ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 511.524 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-15-37

Об исключительном множестве одной системы линейных уравнений с простыми числами

И.Аллаков, Б.Х.Абраев

Аллаков Исмаил —доктор физико-математических наук, профессор, Термезский государственный университет (г.Термез, Узбекистан).
iallakov@mail.ru
Абраев Бахром Холтураевич — базовый докторант, Термезский государственный университет (г.Термез, Узбекистан).
babrayev@mail.ru

Аннотация

Пусть $X-$ достаточно большое действительное число, b_1, b_2- целые числа с условием $1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$, a_{ij}, $(i = 1, 2;\ j = \overline{1,4})-$ целые положительные числа, $p_1, \ldots, p_4-$ простые числа. Положим $B = \max\{3|a_{ij}|\}, (i = 1,2; j = \overline{1,4})$, $\bar{b} = (b_1, b_2)$, $K = 9\sqrt{2}B^3 |\bar{b}|$, $E_{2,4}(X) = \left\{b_i \mid 1 \le b_i \le X,\ \ b_i \ne a_{i1}p_1 + \cdots + a_{i4}p_4,\ i = 1,2\right\}$. В работе изучено разрешимость системы $b_i = a_{i1}p_1 + \cdots + a_{i4}p_4$, $(i = 1, 2)$, в простых числах $p_1, \ldots, p_4$ и впервые получена степенная оценка для исключительного множества $E_{2,4}(X)$ и оценка снизу для $R(\bar{b})-$ количество решений рассматриваемый системы в простых числах, а именно доказано, что если X - достаточно большое, а $\delta (0 < \delta < 1)$ достаточно малое действительные числа, тогда: существует достаточно большое число A, такое, что при $X > B^A$ справедлива оценка $E_{2,4}(X) < X^{2-\delta}$ и для $R(\bar{b})$ при заданном $\bar{b} = (b_1, b_2)$, $1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$ справедлива оценка $R(\bar{b}) \geqslant K^{2-\delta}(\ln K)^{-4}$, для всех $\bar{b} = (b_1, b_2)$ за исключением не более чем $X^{2-\delta}$ пар из них.

Ключевые слова: уравнение, система линейных уравнений, простые числа, целые коэффициенты, натуральные числа, определитель, критерия разрешимости, множество, мощность множества, оценка, степенная оценка, ряд Дирихле, характер Дирихле, исключительный нуль.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
И. Аллаков, Б. Х. Абраев. Об исключительном множестве одной системы линейных уравнений с простыми числами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 15–37.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 511.524 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-15-37

On the exceptional set of a system of linear equations with prime numbers

I.Allakov, B.Kh.Abrayev

Allakov Ismail — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Termez State University (Termez,Uzbekistan).
e-mail:iallakov@mail.ru
Abrayev Bakhrom Kholturayevich — basic doctoral student (PhD),Termez State University (Termez,Uzbekistan).
e-mail: babrayev@mail.ru

Abstract

Let $X-$ be a sufficiently large real number, b_1, b_2-integers with $1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$, a_{ij},($i = 1, 2$; $j = \overline{1, 4}$)− positive integers, $p_1, \ldots, p_4$−prime numbers.Let $B = \max\{3\,|a_{ij}|\}$, ($i = 1, 2; j = \overline{1, 4}$), $\bar{b} = (b_1, b_2)$, $K = 9\sqrt{2}B^3\,|\bar{b}|$,

$$E_{2,4}(X) = \left\{b_i \;\middle|\; 1 \leq b_i \leq X,\, b_i \neq a_{i1}p_1 + \cdots + a_{i4}p_4,\ i = 1, 2\right\}.$$

The paper studies the solvability of a system of linear equations $b_i = a_{i1}p_1 + \cdots + a_{i4}p_4,\ i = 1, 2$, in primes $p_1, \ldots, p_4$ and for the first time a power estimate for the exceptional set $E_{2,4}(X)$ and a lower estimate for $R(\bar{b})$− the number of solutions of the system under consideration in prime numbers, are obtained, namely, that if X is sufficiently large and $\delta(0 < \delta < 1)$ is sufficiently small real numbers, then: there exists a sufficiently large number A, such that for $X > B^A$ estimate is fair $E_{2,4}(X) < X^{2-\delta}$; and for $R(\bar{b})$ given $\bar{b} = (b_1, b_2)$, $1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$ fair estimate $R(\bar{b}) \geqslant K^{2-\delta}(\ln K)^{-4}$, for all $\bar{b} = (b_1, b_2)$ except for at most $X^{2-\delta}$ pairs of them.

Keywords: equation, system of linear equations, prime numbers, integer coefficients, natural numbers, determinant, solvability criteria, set, cardinality of a set, estimate, power estimate, Dirichlet series, Dirichlet character, exceptional zero.

Bibliography: 20 titles.

For citation:
I.Allakov, B.Kh.Abrayev 2023, "On the exceptional set of a system of linear equations with prime numbers ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 15–37.

1. Введение

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{im}p_m, \ \ (i = \overline{1, s}), \tag{1.1}$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_s-$ натуральные числа, $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}-$ целые коэффициенты, а $p_1, p_2, \ldots, p_m-$ простые числа. Обозначим через $U_{s,m}(X)-$ множество наборов $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$,
$1 \leqslant b_1, b_2, \ldots, b_s \leqslant X$, для которых система (1.1) неразрешима в простых числах, т.е.

$$U_{s,m}(X) = \{\,(b_1, b_2, \ldots, b_s),\ 1 \leqslant b_1, b_2, \ldots, b_s \leqslant X,\ b_i \neq a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{im}p_m\}$$

и пусть $E_{s,m}(X) = cardU_{s,m}(X)$.

Wu Fang [1], изучая разрешимость этой системы при $m \geqslant 2s+1$ и при некоторых дополнительных условиях, получил асимптотическую формулу для числа решений системы (1.1). Ming-Chit Liu и Kai-Tsang [2] исследовали систему (1.1) при $s = 2,\ m = 3$ и доказали степенную оценку

$$E_{2,3}(X) \leqslant X^{2-\varepsilon},$$

где $X-$ достаточно большое действительное число, $\varepsilon-$ абсолютное, эффективно вычисляемое, достаточно малое положительное постоянное число. И. Аллаков в [3] уточнил результаты работы Ming-Chit Liu и Kai-Tsang [2], а затем в [4] обобщил их для системы (1.1) при $s = n,\ m = n+1$.

Из выше изложенного следует, что вопрос исследования системы (1.1), при $s = 2, m = 4$ до сих пор оставался открытым. В настоящей работе рассмотрим, именно, этот случай. Полагая $s = 2, m = 4$ из (1.1), получим:

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3 + a_{i4}p_4, \quad (i = 1, 2). \tag{1.2}$$

Известно, что разрешимость системы (1.1) связанно условиями, так называемые положительной разрешимости и конгруэнтной разрешимости (см.[5]). В нашем случае эти условия выглядят следующим образом:

a) для произвольного простого числа p существуют целые числа $1 \leqslant l_1, l_2, l_3, l_4 \leqslant p-1$ которые удовлетворяют систему линейных сравнений

$$a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + a_{i3}l_3 + a_{i4}l_4 \equiv b_i (\mathrm{mod} p), \quad (i = 1, 2);$$

b) для некоторых положительных вещественных чисел y_1, y_2, y_3, y_4 справедливо равенство: $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 + a_{i4}y_4 = b_i, (i = 1, 2)$.

Пусть $W_{2,4}(X)-$ множество векторов $\bar{b} = (b_1, b_2)$, $1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$ которые удовлетворяют условиям a) и b). В [6] доказано, что для достаточно больших X, справедлива оценка

$$cardW_{2,4}(X) > 1,69954 \cdot X^2 B^{-20}\Big(e^{\gamma_0+10}\ln\ln B + 2,507 \cdot e^{10}(\ln\ln B)^{-1}\Big)^{-1},$$

где $\gamma_0 = 0,5772...-$ постоянная Эйлера.

Из этой оценки следует, что векторы $\bar{b} = (b_1, b_2)$, $1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$, которые удовлетворяют условиям a) и b) достаточно много (см.[7]).

В дальнейшем рассмотрим только те (b_1, b_2), которые удовлетворяют этим двум условиям. В настоящей работе доказано:

Теорема. Если $X-$ достаточно большое, а $\delta (0 < \delta < 1)$ достаточно малое действительные числа, тогда:
a) существует достаточно большое число A, такое, что при $X > B^A$ справедлива оценка

$$E_{2,4}(X) < X^{2-\delta};$$

b) для $R(\bar{b})$ при заданном $\bar{b} = (b_1, b_2), 1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$ справедлива оценка $R(\bar{b}) \geqslant K^{2-\delta}(\ln K)^{-4}$, для всех $\bar{b} = (b_1, b_2)$ за исключением не более чем $X^{2-\delta}$ пар из них.

2. Основные обозначения

Пусть

$$\Delta_{ij} = \det\begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}, \quad \Delta_{ib} = \det\begin{pmatrix} a_{1i} & b_1 \\ a_{2i} & b_2 \end{pmatrix}, 1 \leqslant i, j \leqslant 4.$$

Для того, чтобы избежать тривиальности и вырожденности налагаем на коэффициенты системы (1.2) условия:

$$\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{34} \neq 0 \ \text{ и } \ \gcd(\Delta_{12},\Delta_{13},\Delta_{14},\Delta_{23},\Delta_{24},\Delta_{34}) = 1.$$

Для достаточно малого положительного числа δ, положим

$$X \geqslant B^{\exp(\delta^{-2})}, \quad Q = N^{\delta}, \quad L = NQ^{-\frac{1}{100}} \ \text{ и } \ T = Q^{\frac{4}{\sqrt{\delta}}}, \ N = 18B^3X, \ B \leqslant Q^{\delta}. \tag{2.1}$$

Пусть χ характер Дирихле по модулю $q \leqslant T$ (относительно свойства характеров Дирихле см.[8])), $\Lambda(n)-$ функция Мангольдта, определяемая равенством

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^m, p - \text{простое}, \ m > 0 - \text{целое}; \\ 0, & \text{если } n \neq p^m. \end{cases}$$

