "Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe (Cas de deux boules)", *J. Anal. Math.*, vol. 67, № 1, pp. 1-37, <https://doi.org/10.1007/BF02787785>.
26. Berkani, M., El Harchaoui, M. & Gay, R. 2000, "Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternique - Cas des deux boules", *J. Complex Variables*, vol. 43, № 1, pp. 29-57, <https://doi.org/10.1080/17476930008815300>.
27. Volchkov, Vit. V. & Volchkova, N. P. 2001, "Inversion of the local Pompeiu transform on the quaternion hyperbolic space", *Dokl. Math.*, vol. 64, № 1, pp. 90-93, <https://zbmath.org/1041.43005>.
28. Volchkov, Vit. V. & Volchkova, N. P. 2004, "Inversion theorems for the local Pompeiu transformation in the quaternion hyperbolic space", *St. Petersburg Math. J.*, vol. 15, № 5, pp. 753-771, <https://doi.org/10.1090/S1061-0022-04-00830-1>.
29. Volchkov, Vit. V. 2011, "On functions with given spherical means on symmetric spaces", *J. Math. Sci.*, vol. 175, № 4, pp. 402-412, <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0354-2>.
30. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. 2011, "Inversion of the local Pompeiu transformation on Riemannian symmetric spaces of rank one", *J. Math. Sci.*, vol. 179, № 2, pp. 328-343, <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0597-y>.
31. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. 2013, "Spherical means on two-point homogeneous spaces and applications", *Izv. Math.*, vol. 77, № 2, pp. 223-252, <https://doi.org/10.1070/IM2013v077n02ABEH002634>.
32. Rubin, B. 2019, "Reconstruction of functions on the sphere from their integrals over hyperplane sections", *Anal. Math. Phys.*, vol. 9, № 4, pp. 1627-1664, <https://doi.org/10.1007/s13324-019-00290-1>.
33. Salman, Y. 2017, "Recovering functions defined on the unit sphere by integration on a special family of sub-spheres", *Anal. Math. Phys.*, vol. 7, № 2, pp. 165-185, <https://doi.org/10.1007/s13324-016-0135-7>.
34. Hielscher, R. & Quellmalz, M. 2016, "Reconstructing an function on the sphere from its means along vertical slices", *Inverse Probl. Imaging.*, vol. 10, № 3, pp. 711-739, <https://doi.org/10.3934/ipi.2016018>.
35. Vladimirov, V. S. & Zharinov, V. V. 2008, *Equations of mathematical physics [Uravneniya matematicheskoy fiziki]*. Moskva: FIZMATLIT. ISBN 978-5-9221-0310-7.
36. Levin, B. Ya. 2022, *Distribution of roots of entire functions [Raspredeleniye korney tselikh funktsiy]* Moskva: URSS. ISBN 978-5-9710-9633-7.
37. Ilyin, V. A., Sadovnichiy, V. A. & Sendov, Bl. Kh. 2013, *Mathematical analysis [Matematicheskiy analiz]*, vol. II. Moskva: Yurayt-Izdat. ISBN 978-5-9710-9916-2742-9.

Получено: 04.08.2022

Принято в печать: 14.06.2023