Положим

$$\begin{cases} S(y) = \sum\limits_{L\leqslant n\leqslant N} \Lambda(n)e(ny), \ S_{\chi}(y) = \sum\limits_{L\leqslant n\leqslant N} \Lambda(n)\chi(n)e(ny), \\ I(y) = \int\limits_L^N e(xy)dx, \ \tilde{I}(y) = \int\limits_L^N x^{\tilde{\beta}-1}e(xy)dx, \quad I_{\chi}(y) = \int\limits_L^N e(xy) \sum\limits_{|\gamma|\leqslant T}{}' x^{\rho-1}dx, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $e(x) = e^{2\pi ix}$, $\tilde{\beta} > 1 - c(\ln T)^{-1}-$ исключительный нуль функции $L(s,\chi)$, т.е. единственный вещественный нуль $L-$ функции Дирихле, возможно существующий для одного характера $\chi(\text{mod} q), \sum'_{|\gamma|\leqslant T} -$ означает суммированию по всем нулям $\rho = \beta + i\gamma$ (кроме $\tilde{\beta}$) функции $L(s,\chi)$ лежащий внутри области:

$$\frac{1}{2} \leqslant \beta \leqslant 1 - c_1(\ln T)^{-1}, \ |\gamma| \leqslant T. \tag{2.3}$$

(см.[8]). Пусть $\tau = T^{\frac{1}{4}}N^{-1}$. Теперь для любых целых чисел $h_1, \ h_2, \ q$ удовлетворяющие условиям

$$1 \leqslant h_1, h_2, q \leqslant Q \ \text{ и } \ \text{НОД}(h_1, h_2, \ q) = 1, \tag{2.4}$$

положим $\bar{m}\left(h_1,h_2,q\right) = \left\{(x_1,x_2) \in R^2 : \left|x_i - h_iq^{-1}\right| \leqslant \tau q^{-1}, \quad (i=1,2)\right\}$ и

$$M_1 = \cup\bar{m}\left(h_1,h_2,q\right), \ M_2 = [\tau, 1+\tau]^2 \backslash M_1, \tag{2.5}$$

где $\bar{m}(h_1,h_2,q)$ попарно непересекаюшие квадратики и все лежать внутри квадрата $[\tau, 1+\tau]^2$.

Для произвольных вещественных x_1, x_2 и $\bar{b} = (b_1,b_2) \in W_{2,4}(X)$ положим

$$\bar{x}_b = b_1x_1 + b_2x_2 \ \text{ и } \ \bar{x}_j = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 \quad (1 \leqslant j \leqslant 4). \tag{2.6}$$

Пусть

$$I(\bar{b}) = \sum \Lambda(n_1)\Lambda(n_2)\Lambda(n_3)\Lambda(n_4), \tag{2.7}$$

где суммирование ведётся по всем n_j, удовлетворяющие условиям

$$L < n_1, n_2, n_3, n_4 \leqslant N, \quad \sum_{j=1}^{4} a_{ij}n_j = b_i, (i=1,2).$$

В виду (2.2) и (2.5), $I(\bar{b})$ можем представит в виде:

$$I(\bar{b}) = \int\limits_{\tau}^{1+\tau}\int\limits_{\tau}^{1+\tau} e\left(-\bar{x}_b\right)\prod_{j=1}^{4} S(\bar{x}_j)dx_1dx_2 = \left(\iint\limits_{M_1} + \iint\limits_{M_2}\right) e\left(-\bar{x}_b\right)\prod_{j=1}^{4} S(\bar{x}_j)dx_1dx_2 =$$

$$= I_1(\bar{b}) + I_2(\bar{b}). \tag{2.8}$$

3. Большие дуги

Рассмотрим интеграл

$$I_1(\bar{b}) = \iint\limits_{M_1} e(-\overline{x}_b) \prod_{j=1}^{4} S(\overline{x}_j) dx_1 dx_2. \tag{3.1}$$

Для произвольного характера Дирихле $\chi(modq)$ определим

$$C_\chi(m) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant q} \chi(l) e_q(ml) \text{ и } C_q(m) = C_{\chi_0}(m),$$

где $e_q(ml) = e^{2\pi i \frac{ml}{q}}$ и χ_0- главный характер по модулю q. Ясно, что $|C_\chi(m)| \leqslant \varphi(q)$. Для произвольных $(x_1, x_2) \in \overline{m}(h_1, h_2, q)$ можем писать $x_k = \frac{h_k}{q} + \eta_k$ $(k = 1, 2)$. Тогда справедливо неравенство $|\eta_k| < \tau q^{-1}$ $(k = 1, 2)$. По аналогии (2.6) для $j = \overline{1, 4}$ положим

$$\left. \begin{array}{ll} \bar{h}_j = a_{1j} h_1 + a_{2j} h_2 & \bar{h}_b = b_1 h_1 + b_2 h_2 \\ \bar{\eta}_j = a_{1j} \eta_1 + a_{2j} \eta_2 & \bar{\eta}_b = b_1 \eta_1 + b_2 \eta_2 \end{array} \right\}.$$

Тогда $\overline{x}_j = \frac{\bar{h}_j}{q} + \overline{\eta}_j$, $j = \overline{1, 4}$ и $\overline{x}_b = \frac{\bar{h}_b}{q} + \overline{\eta}_b$. Согласно свойству ортогональности характеров [9] и обозначению (2.2) имеем

$$S(\bar{x}_j) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(\bmod q)} C_{\bar{\chi}}(\bar{h}_j) S_\chi(\bar{\eta}_j) + O(\ln^2 N). \tag{3.2}$$

Обозначим $G_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) = \sum\limits_{\chi(\bmod q)} C_{\bar{\chi}}(\bar{h}_j) I_\chi(\bar{\eta}_j), 1 \leqslant j \leqslant 4$ и

$$H_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right) = C_q(\bar{h}_j) I(\bar{\eta}_j) - \delta_q C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\bar{h}_j) \tilde{I}(\bar{\eta}_j) - G_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right), \tag{3.3}$$

где $\tilde{r}$ модул исключительного характера $\tilde{\chi}$ и

$$\delta_q = \begin{cases} 1, & \text{если } q \text{ делится на } \tilde{r}, \\ 0, & \text{если } q \text{ не делится на } \tilde{r}. \end{cases}$$

Для упрощения интеграла $I_1(\bar{b})$ воспользуемся леммами 3.4.1-3.4.3 работы [10]. Согласно теоремы 3.4.1 работы [10] для любого действительного y и произвольного $\chi(modq)$ с $q \leq T$, имеем

$$S_\chi(y) = \delta_{\chi_0} I(y) - \delta_q \widetilde{I}(y) - I_\chi(y) + O((1 + |y|N) N T^{-1} \ln^2 N) \tag{3.4}$$

Поскольку

$$\left|\overline{\eta}_j\right| N = |(a_{1j}\eta_1 + a_{2j}\eta_2)| N < \frac{2B}{3} \tau q^{-1} N = \frac{2B}{3} T^{\frac{1}{4}} q^{-1},$$

то используя (3.4) из (3.2) получим

$$S(\overline{x}_j) = \frac{1}{\varphi(q)} \left\{ H_j(\overline{h}, q, \overline{\eta}) + O\left(\varphi(q) T^{-\frac{3}{4}} B N \ln^2 N\right)\right\} = \frac{1}{\varphi(q)} \{H_j + R\}. \tag{3.5}$$

Отсюда следует, что для произвольных $(x_1, x_2) \in \overline{m}(h_1, h_2, q)$ справедливо равенство

$$\prod_{j=1}^{4} S(\bar{x}_j) = \frac{1}{\varphi^4(q)} \prod_{j=1}^{4} H_j(\overline{h}, q, \overline{\eta}) + O\left(\frac{\varphi^3(q) N^4 B \ln^2 N}{T^{\frac{3}{4}}}\right). \tag{3.6}$$

Остаток в (3.6) получается как сумма 15 членов в каждом которого участвует качество множителя остаток R из равенство (3.5). При этом доминирующим членом будет $H_1H_2H_3R$, так как $|H_j| \le \varphi^2(q)N,\ j=\overline{1,4}$ то отсюда следует, что $H_1H_2H_3R = O(\frac{\varphi^3(q)N^4B\ln^2 N}{T^{3/4}})$.
Пусть $\sum_h'$ – означает суммированию по всем h_1, h_2 удовлетворяющие условию (2.4). Тогда согласно (2.6), (2.8), (3.1) и (3.6) имеем

$$I_1(\bar b) = \sum_{q\leqslant Q} \frac{1}{\varphi^4(q)} \sum_h{}' e_q(-\bar h_b) \iint\limits_{\left[-\frac{\tau}{q},\frac{\tau}{q}\right]^2} e(-\bar\eta_b) \prod_{j=1}^4 H_j(\bar h, q, \bar\eta) d\eta_1 d\eta_2 + O\left(\frac{Q^4N^2B\ln^2 N}{T^{\frac14}}\right). \qquad (3.7)$$

Следущим шагом является замена двойного интеграла в (3.7) по $\left[-\frac{\tau}{q},\frac{\tau}{q}\right]^2$ интегралом по всей плоскости R^2. Пусть $\Gamma_1 = \left[-\frac12,\frac12\right]^2 \backslash \left[-\frac{\tau}{q},\frac{\tau}{q}\right]^2$ и $\Gamma_2 = R^2 \backslash \left[-\frac12,\frac12\right]^2$.

4. Расширение границы интеграла от квадрата до всей плоскости

На правой части равенства (3.3) обозначим:

$$F_1^{(k)} = C_q(\bar h_j) I(\bar\eta_j), \quad F_2^{(k)} = \delta_q C_{\chi\chi_0}(\bar h_j)\tilde I(\bar\eta_j), \quad F_3^{(k)} = G_j\left(\bar h, q, \bar\eta\right), \quad (k=1,2,3,4)$$

тогда получим

$$\prod_{j=1}^4 H_j\left(\bar h, q, \bar\eta\right) = \left(F_1^{(1)} - F_2^{(1)} - F_3^{(1)}\right)\left(F_1^{(2)} - F_2^{(2)} - F_3^{(2)}\right) \times \qquad (4.1)$$

$$\times \left(F_1^{(3)} - F_2^{(3)} - F_3^{(3)}\right)\left(F_1^{(4)} - F_2^{(4)} - F_3^{(4)}\right).$$

Заметим , что при раскрытие скобок правой части равенства (4.1) появляется 81 членов вида $F = F_1F_2F_3F_4$, где F_j равен $F_1^{(k)}$ или $F_2^{(k)}$ или $F_3^{(k)}$, $k=1,2,3,4$. Далее, рассуждая таким же образом, как в доказательство оценки (4.13) и (4.14) работы [10] (см. стр.88 и 89 [10], а также параграф 6 работы [2]) получим оценку

$$\iint\limits_{(\Gamma_1)} F\ e\left(-\bar\eta_b\right) d\eta_1 d\eta_2 \ll N\ Q^{-4}, \qquad (4.2)$$

справедливую для всех пар $\bar b = (b_1, b_2),\ \ 1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$, за исключением не более чем $E_{2,4}^{(1)}(X) < X^2Q^{-1}$ пар из них. Также

$$\iint\limits_{(\Gamma_2)} F\ e\left(-\bar\eta_b\right) d\eta_1 d\eta_2 \ll N\ Q^{-4} \qquad (4.3)$$

для всех $\bar b = (b_1, b_2),\ \ 1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$. Используя (4.2),(4.3) из (3.7) находим

$$I_1(\bar b) = \sum_{q\leqslant Q} \frac{1}{\varphi^4(q)} \sum_{\bar h} e_q(-\bar h_b) \iint\limits_{R^2} e(-\bar\eta_b) \prod_{j=1}^4 H_j(\bar h, q, \bar\eta) d\eta_1 d\eta_2 + O(N^2Q^{-1/3}) \qquad (4.4)$$

за исключение $E_{2,4}^{(1)}(X) < X^2Q^{-1}$ пар из них $W(X)$.

5. Сингулярный ряд и сингулярный интеграл задачи

Для произвольного целого $q \geqslant 1$ и произвольного простого числа p обозначим

$$A(q) = \frac{1}{\varphi^4(q)} \sum_{\bar{h}}{}' e(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^{4} C_q(\bar{h}_j),$$

$$s(p) = 1 + A(p). \tag{5.1}$$

Для любого целого $q \geqslant 1$ через $\sum\limits_{(q)} 1$ обозначим суммирование по всем l_1, l_2, l_3, l_4, удовлетворяющим условиям $1 \leqslant l_j \leqslant q,\ (l_j, q) = 1,\ \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant 4} a_{ij} l_j \equiv b_i (mod q),\ i = 1, 2$. Положим $N(q) = \sum\limits_{(q)} 1$. В этих обозначениях справедлива следующая лемма.

Лемма 5.1. a) $A(q)$ и $N(q)$– мультипликативная функция,
b) для произвольного целого $k \geqslant 2$ справедливо равенство $A(p^k) = 0$,
c) для любого натурального $k \in N$ справедливо $N(p^k) = p^{k-1} N(p)$,
d) $s(p) = p^3 \varphi(p)^{-4} N(p)$ и, следовательно, $s(p) > 0$, для всех p ,
e) для простого p и натурального q справедливо $q^3 \varphi(q)^{-4} N(q) = \prod\limits_{p \backslash q} s(p)$.

Эта есть лемма 5.1 работы [11]. Мы хотим установит сходимость $\prod\limits_{p} s(p)$ и $\sum\limits_{(q)} A(q)$. Чтобы достичь этого мы вычеркиваем из рассмотрения те пары (b_1, b_2) в $[1, X]^2$ такие что $\Delta_{1b}\Delta_{2b}\Delta_{3b}\Delta_{4b} = 0$. Ясно, что существуют не более чем $4X$ таких пар и ввиду $4X < X^{2-\delta}$ эта допустимо. Простые числа разбиваем на два множества следующем образом:
$P_B = \{p : p\,|\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\ \Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{34}\Delta_{1b}\Delta_{2b}\Delta_{3b}\ \Delta_{4b}\}$, $P_D = \{p : p \notin P_B\}$.
Тогда справедлива следующее утверждение.

Лемма 5.2. Для $b = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$ с условием $\Delta_{1b}\Delta_{2b}\Delta_{3b}\Delta_{4b} \neq 0$ имеем:
a) $-\frac{18}{p} \leqslant A(p) \leqslant \frac{14}{p}$ для всех простых p и если $p \in P_D$ то $-\frac{1}{p} \leqslant A(p) \leqslant \frac{2}{p}$;
b) для всех простых справедливо $\prod\limits_{p} (1 + |A(p)|) \leqslant \prod\limits_{p} (1 + A(p)) \leqslant (\ln\ln N)^{14}$;
c) произведение $\prod\limits_{p} s(p)$ является абсолютно сходящимся и $\prod\limits_{p} s(p) > 0$;
d) для любого действительного числа $y \geqslant 1$ спрведлива неравенства

$$\sum_{q \geqslant y} |A(q)| \ll \tfrac{1}{y} N^{\frac{4}{\ln\ln N}} \ln^3(y + 2).$$

Пусть $\chi_j(\mathrm{mod} r_j), (j = \overline{1,4})$- примитивные характеры, а $r = gcm\,[r_1, \ldots, r_4]$ – чисел r_1, r_2, r_3, r_4. В наших будущих исследованиях для оценки некоторых выражений нужна сумма вида:

$$Z(q) = Z(q : \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = \sum_{\bar{h}} e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^{4} C_{\chi_j \chi_0}(\bar{h}_j), \tag{5.2}$$

где q кратное r и χ_0– главный характер по модулю q.

Лемма 5.3. Если $\chi_i(mod r_i)$– примитивный характер и число q кратны $r = gcm[r_1, ..., r_4]$, то:
a) справедливо равенство $Z(r) = r^3 \sum\limits_{r} \prod\limits_{j=1}^{4} \chi_j(l_j)$;
b) пусть $r \backslash q$ и $q = q_1 q_2,\ (q_1, q_2) = 1$ и каждый простой делитель числа q_1 делит r , то $Z(q) = Z(q_1)\varphi(q_2)^4 A(q_2)$ и $Z(q_1) = 0$, если $q_1 > r$;
c) справедливо неравенство $\sum\limits_{\substack{q \leqslant Q, \\ r \backslash q}} \varphi(q)^{-4} Z(q) \leqslant \prod\limits_{p} s(p)$.

Доказательство этих лемм имеется в [11] (см. лемма 5.3,[11]).

Относительно сингулярного интеграла справедлива следующая лемма.

Лемма 5.4. Пусть ρ_j $(j=\overline{1,4})$ произвольные комплексные числа удовлетворяющий условие $0 \leqslant \operatorname{Re}\rho_j \leqslant 1$ тогда имеем

$$\iint\limits_{R^2}\left[\prod_{j=1}^{4}\int\limits_{L}^{N} x^{\rho_j-1}e(x\bar{\eta}_j)dx\right]e(-\bar{\eta}_b)d\eta_1 d\eta_2 = N^2|\Delta_{34}|^{-1}\iint\limits_{(D)}\prod_{j=3}^{4}(Nx_j)^{\rho_j-1}dx_1dx_2, \tag{5.3}$$

где x_3, x_4 на правой части подинтеграла задаётся с

$$\begin{cases} x_3 = f_1(x_1,x_2) = \frac{1}{\Delta_{34}}\left(\Delta_{b4}N^{-1} - \Delta_{14}x_1 - \Delta_{24}x_2\right) \\ x_4 = f_2(x_1,x_2) = \frac{1}{\Delta_{34}}\left(\Delta_{b3}N^{-1} + \Delta_{13}x_1 + \Delta_{23}x_2\right) \end{cases} \tag{5.4}$$

и

$$D = \left\{x_1, x_2 :\ \ LN^{-1} \leqslant x_1, x_2, f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2) \leqslant 1\right\}. \tag{5.5}$$

Кроме того, если $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$ тогда

$$\iint\limits_{(D)} dx_1dx_2 \geqslant Q^{-\frac{1}{100}} \tag{5.6}$$

за исключаем самый больше $X^2Q^{-\frac{1}{101}}$ пары $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$.

Доказательство. Сначала докажем (5.6). В зависимости от знака определителя Δ_{34} доказательство оценки (5.6) делим на два случая.

1. Пусть $\Delta_{34} \geqslant 0$. Согласно (5.4) и (5.5) двойной интеграл $\iint\limits_{(D)} dx_1dx_2$ площади пересечения квадрата $\left[LN^{-1};1\right]^2$ с площадью образованной интервалами:

$$\begin{cases} \left[\frac{\Delta_{23}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b4}\right)+\Delta_{24}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b3}\right)}{\Delta_{12}\Delta_{34}};\ \frac{\Delta_{23}(\Delta_{34}-\Delta_{b4})+\Delta_{24}(\Delta_{34}-\Delta_{b3})}{\Delta_{12}\Delta_{34}}\right] \\ \\ \left[\frac{\Delta_{13}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b4}\right)+\Delta_{14}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b3}\right)}{\Delta_{12}\Delta_{34}};\ \frac{\Delta_{13}(\Delta_{34}-\Delta_{b4})+\Delta_{14}(\Delta_{34}-\Delta_{b3})}{\Delta_{12}\Delta_{34}}\right] \end{cases}. \tag{5.7}$$

Соответственно обозначим первый и второй сегмент в (5.7) K_1, K_2 тогда имеем

$$\iint\limits_{(D)} dx_1dx_2 = \left(|K_1| + |K_2| - \left|K_1 \bigcap K_2\right|\right)^2$$

для $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$, известно, что $|\Delta_{bj}| = \frac{2BX}{3}$, $|\Delta_{i,j}| = \frac{2B^2}{3}$ и согласно (2.1) нижней границе K_1, $\left|\frac{\Delta_{23}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b4}\right)+\Delta_{24}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b3}\right)}{\Delta_{12}\Delta_{34}}\right| \leqslant 2\left(Q^{-\frac{1}{100}} - 2B^{-1}X\right)$ верхние границы $\left|\frac{\Delta_{23}(\Delta_{34}-\Delta_{b4})+\Delta_{24}(\Delta_{34}-\Delta_{b3})}{\Delta_{12}\Delta_{34}}\right| \geqslant 2\left(1-2B^{-1}X\right)$. Таким образом, K_1 содержит под интервал $\left[2\left(Q^{-\frac{1}{100}} - 2B^{-1}X\right);\ 2\left(1-2B^{-1}X\right)\right]$.

Также для K_2 в (5.7) можем находить под интервал. Следовательно

$$\iint\limits_{(D)} dx_1dx_2 = \int\limits_{K_1} dx_1 \int\limits_{K_2} dx_2 = \left(|K_1| + |K_2| - \left|K_1 \bigcap K_2\right|\right)^2 \geqslant |K_1|^2 =$$

$$= \left[2\left(Q^{-\frac{1}{100}} - 2B^{-1}X\right) -\ 2\left(1-2B^{-1}X\right)\right]^2 \geqslant \left[2\left(Q^{-\frac{1}{100}} - 1\right)\right]^2 \geqslant Q^{-\frac{1}{100}}.$$

Таким образом, имеем $\iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 \leqslant 1$.

2. Пусть $\Delta_{34} < 0$. Аналогично к первому случаю интеграл $\iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2$ равен площади пересечения квадрата $\left[LN^{-1};1\right]^2$ с площадью образованной интервалами:

$$\begin{cases} \left[\frac{\Delta_{23}(\Delta_{34}-\Delta_{b4})+\Delta_{24}(\Delta_{34}-\Delta_{b3})}{\Delta_{12}\Delta_{34}}; \frac{\Delta_{23}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b4}\right)+\Delta_{24}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b3}\right)}{\Delta_{12}\Delta_{34}}\right] \\ \\ \left[\frac{\Delta_{13}(\Delta_{34}-\Delta_{b4})+\Delta_{14}(\Delta_{34}-\Delta_{b3})}{\Delta_{12}\Delta_{34}}; \frac{\Delta_{13}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b4}\right)+\Delta_{14}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b3}\right)}{\Delta_{12}\Delta_{34}}\right] \end{cases}$$

Также как в первом случае эти интервалы соответственно обозначим K_1, K_2. Для левого конца имеем $\leqslant 2\left|1-3B^2X\right|$, для правой конечный точки $\geqslant 2\left|3B^2X - Q^{-\frac{1}{100}}\right|$,. Поэтому имеем

$$\iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 = \int\limits_{K_1} dx_1 \int\limits_{K_2} dx_2 = \left(|K_1| + |K_2| - \left|K_1 \bigcap K_2\right|\right)^2 \geqslant |K_1|^2 + |K_2|^2 > |K_2|^2 =$$

$$= \left[2\left(3B^2X - Q^{-\frac{1}{3}}\right) - \ 2\ \left(1-3B^2X\right)\right]^2 \geqslant \left[2\left(Q^{-\frac{1}{100}}-1\right)\right]^2 \geqslant Q^{-\frac{1}{100}}.$$

Следовательно, если $(b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$, то $\iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 \geqslant Q^{-\frac{1}{100}}$ верно для всех (b_1, b_2) пар кроме $X^2 Q^{-\frac{1}{101}}$. Так как $(b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$, согласно (4) в работы [6] пар уравнение в (1.1) разрешимый в положительных y_j. Это эквивалентно, что два уравнений $\Delta_{34}y_3 = \Delta_{b4} + \Delta_{41}y_1 + \Delta_{42}y_2$, $\Delta_{34}y_4 = \Delta_{b3} + \Delta_{13}y_1 + \Delta_{23}y_2$ допускает положительное решение y_j $y_3 = \frac{\Delta_{b4}}{\Delta_{34}} + \frac{\Delta_{41}}{\Delta_{34}}y_1 + \frac{\Delta_{42}}{\Delta_{34}}y_2$ если $\Delta_{b4} < 0,\ \Delta_{41} < 0,\ \Delta_{42} < 0$ то $\frac{\Delta_{b4}}{\Delta_{34}} > 0, \quad \frac{\Delta_{41}}{\Delta_{34}} > 0, \quad \frac{\Delta_{42}}{\Delta_{34}} > 0$, поэтому $y_3 > 0, \quad y_1 > 0, \quad y_2 > 0$.

Аналогично $y_4 = \frac{\Delta_{b3}}{\Delta_{34}} + \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{34}}y_1 + \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{34}}y_2$ если $\Delta_{b3} < 0, \Delta_{13} < 0, \Delta_{23} < 0$, то, $\frac{\Delta_{b3}}{\Delta_{34}} > 0, \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{34}} > 0$, $\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{34}} > 0$, поэтому $y_4 > 0,\ y_1 > 0,\ y_2 > 0$. Для каждого фиксированного целого $k \geqslant 1$, существуют менее чем X пар (b_1, b_2) в $[1, X]^2$ такое что $k = \Delta_{b4}$, $(b_1, b_2) \in W(X), 1 \leqslant b_1 \leqslant X$, $1 \leqslant b_2 \leqslant X$, $\Delta_{b4} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{14} \\ b_2 & a_{24} \end{vmatrix} = a_{24}b_1 - a_{14}b_2 = k \quad \Rightarrow \quad a_{24}b_1 \equiv k\,(mod b_2)$. Следовательно, существуют $\leqslant \Delta_{41}NQ^{-\frac{1}{100}} + \Delta_{42}NQ^{-\frac{1}{100}} \leqslant 2\Delta NQ^{-\frac{1}{100}}$ пар$(b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$ такое, что $\frac{\Delta_{b4}}{2\Delta N} \leqslant Q^{-\frac{1}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta_{b4}}{\Delta} \leqslant 2NQ^{-\frac{1}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta_{b4}}{\Delta_{41}} \leqslant NQ^{-\frac{1}{100}+\varepsilon_1}$, $\frac{\Delta_{b4}}{\Delta_{42}} \leqslant NQ^{-\frac{1}{100}+\varepsilon_2}$.

Применяя аналогичную аргументацию к $\frac{\Delta_{b3}}{\Delta_{34}}$ мы заключаем что $\Delta_{b4}(\Delta_{41}N)^{-1} \geqslant Q^{-\frac{1}{100}+\varepsilon_1}$ $\left(\Delta_{b4}(\Delta_{42}N)^{-1} \geqslant Q^{-\frac{1}{100}+\varepsilon_2}\right)$ и

$$\Delta_{b3}(\Delta_{13}N)^{-1} > Q^{-\frac{1}{100}} \qquad \left(\Delta_{b3}(\Delta_{23}N)^{-1} > Q^{-\frac{1}{100}}\right) \tag{5.8}$$

за исключением самой большей $(\Delta_{41} + \Delta_{13})\,NQ^{-\frac{1}{100}} \leqslant \frac{4B^2}{9}NQ^{-\frac{1}{100}} < 8X^2Q^{-\frac{1}{100}+5\delta} \ll$ $\ll X^2Q^{-\frac{1}{101}+5\delta}$ пары $(b_1, b_2) \in W(X)$. Так как $\Delta_{34} < 0$ и $\left|\Delta_{jb}N^{-1}\right| \leqslant \frac{2}{27B^2}$, $(j = \overline{1,4})$. Согласно (7) в работе [6], имеем $\Delta_{b4}N^{-1} - \Delta_{ij} < 0$ и $\Delta_{b3}N^{-1} - \Delta_{ij} < 0$, $\left|\Delta_{jb}N^{-1}\right| = N^{-1}(a_{1j}b_2 - $ $- a_{2j}b_1) \leqslant N^{-1}\frac{2B}{3}\left(|b_2| + |b_1|\right) \leqslant \frac{2B}{3N}2X = \frac{4BX}{3N} = \frac{4BX}{3\cdot 18B^3X} = \frac{2}{27B^2}$, $\Delta_{bj}N^{-1} - \Delta_{ij} = \frac{2}{27B^2} - \frac{2B^2}{9} =$ $= \frac{2-6B^4}{27B^2} = \frac{2\left(1-3B^4\right)}{27B^2} < 0$ т.е. нижние концы двух интегралов в (5.6) являются отрицательными, в то время согласно (5.8) и (7) в работе [6] их верхние концы являются

$2\frac{\Delta_{34}L-\Delta_{b4}N}{N\Delta_{34}} = 2\left(\frac{L}{N}-\frac{\Delta_{b4}}{\Delta_{34}}\right) = 2\left(Q^{-\frac{1}{100}}-\frac{3X}{B}\right).$
Следовательно

$$\iint\limits_{(D)} dx_1dx_2 = \left(2\left(Q^{-\frac{1}{100}}-\frac{3X}{B}\right)-2\left(1-\frac{3X}{B}\right)\right)^2 \geqslant 4\Big(1-Q^{-\frac{1}{100}}\Big)^2 > Q^{-\frac{1}{100}}$$

за исключением не более чем $X^2Q^{-\frac{1}{101}}$ пар $(b_1,b_2)\in W_{2,4}(X)$.
Теперь докажем справедливость (5.3). Известно, что

$$\iint\limits_{R^2}\left[\prod_{j=1}^{4}\int\limits_{L}^{N} x_j^{\rho_j-1}e(\bar\eta_jx_j)dx_j\right]e(-\bar\eta_b)d\eta_1d\eta_2 = \lim_{y\to\infty}\int\limits_{-y}^{y}\int\limits_{-y}^{y}e(-\bar\eta_b)\left[\prod_{j=1}^{4}\int\limits_{L}^{N}x_j^{\rho_j-1}e(\bar\eta_jx_j)dx_j\right]d\eta_1d\eta_2.$$

Для любого $y>0$ рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-y}^{y}\int\limits_{-y}^{y}e(-\bar\eta_b)\left[\prod_{j=1}^{4}\int\limits_{LN^{-1}}^{1}x^{\rho_j-1}e(\bar\eta_jx)dx\right]d\eta_1d\eta_2 =$$

$$=\int\limits_{L/N}^{1}\int\limits_{L/N}^{1}\int\limits_{L/N}^{1}\int\limits_{L/N}^{1}\prod_{j=1}^{4}(Nx_j)^{\rho_j-1}\left[\int\limits_{-y}^{y}\int\limits_{-y}^{y}e(\bar\eta_1x_1+\dots+\bar\eta_4x_4)e(-\bar\eta_b)d\eta_1d\eta_2\right]dx_1dx_2dx_3dx_4 =$$

$$=\int\limits_{L/N}^{1}\int\limits_{L/N}^{1}\int\limits_{L/N}^{1}\int\limits_{L/N}^{1}\left(\prod_{j=1}^{4}(Nx_j)^{\rho_j-1}\right)\frac{\sin(2\pi t_1y)}{\pi t_1}\frac{\sin(2\pi t_2y)}{\pi t_2}dx_1dx_2dx_3dx_4,$$

где $t_i=\sum\limits_{k=1}^{4}a_{1k}x_k-b_iN^{-1}$, $(i=1,2)$.
Обозначим этот кратный интеграл через J(y) и выполним простую замену, тогда получим:

$$J(y)=N^2\Delta_{34}{}^{-2}\int\limits_{L/N}^{1}\int\limits_{L/N}^{1}\left(\prod_{j=1}^{2}(Nx_j)^{\rho_j-1}\right)\left(\iint\limits_{(D)}\prod_{j=3}^{4}(Nx_j)^{\rho_j-1}\frac{\sin 2\pi t_1y}{\pi t_1}\frac{\sin 2\pi t_2y}{\pi t_2}dt_1dt_2\right)dx_1dx_2,$$

где $x_3=(\Delta_{t4}+\Delta_{b4}N^{-1}-\Delta_{14}x_1-\Delta_{24}x_2)\Delta_{34}^{-1}$, $\quad x_4=(\Delta_{t3}+\Delta_{b3}N^{-1}-\Delta_{31}x_1-\Delta_{32}x_2)\Delta_{34}^{-1}$ и

$$D(x_1,x_2)=\left\{\bar t=(t_1,t_2);\ \ t_i=\sum_{j=1}^{4}a_{ij}x_j-b_iN^{-1},\quad i=1,2;\ N^{-1}L\leqslant x_3,x_4\leqslant 1\right\}.$$

. Интеграл в лемме равен $\lim\limits_{y\to\infty}N^2J(y)$. Из теоремы Жордана об интеграле Дирихле следует, что если $g(t)-$ непрерывно дифференцируемая функция для $\mu\leqslant t\leqslant\lambda$, то имеем

$$\lim_{y\to\infty}N^2|\Delta_{34}|^{-2}J(y)=\lim_{y\to\infty}|\Delta_{34}|^{-2}N^2\int\limits_{L/N}^{1}(Nx_1)^{\rho_1-1}\left[\int\limits_{D(x_1,x_2)}(Nx_3)^{\rho_3-1}\frac{\sin(2\pi t_1y)}{\pi t_1}dt_1\right]dx_1\times$$

$$\times\int\limits_{L/N}^{1}(Nx_2)^{\rho_2-1}\left[\int\limits_{D(x_1,x_2)}(Nx_4)^{\rho_4-1}\frac{\sin(2\pi t_2y)}{\pi t_2}dt_2\right]dx_2, \tag{5.9}$$

где $x_3 = (\Delta_{t4} + \Delta_{b4}N^{-1} - \Delta_{14}x_1 - \Delta_{24}x_2)\Delta_{34}^{-1}$ и $x_4 = (\Delta_{t3} + \Delta_{b3}N^{-1} - \Delta_{31}x_1 - \Delta_{32}x_2)\Delta_{34}^{-1}$. На это равенство применим теорема Жордана об интеграле Дирихле. Тогда справедливо равенство:

$$\lim_{y\to\infty} \int_{\mu}^{\lambda} g(t)\frac{\sin(2\pi ty)}{\pi t}dt = \begin{cases} g(0) & \text{если} \quad \mu \leqslant 0 \leqslant \lambda \\ \frac{1}{2}g(0) & \text{если} \quad \mu = 0 \quad \lambda{=}0 \\ 0 & \text{остальные случай} \end{cases}.$$

согласно $\bar{t} = (0,0)$ принадлежит в $D\,(x_1, x_2)$, поэтому из этой теорема и из равенство (5.9) вытекает (5.3), т.е. находим

$$\lim_{y\to\infty} N^2 J(y) = N^2|\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} \prod_{j=3}^{4} (Nx_j)^{\rho-1} dx_1 dx_2.$$

Так как $x_3 = (\Delta_{t4}+\Delta_{b4}N^{-1}-\Delta_{14}x_1-\Delta_{24}x_2)\Delta_{34}^{-1}$ и $x_4 = (\Delta_{t3}+\Delta_{b3}N^{-1}-\Delta_{31}x_1-\Delta_{32}x_2)\Delta_{34}^{-1}$ равен Δ_{34} или $\Delta_{34}LN^{-1}$. Этим завершается доказательство лемма 5.4.

6. Оценка интеграла по большой дуге

При раскрытые скобок правой части в равенство (4.1) получим сумму, состоящую из 81 членов, которые принадлежить одному из трех категории [12]: (T_1) : слагаемое $\prod\limits_{j=1}^{4} C_q(\bar{h}_j)I(\bar{\eta}_j)$
(T_2) : 65 слагаемые, каждый из которых по крайней мере один множитель $G_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right)$
(T_3) : оставшиеся 15 слагаемые.
Для удобства обозначим

$$M_i = \sum_{q\leqslant Q} \frac{1}{\varphi^4(q)} \sum_{h}{}' e_q(-\bar{h}_b) \iint\limits_{R^2} T_i e(-\bar{\eta}_b) d\eta_1 d\eta_2\,, (i = 1, 2, 3). \tag{6.1}$$

Заметим, что каждый M_i является действительным. Согласно (4.4) имеем

$$I_1(\bar{b}) = M_1 + M_2 + M_3 + O(N^2 Q^{-1}) \tag{6.2}$$

для всех пар $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$, за исключением $E_{2,4}^{(1)}\,(X) < X^2 Q^{-1}$ пар из них.

Пусть

$$M_0 = N^2|\Delta_{34}|^{-1} \prod_{p} s(p) \iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 \tag{6.3}$$

где $D = \{x_1, x_2, x_3, x_4 : LN^{-1} \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1\}$.
Ввиду лемма-5.2 c) и равенства (5.6) имеем

$$M_0 >> N^2 B^{-2} Q^{-\frac{1}{100}} \tag{6.4}$$

за исключением не более $E_{2,4}^{(2)}\,(X) < X^2 Q^{-\frac{1}{101}}$ пары $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$.

Докажем лемму.

Лемма 6.1. Для всех $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$ справедливо равенство:

$$M_1 = M_0 + O\left(N^2 Q^{-\frac{2}{3}}\right)$$

Доказательство. Согласно (6.1), (5.3) с $\rho_j = 1$ и лемма 5.2 d) имеем

$$M_1 = \sum_{q\leqslant Q} \frac{1}{\varphi^4(q)} \sum_{\bar{h}} e_q\left(-\bar{h}_b\right) \prod_{j=1}^{4} C_q(\bar{h}_j) N^2 |\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 =$$

$$= \sum_{q\leqslant Q} A(q) N^2 |\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 = N^2 |\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 \left[\sum_{q=1}^{\infty} A(q) - \sum_{q>Q} A(q) \right] =$$

$$= N^2 |\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 \sum_{p=1}^{\infty} A(q) - N^2 |\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 \sum_{q>Q} A(q) =$$

$$= N^2 |\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 \left(\sum_{q=1}^{\infty} A(q) \right) + O\left(N^2 Q^{-1} N^{\frac{4}{\ln\ln N}} \ln^3 Q \right).$$

Ясно, что главный член равен M_0, так как согласно лемма-5.1 а), в) и из равенство (5.1) имеем

$$\sum_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod_p (1 + A(p)) = \prod_p s\,(p).$$

Поскольку $Q = N^{\delta}$ и $X \geq B^{\exp(\delta^{-2})}$, то для остатка имеем

$$N^2 Q^{-1} N^{\frac{4}{\ln\ln N}} \ln^3 Q \ll N^2 Q^{-\frac{2}{3}} \text{ при } \ \delta < \frac{12}{\ln\ln\left(18B^3 + \exp\left(\frac{1}{\delta^2}\right)\right)}.$$

Таким образом лемма доказана.

Далее, оценим M_3. Для удобство в изложении вводим следуюшие обозначении, пусть $m_1, m_2, \cdots$ различные целые числа из множество $\{1, 2, 3, 4\}$. Подобно с (2.1) работы [6] определим

$$\mathcal{G}(m_1, m_2, \cdots) = \sum_{(\bar{r})} \tilde{\chi}(l_{m_1}) \tilde{\chi}(l_{m_2}) \cdots \tag{6.5}$$

и

$$\mathcal{P}\,(m_1, m_2, \cdots) = \iint\limits_{(D)} (N x_{m_1})^{\tilde{\beta}-1} (N x_{m_2})^{\tilde{\beta}-1} \cdots dx_1 dx_2, \tag{6.6}$$

где (D) выше указанная область (см.(5.5)).

Например $\mathcal{G}(3) = \sum\limits_{(\bar{r})} \tilde{\chi}(l_3)$, $\quad \mathcal{P}\,(3,4) = \iint\limits_{(D)} (N x_3)^{\tilde{\beta}-1} (N x_4)^{\tilde{\beta}-1} dx_1 dx_2$ ясно, что

$$|\mathcal{P}\,(m_1, m_2, \cdots)| \leqslant 1. \tag{6.7}$$

Лемма 6.2. Имеют места следующие соотношение:
a) $|\mathcal{G}(m_1, m_2, \cdots)| \leqslant N(\tilde{r}) \leqslant \varphi(\tilde{r})$;
b) $\mathcal{G}(m_1, m_2, \cdots) << B^6 \tilde{r}^{\frac{1}{4}}$ за исключением не более чем $X^2 \tilde{r}^{-\frac{3}{2}}$ пар $(b_1, b_2) \in [1, X]^2$.

Доказательство. Утверждение a) сразу следует из определения $N(\tilde{r})$ и его мультипликативности, если учесть лемму 5.4. Утверждение b) следует из равенство (6.5).В самом деле, имеем

$$|\mathcal{G}(m_1, m_2, \cdots)| = \sum_{(\bar{r})} |\tilde{\chi}(l_{m_1}) \tilde{\chi}(l_{m_2}) \cdots| = \sum_{(\bar{r})} 1 = N(\tilde{r}) = \prod_{i=1}^{k} N\left(p_i^{\alpha_i}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i - 1} N(p) \leqslant \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i - 1} (p_i - 1) = \varphi(\tilde{r}).$$

Для конкретности, как илюстрация аргументов рассмотрим $\mathcal{G}(1,2,3)$. По формуле (6.5) имеем

$$\mathcal{G}(1,2,3)=\frac{1}{\tilde{r}^3}\sum_{1\leqslant h_1,h_2\leqslant\tilde{r}}e_q(-\bar{h}_b)C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_1)C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_2)C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_3)C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4).$$

Используя неравенство Парсеваля [13] отсюда находим:

$$\sum_{1\leqslant b_1,b_2\leqslant\tilde{r}}\left|\mathcal{G}(1,2,3)\right|^2=\sum_{1\leqslant b_1,b_2\leqslant\tilde{r}}\frac{1}{\tilde{r}^6}\left|\sum_{h_1,h_2\leqslant\tilde{r}}C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_1)C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_2)C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_3)C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4)e_{\tilde{r}}(-\bar{h}_b)\right|^2=$$

$$=\frac{1}{\tilde{r}^6}\sum_{1\leqslant h_1,h_2\leqslant\tilde{r}}\left|C_{\chi}(\bar{h}_1)C_{\chi}(\bar{h}_2)C_{\chi}(\bar{h}_3)C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4)\right|^2\sum_{b_1,b_2\leqslant\tilde{r}}\left|e_{\tilde{r}}(-\bar{h}_b)\right|=$$

$$=\frac{1}{\tilde{r}^4}\sum_{h_1,h_2\leqslant\tilde{r}}\left|C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_1)C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_2)C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_3)C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4)\right|^2.$$

Так как $\tilde{\chi}$ примитивным характером, то $C_{\tilde{\chi}}(m)=\tilde{\chi}(m)C_{\tilde{\chi}}(1)$ и $C_{\tilde{\chi}}(1)=\sqrt{\tilde{r}}$. Поэтому

$$\sum_{1\leqslant b_1,b_2\leqslant\tilde{r}}\left|\mathcal{G}(1,2,3)\right|^2=\frac{1}{\tilde{r}^4}\sum_{1\leqslant h_1,h_2\leqslant\tilde{r}}\left|C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4)\right|^2\left|\tilde{\chi}\left(\bar{h}_1\bar{h}_2\bar{h}_3\right)\right|\leqslant\tilde{r}^{-1}\sum_{\substack{1\leqslant h_1,h_2\leqslant\tilde{r}\\(h_1,h_2,\tilde{r})=1}}\left|C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4)\right|^2. \qquad (6.8)$$

Известно, что модули квадратичного характера $\tilde{\chi}$ имеет вид $\tilde{r}=\nu_1\nu_2\ldots\nu_k$, где $\nu_1=2^t$, $t\in\{0,1,2,3\}$ и $\nu_2<\nu_3<\cdots<\nu_k$ является нечетным простым числам.

Пусть $V_1=\{\nu_j:\ \ \nu_j\not\backslash\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{34},\ j>2\}$ и $V_2=\{\nu_j:\ \ \nu_j\notin V_1\}$. Обозначим $u_i=\prod\limits_{\nu_j\in V_i}\nu_j$ $(i=1,2)$ так, что $u_1\cdot u_2=\tilde{r}$ и

$$u_2=8\left|\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{34}\right|\leqslant8\left(\frac{2B^2}{3}\right)^6=\frac{2^9B^{12}}{3^{12}}\ll B^{12} \qquad (6.9)$$

Аналогично доказательству леммы 5.1 а) можем показать также, что

$$\sum_{\substack{1\leqslant h_1,h_2\leqslant\tilde{r}\\(h_1,h_2,\tilde{r})=1}}\left|C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4)\right|^2=\prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{\substack{1\leqslant h_1,h_2\leqslant\nu_j\\(h_1,h_2,\nu_j)=1}}\left|C_{\nu_j}(\bar{h}_4)\right|^2\right). \qquad (6.10)$$

Фиксируем $\nu_j\in V_1$ и рассмотрим соответствующую сумму правой части в (6.10) существуют точно ν_j-1 пары h_1,h_2 для которых $\nu_j\backslash\bar{h}_4$. Так как

$$C_{\nu_j}(\bar{h}_4)=\sum_{l\in\nu_j}e\left(\frac{l\bar{h}_4}{\nu_j}\right)=\begin{cases}\varphi(\nu_j) & \nu_j\backslash\bar{h}_4\\ -1 & \nu_j\nmid\bar{h}_4\end{cases}$$

имеем

$$\sum_{\substack{1\leqslant h_1,h_2\leqslant\tilde{r}\\(h_1,h_2,\tilde{r})=1}}\left|C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4)\right|^2=\varphi(\nu_j)^2(\nu_j-1)=\varphi(\nu_j)^3$$

для всех $\nu_j \in V_1$. Используя эту и тривиальную ограничению ν_j^4 для верхной суммы когда $\nu_j \in V_2$, из (6.8), (6.10) и (6.9) получим

$$\sum_{1\leqslant b_1,b_2\leqslant\tilde{r}} \left|\mathcal{G}(1,2,3)\right|^2 \leqslant r^{-1}\prod_{\nu_j\in u_1}\varphi^3(\nu_j)\prod_{\nu_j\in u_2}{\nu_j}^4 \leqslant \tilde{r}^2u_2 \ll \tilde{r}^2B^{12}.$$

Это показывает, что количество пар (b_1,b_2) в $[1,\tilde{r}]^2$, для которых $|\mathcal{G}(1,2,3)| \gg B^6\tilde{r}^{\frac{1}{4}}$ не превосходит $\tilde{r}^{\frac{1}{2}}$. Ясно, что $\mathcal{G}(1,2,3)$ зависит от классов сравнимости по модулю $\tilde{r}$, которые принадлежит b_1,b_2. Таким образом, за исключением неболее $[X/\tilde{r}]^2r^{\frac{1}{2}} = X^2r^{-\frac{3}{2}}$ пар $(b_1,b_2)\in[1,X]^2$ имеем $|\mathcal{G}(1,2,3)| \ll B^6\tilde{r}^{\frac{1}{4}}$.
Этим завершается доказательство леммы 6.2.

Лемма 6.3. Для M_3 имеем

$$M_3 = N^2|\Delta_{34}|^{-1}\frac{\tilde{r}^3}{\varphi^4(\tilde{r})}\left(\sum_{q\leqslant\frac{Q}{\tilde{r}},(q,\tilde{r})}A(q)\right)\left(-\sum_{j=1}^4 G(j)P(j) + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 4}G(i,j)P(i,j) - \right.$$
$$\left. - G(1,2,3)P(1,2,3) + G(1,2,3,4)P(1,2,3,4)\right). \tag{6.11}$$

Доказательство. Каждый из 15 слагаемов в (T_3) можно представит в виде

$$(-1)^m\delta_q\sum_{j=1}^m C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\overline{h}_j)\tilde{I}(\tilde{\eta_j})\prod_{j=m+1}^4 C_q(\overline{h}_j)I(\tilde{\eta_j}),$$

где $m = 1,2,3$ или 4. Как обычно, пустое произведение берется как 1. Обозначим через $M_{3,m}$ вклад такого члена в M_3. Тогда

$$M_{3,m} = (-1)^m\sum_{q\leqslant Q}\delta_q\frac{1}{\varphi^4(q)}{\sum_{\overline{h}}}'e_q(-\overline{h}_b)\prod_{j=1}^m C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\overline{h}_j)\prod_{j=m+1}^4 C_q(\overline{h}_j)\times$$
$$\times\iint\limits_{R^2} e(-\overline{\eta}_b)\prod_{j=1}^m\tilde{I}(\overline{\eta}_j)\prod_{j=m+1}^4 I(\overline{\eta}_j)d\eta_1d\eta_2 = (-1)^mG_mQ_m, \tag{6.12}$$

где Q_m кратный интеграл по R^2 и

$$G_m = \sum_{q\leqslant Q,\tilde{r}|q}\delta_q\frac{1}{\varphi^4(q)}{\sum_{\overline{h}}}'e_q(-\overline{h}_b)\prod_{j=1}^m C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\overline{h}_j)\prod_{j=m+1}^4 C_q(\overline{h}_j).$$

Согласно (2.1), лемма 5.4. с $\rho_j = \tilde{\beta}$ или 1, и из (6.6) имеем

$$Q_m = \iint\limits_{R^2} e(-\overline{\eta}_b)\prod_{j=1}^m\tilde{I}(\overline{\eta}_j)\prod_{j=m+1}^4 I(\overline{\eta}_j)d\eta_1d\eta_2 =$$
$$= \iint\limits_{R^2}\left[\prod_{j=1}^m\left(\int\limits_L^N x^{\tilde{\beta}-1}e(\overline{\eta}_jx)dx\right)\right]\left[\prod_{j=m+1}^4\left(\int\limits_L^N e(\overline{\eta}_jx)dx\right)\right]e(-\overline{\eta}_b)d\eta_1d\eta_2 =$$
$$= N^2|\Delta_{34}|^{-1}\iint\limits_D\prod_{j=1}^m(Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}dx_1dx_2 = N^2|\Delta_{34}|^{-1}P(1,\ldots,m). \tag{6.13}$$

Далее, беря $\chi_1 = \cdots = \chi_m = \tilde{\chi}(mod\tilde{r})$ и $\chi_{m+1} = ... = \chi_4 = \chi_0(mod1)$ в определение $Z(q)$ в (5.2), легко видим, что

$$G_m = \sum_{q \leqslant Q, \tilde{r}|q} \varphi^{-4}(q)Z(q). \tag{6.14}$$

В силу леммы 5.3 а), в) функция $Z(q)$ можем переписать в виде

$$Z(q) = Z(\tilde{r})A(q'')\varphi^4(q'') = \tilde{r''} \sum_{(\tilde{r})} \prod_{j=1}^{4} \tilde{\chi}(l_j)A(q'')\varphi^4(q''), \tag{6.15}$$

где $q = \tilde{r}q'', (\tilde{r}, q'') = 1$. Из равенств (6.5),(6.14) и (6.15) имеем

$$G_m = Z(\tilde{r})\varphi^{-4}(\tilde{r}) \sum_{q'' \leqslant Q\tilde{r}^{-1}, (q'', \tilde{r})=1} A(q'') = \tilde{r}^3\varphi^{-4}(\tilde{r})\mathcal{G}(1, 2, \ldots, m) \sum_{q'' \leqslant Q\tilde{r}^{-1}, (q'', \tilde{r})=1} A(q'').$$

Таким образом, подставляя это выражение и (6.13) в (6.12) будем иметь

$$M_{3,m} = \frac{N^2\tilde{r}^3}{|\Delta_{34}|\varphi^4(\tilde{r})} \left(\sum_{q'' \leqslant Q\tilde{r}^{-1}, (q'', \tilde{r})=1} A(q'') \right) \left((-1)^m\mathcal{G}(1, 2, \ldots, m)\mathcal{P}(1, 2, \ldots, m)\right).$$

Собирая выражение при $m = 1, 2, 3, 4$ получим утверждение леммы. Когда $Q\tilde{r}^{-1}$ является "большое"сумма $\sum\limits_{q \leqslant Q\tilde{r}^{-1}, (q, \tilde{r})=1} A(q)$ в (6.11) достаточно длинной и в силу леммы 5.2 d) можем представить ее в виде

$$\sum_{\substack{q \leqslant \frac{Q}{\tilde{r}} \\ (q, \tilde{r})=1}} A\left(q\right) + O\left(\sum_{q > \frac{Q}{\tilde{r}},} \left|A\left(q\right)\right| \right) = \sum_{p \nmid \tilde{r}} s\left(p\right) + O\left(rQ^{-\frac{4}{5}}\right),$$

так как согласно (2.1) $N^{4/lnlnN}ln^3Q \ll Q^{1/5}$ при $\delta < \dfrac{20}{ln(\delta lnQ)}$.
Таким образом, согласно (6.11), (6.7) и лемма 6.2. а) имеем:

$$M_3 = N^2|\Delta_{34}|^{-1} \frac{\tilde{r}^3}{\varphi^4(\tilde{r})} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \left(-\sum_{j=1}^{4} \mathcal{G}(j)\mathcal{P}(j) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4} \mathcal{G}(i, j)\mathcal{P}(i, j) - \right.$$

$$\left. - \mathcal{G}(1, 2, 3)\mathcal{P}(1, 2, 3) + \mathcal{G}(1, 2, 3, 4)\mathcal{P}(1, 2, 3, 4) + O(N^2\tilde{r}Q^{-4/5}(lnlnQ)^3 \right). \tag{6.16}$$

С другой стороны, согласно лемме 5.1 e)

$$\prod_{p|\tilde{r}} s(p) = \tilde{r}^3\varphi^{-4}(\tilde{r})N(\tilde{r}) = \tilde{r}^3\varphi^{-4}(\tilde{r}) \sum_{(\tilde{r})} 1. \tag{6.17}$$

Применяя леммы 6.1, получим

$$M_1 = N^2|\Delta_{34}|^{-1}\tilde{r}^3\varphi^{-4}(\tilde{r}) \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \sum_{(\tilde{r})} \iint\limits_D dx_1dx_2 + O\left(N^2Q^{-4/5}\right).$$

Комбинируя этого с (6.16) и используя (6.5),(6.6) имеем

$$M_1 + M_3 =$$

$$= N^2|\Delta_{34}|^{-1}\tilde{r}^3\varphi^{-4}(\tilde{r})\prod_{p\nmid\tilde{r}}s(p)\sum_{(\tilde{r})}\iint_D\prod_{j=1}^{4}\left(1-\chi(l_j)(Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}\right)dx_1dx_2+O\left(N^2Q^{-4/5}\right). \quad (6.18)$$

Так как согласно (6.3) $Nx_j \geq L$ произведение в внутреннему интеграле на правой части есть

$$\prod_{j=1}^{4}\left(1-\chi(l_j)(Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}\right) \geq \prod_{j=1}^{4}\left(1-(Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}\right) \geq \left(1-L^{\tilde{\beta}-1}\right)^4.$$

Ввиду (2.1) и (4.5) в работе [2] при δ малом

$$1-L^{\tilde{\beta}-1} \geq \left\{1-\exp\left(-\frac{1}{2}(1-\tilde{\beta})\ln L\right)\right\} \geq \left(1-\tilde{\beta}\ln T\right) = \Omega$$

(см.(2.3)). Таким образом, из (6.17) и (6.18) получим

$$M_1+M_3 \geq \Omega^4 M_0 - O\left(N^2\tilde{r}Q^{-4/5}\right). \quad (6.19)$$

В случае когда $Q\tilde{r}^{-1}$ являются "малым"мы не сможем давать лучше чем сейчас данный верхней ограничение суммы $\sum\limits_{q\leqslant Q\tilde{r}^{-1},(q,\tilde{r})=1} A(q)$, а именно $\prod\limits_p(1+|A(p)|)$ который согласно лемма 5.2 b) является $\ll (lnlnN)^{14}$.

Таким образом, при помощи лемма- 6.2 в) и (6.8) из лемма 6.3 выводим, что

$$M_3 = N^2|\Delta_{34}|^{-1}\frac{\tilde{r}^3}{\varphi^4(\tilde{r})}\left(\sum_{q\leq\frac{Q}{\tilde{r}},(q,\tilde{r})}A(q)\right)\left(-\sum_{j=1}^{4}\mathcal{G}(j)\mathcal{P}(j)+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 4}\mathcal{G}(i,j)\mathcal{P}(i,j)-\right.$$

$$\left.-\mathcal{G}(1,2,3)\mathcal{P}(1,2,3)+\mathcal{G}(1,2,3,4)\mathcal{P}(1,2,3,4)+O(N^2\tilde{r}Q^{-4/5}(lnlnQ)^3\right).$$

$\mathcal{G}(m_1,m_2,...) \ll B^6\tilde{r}^{1/4}$ за исключение самого большего $X^2\tilde{r}^{-3/2}$ для пар $(b_1,b_2)\in[1,X]^2$.

$$\mathcal{P}(m_1,m_2,...) \leq 1, \quad M_3 \ll \frac{N^2\tilde{r}^3}{\varphi^4(\tilde{r})}\tilde{r}^{1/4}B^6(\ln\ln N)^{14} \ll N^2\tilde{r}^{-3/4}B^6(\ln\ln N)^{18}. \quad (6.20)$$

Теперь оценим M_2.

Лемма 6.4. Для всех $\tilde{b}=(b_1,b_2)\in[1,X]^2$ верно следующая оценка:

$$M_2 \ll M_0\left(\Omega^4\exp\left(-\frac{c}{\sqrt{\delta}}\right)\right),$$

где,

$$\Omega = \begin{cases}(1-\tilde{\beta})logT, & \text{если существуют } \tilde{\beta}\\ 1, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Доказательство. Каждое из 65 слагаемых в (T_2) принадлежит к одному из следующих видов:

$$(-1)^m\prod_{j=1}^{l}G_j\left(\overline{h},q,\overline{\eta}\right)\prod_{j=1+l}^{m}\delta_qC_{\tilde{\chi},\chi_0}\left(\overline{h}_j\right)\tilde{I}(\overline{\eta}_j)\prod_{j=1+m}^{4}C_q(\overline{h}_j)I(\overline{\eta}_j)$$

или

$$(-1)^m\prod_{j=1}^{l}G_j\left(\overline{h},q,\overline{\eta}\right)\prod_{j=1+m}^{4}C_q(\overline{h}_j)\tilde{I}(\overline{\eta}_j)\prod_{j=1+l}^{m}\delta_qC_{\tilde{\chi},\chi_0}\left(\overline{h}_j\right)I(\overline{\eta}_j)$$

где $1 \leqslant l \leqslant m \leqslant 4$.

Эти выражение оценивается одинаково. Поэтому мы берём $l = 2,\ m = 3$ и получим следующий вклад в $M_2(l, m)$.

$$M_2(2,3) = \sum_{q\le Q} \varphi^{-4}(q)(-1)^3 \iint\limits_{R^2} \prod_{j=1}^{2} G_j(\overline{h}, q, \overline{\eta})\delta_q \prod_{j=3}^{4} C_{\tilde{\chi},\chi_0}(\overline{h}_j)\tilde{I}(\overline{\eta}_j) \prod_{j=4} C_q(\overline{h}_4) I(\overline{\eta}_4) d\eta_1 d\eta_2 =$$

$$= (-1)^3 \sum_{q\le Q} \varphi^{-4}(q) {\sum_{\overline{h}}}' e_q(-\overline{h}_b) C_{\tilde{\chi},\chi_0}(\overline{h}_3) C_{\tilde{\chi},\chi_0}(\overline{h}_4) C_q(\overline{h}_4) \sum_{\chi_1 (mod q)} C_{\tilde{\chi_1}}(\overline{h}_1) \sum_{\chi_2 (mod q)} C_{\tilde{\chi_2}}(\overline{h}_2) \times$$

$$\times \iint\limits_{R^2} I_{\chi_1}(\overline{\eta}_1) I_{\chi_2}(\overline{\eta}_2) \tilde{I}(\overline{\eta}_3) \tilde{I}(\overline{\eta}_4) I(\overline{\eta}_4) e(-\overline{\eta}_b) d\eta_1 d\eta_2. \tag{6.21}$$

Сперва рассмотрим двойной интеграл по R^2. Согласно определение в (2.2)

$$I_{\chi_j}(\overline{\eta}_j) = {\sum_{|\gamma_j|\leqslant T}}' \int_L^N x^{\rho_j - 1} e(x\overline{\eta}_j) dx, \quad \text{для } j = 1, 2.$$

Следовательно, применяя (5.3) находим, что внутренний интеграл равен

$$N^2 |\Delta_{34}|^{-1} {\sum_{|\gamma_1|\leqslant T}}' {\sum_{|\gamma_2|\leqslant T}}' \iint\limits_{(D)} (N\bar{x}_1)^{\rho-1} (N\bar{x}_2)^{\rho-1} (Nx_3)^{\tilde{\beta}-1} (Nx_4)^{\tilde{\beta}-1} dx_1 dx_2.$$

Подставляя в (6.21), после небольшой перегруппировки имеем

$$M_2(2,3) = -N^2 |\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} (Nx_3)^{\tilde{\beta}-1} (Nx_4)^{\tilde{\beta}-1} \sum_{q\leqslant Q,\ \tilde{r}/q} \frac{1}{\varphi^4(q)} \sum_{\overline{h}} e_q(-\overline{h}_b) \times$$

$$\times \prod_{j=3}^{4} C_{\tilde{\chi},\chi_0}\left(\overline{h}_j\right) C_q(\overline{h}_4) \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{\chi_j (mod q)} {\sum_{|\gamma_j|\leqslant T}}' C_{\chi_j}(\overline{h}_j)(Nx_j)^{\rho_j - 1} \right) dx_1 dx_2. \tag{6.22}$$

Известно, что каждый характер индуцируется с единственным примитивным характером и наоборот для каждого q делимого с $\tilde{r}$ существуют единственный характер по $(mod q)$, каждый индуцируется с этим примитивным характером. Более того, если χ^* индуцирует χ, тогда для L функции $L(s, \chi^*)$ и $L(s, \chi)$ имеет единственный нетривиальные нули с положительными вещественными частями[14-19]. Поэтому сумму

$$\sum_{q\leqslant Q, \tilde{r}/q} \prod_{j=1}^{2} \sum_{\chi_j (mod q)} {\sum_{|\gamma_j|\leqslant T}}'$$

в (6.22) можем написать в виде

$$\sum_{r_1\leqslant Q} {\sum_{\chi_1}}^* {\sum_{|\gamma_1|\leqslant T}}' \sum_{r_2\leqslant Q} {\sum_{\chi_2}}^* {\sum_{|\gamma_2|\leqslant T}}' \sum_{q\leqslant Q[r, r_1, r_2]|q},$$

где $\sum^*$ – есть суммирование по $\chi_j(mod r_j) \quad (j = 1, 2)$ с примитивным характером. Следовательно, ввиду равенства (5.2) имеем

$$M_2(2,3) = -N^2 |\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} (Nx_3)^{\tilde{\beta}-1} (Nx_4)^{\tilde{\beta}-1} \sum_{r_1\leqslant Q} {\sum_{\chi_1}}^* {\sum_{|\gamma_1|\leqslant T}}' (Nx_1)^{\rho_1 - 1} \times$$

$$\times \sum_{r_2 \leqslant Q} \sum_{\chi_2}{}^{*} \sum_{|\gamma_2| \leqslant T}{}'(Nx_2)^{\rho_2 - 1} \sum_{q \leqslant Q, [r, r_1, r_2] | q} \varphi^{-4}(q) Z(q, \tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2, \tilde{\chi}) dx_1 dx_2.$$

Согласно (5.5) для $j = \overline{1,4}$ имеем $Nx_j \geq L \geq \sqrt{N}$. Поэтому можем применять лемму 3.4.2 в работе [10] , чтобы ограничить суммы $\sum\limits_{r_j \leqslant Q} \sum\limits_{\chi_j}{}^{*} \sum\limits_{|\gamma_j| \leqslant T}{}'(N\chi_j)^{\rho_j - 1}$ и использовать лемма 5.3 c), чтобы оценить $\sum\limits_{q \leqslant Q, [r, r_1, r_2, r_3] | q} \varphi^{-4}(q) Z(q)$.

Конечным результатом, согласно (6.3) является, что

$$M_2(2,3) \ll N^2 |\Delta_{34}|^{-1} \left(\Omega^4 \exp(-c/\sqrt{\delta})\right) \prod_p s(p) \iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 = M_0 \left(\Omega^4 \exp(-c/\sqrt{\delta})\right).$$

Таким образом, собирая вклад всех таких выражений, получим утверждение леммы, т.е имеем

$$M_2(l,m) \ll M_0 \left(\Omega^4 \exp(-c/\sqrt{\delta})\right).$$

7. Оценка исключительного множества задачи

А теперь можем показать, что

$$I(\bar{b}) \geqslant I_1(\bar{b}) - \left|I_2(\bar{b})\right| > N^2 Q^{-\frac{1}{3}} \tag{7.1}$$

за исключением не более чем

$$E_{2,4}(X) < X^{2-\delta} \tag{7.2}$$

значений $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$. Отсюда в силу обозначения (2.7) вытекает утверждение а) теоремы. Здесь рассмотрим следующие три случаев:

1. Пусть $\delta_q = 0$. Тогда M_3 отсутствует и $\Omega = 1$, поэтому из (6.1), леммы 6.1 и 6.4 при δ достаточно малом, находим:

$$I_1(\bar{b}) = M_1 + M_2 + M_3 + O(NQ^{-1}) = M_0 \left(1 - exp(-\frac{c}{\sqrt{\delta}})\right) - O\left(\frac{N^2}{Q^{\frac{2}{3}}}\right) + O(NQ^{-1}) >$$

$$> 0,01 M_0 - O\left(\frac{N^2}{Q^{\frac{2}{3}}}\right),$$

за исключением не более, чем $E_{2,4}^{(1)}(X) < X^2 Q^{-1}$ значений $\bar{b} \in W_{2,4}(X)$ (см.[20]). Используя (6.4) получим

$$I_1(\bar{b}) > 0,01 \frac{N^2}{B^2 Q^{\frac{1}{100}}} - O\left(\frac{N^2}{Q^{\frac{2}{3}}}\right) > \frac{N^2}{Q^{2\delta + \frac{1}{100}}} \tag{7.3}$$

за исключением не более, чем

$$E_{2,4}^{(2)}(X) < X^2 Q^{-\frac{1}{101}}$$

значений $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$. В силу теоремы 3.1 в работы [11] имеем

$$\left|I_2(\bar{b})\right| < N^2 Q^{-\frac{1}{16}} \tag{7.4}$$

за исключением не более, чем $E_{2,4}^{(3)}(X) < X^2Q^{-\frac{1}{9}}$ значений $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$. Следовательно, из (7.3) имеем

$$I(\bar{b}) > N^2Q^{-2\delta-\frac{1}{100}} - N^2Q^{-\frac{1}{16}} > N^2Q^{-2\delta-\frac{1}{100}}\left(1 - Q^{-\frac{1}{16}+2\delta+\frac{1}{100}}\right)) \tag{7.5}$$

(где $\delta < 0,42$) за исключением не более, чем

$$E_{2,4}(X) = \sum_{1\leqslant i\leqslant 3} E_{2,4}^{(i)}(X) < X^2Q^{-\frac{1}{101}} \tag{7.6}$$

значений $\bar{b} \in W_{2,4}(X)$ (см.[20]).

2. Пусть $\delta_q = 1$ и $\tilde{r} \leqslant Q^{\frac{1}{18}}$ тогда согласно (6.2),(6.3) и (6.19) и из леммы 6.4 имеем:

$$I_1(\bar{b}) = M_1 + M_2 + M_3 + O(N^2Q^{-1}) \geqslant M_0\left(1 - \exp\left(-\frac{c}{\sqrt{\delta}}\right)\right)\Omega^4 - O\left(N^2Q^{-\frac{67}{90}}\right) \tag{7.7}$$

за исключением самый больше $E_{2,4}^{(1)}(X) < X^2Q^{-1}$ пар $(b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$. В силу равенства (2.3) в работе [10] $\Omega = \left(1-\tilde{\beta}\right)\ln T \geqslant c_2\left(\sqrt{\tilde{r}}ln^2r\right)^{-1}lnT > \left(\sqrt{\delta}Q^{\frac{1}{36}}lnQ\right)^{-1}$, поэтому, учитывая (6.4) из (7.7), при достаточно малом δ получим

$$I_1(\bar{b}) \geqslant N^2\left(B^2Q^{\frac{1}{100}+\frac{1}{9}}ln^4Q\right)^{-1} + O\left(Q^{-\frac{67}{90}}\right) \geqslant N^2Q^{-2\delta-\frac{109}{900}}.$$

Отсюда и из (7.4) находим

$$I(\bar{b}) > N^2Q^{-2\delta-\frac{109}{900}} - N^2Q^{-\frac{1}{8}} > N^2Q^{-2\delta-\frac{109}{900}}\left(1 - Q^{-\frac{1}{8}+2\delta+\frac{109}{900}}\right) > N^2Q^{-2\delta-\frac{109}{900}} \tag{7.8}$$

(где $\delta < \frac{7}{450}$) за исключением самый больше

$$E_{2,4}^{(2)}(X) < X^2Q^{-\frac{1}{101}} \tag{7.9}$$

пар $(b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$.

3. Пусть $\delta_q = 1$ и $\tilde{r} > Q^{\frac{1}{18}}$. В этом случае применяя леммы 6.1, 6.4, а также оценку (6.20), из правой части (6.2) выводим

$$I_1(\bar{b}) = M_0\left(1 - O\left(\Omega^4 exp\left(-\frac{c}{\sqrt{\delta}}\right)\right)\right) + O\left(N^2Q^{-\frac{1}{73}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant M_0\left(1 - c'Q^{-\frac{1}{9}}ln^4Qexp\left(-\frac{c}{\sqrt{\delta}}\right)\right) + O\left(N^2Q^{-\frac{1}{71}}\right) > N^2Q^{6\delta-\frac{5}{72}} \tag{7.10}$$

за исключением самый больше $E_{2,4}^{(4)}(X) < X^2Q^{-\frac{1}{36}}$ пары $(b_1, b_2) \in [1, X]^2$.
Таким образом, из (7.10) и (7.4) в этом случае получим

$$I(\bar{b}) > N^2Q^{6\delta-\frac{5}{72}} - N^2Q^{-\frac{1}{16}} > N^2Q^{6\delta-\frac{5}{72}}\left(1 - Q^{-\frac{1}{18}-6\delta+\frac{5}{72}}\right) > N^2Q^{6\delta-\frac{5}{72}} \tag{7.11}$$

(где $\delta < \frac{1}{18}$). Причем (7.11) выполняется для всех $(b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$ за исключением из них

$$E(X) = \sum_{j=1}^{4} E_{2,4}^{(i)}(X) < X^{2-\frac{\delta}{7}}. \tag{7.12}$$

Из (7.5), (7.8) и (7.11) следуют (7.1), а из (7.6), (7.9) и (7.12) получим (7.2). Таким образом доказано утверждение a) теоремы.

Теперь докажем утверждение b) теоремы. Пусть $R(\bar{b})-$ количество решений система (1.2) в простых числах с условием $p_j \leqslant X$ и $\frac{X}{2} \leq b_1, b_2 < X$. Известно, что в (2.7) суммирование ведётся по всем n_j, удовлетворяющим условиям $\frac{X}{2} < n_1, n_2, n_3, n_4 \leqslant X, \sum\limits_{j=1}^{4} a_{i,j} n_j = b_i, (i = 1, 2)$. Поэтому из (2.7) и определение $R(\bar{b})$ находим

$$I(\bar{b}) \ll \ln^4 X \sum_{\substack{p<X \\ a_{i1}p_1 + \ldots + a_{i4}p_4 = b_i}} 1 + \ln^4 X \sum_{k \geqslant 2} \sum_{\substack{p_1^k, p_2^k, p_3^k, p_4^k \leqslant X \\ a_{i1}p_1^k + \ldots + a_{i4}p_4^k = b_i}} 1$$

$$\leqslant R(\bar{b}) \ln^4 X + O\left(X^{\frac{1}{2}} \ln^5 X\right)$$

Если учесть определение $R(\bar{b})$, то $I(\bar{b})$ можем переписат в виде

$$I\left(\bar{b}\right) = I_1\left(\bar{b}\right) + I_2\left(\bar{b}\right) \ll R(\bar{b}) \ln^4 X + O\left(X^{\frac{1}{2}} \ln^5 X\right) \tag{7.13}$$

отсюда получим $R(\bar{b}) \gg \frac{I_1(\bar{b})}{\ln^4 X} + O\left(X^{\frac{1}{2}} \ln N\right)$. Как первом случае, если не существует исключительный нуль L функции Дирихле, то согласно лемму6.1-6.4 и равенство (7.5) имеем: $I(\bar{b}) \geqslant I_1(\bar{b}) - \left|I_2(\bar{b})\right| \geqslant M_0\left(1 - exp(-c\delta^{-\frac{1}{2}})\right) - O\left(N^2 Q^{-\frac{1}{3}}\right) - \left|I_2(\bar{b})\right|$. δ выбираем так, чтобы $\delta < \left(-\frac{ln 0{,}99}{c}\right)^{-2}$. Тогда учитывая (7.4) и (6.4) получим $I(\bar{b}) > N^2 Q^{-2\delta - \frac{1}{100}} - N^2 Q^{-\frac{1}{3}} - N^2 Q^{-\frac{1}{16}} >$ $> N^2 Q^{-2\delta - \frac{1}{100}}\left(1 - Q^{-\frac{19}{48} + 2\delta + \frac{1}{100}}\right)$ за исключением не более, чем $E_{2,4}(X) < X^{2 - 2\delta - \frac{1}{101}}$ значений $\bar{b} \in W_{2,4}(X)$.

Из равенства (7.13) находим $R(\bar{b}) \geqslant \frac{1}{ln^4 X}\left(I_1(\bar{b}) - |I_2(\bar{b})|\right) - O(X^{\frac{1}{2}} ln X.)$ и учитивая, что $\left|\bar{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \leqslant \sqrt{2} X, \quad N = 18 B^3 X$ и $K = 9\sqrt{2} B^3 \left|\bar{b}\right|$ при достаточно малом δ из (7.5),(7.8),(7.11) получим утверждение теоремы, т.е.

$$R(\bar{b}) \geqslant \frac{K^{2-\delta}}{\ln^4 K}, \quad \text{где} \quad K = 9\sqrt{2} B^3 \left|\bar{b}\right|$$

за исключением не более $E_{2,4}(X) < X^2 Q^{-1} = X^{2 - \delta c_1}$ пар $(b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$ (где $1 < c_1 < 4$).

8. Заключение

Из выше изложенного следует, что система уравнение $b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3 + a_{i4}p_4, (i = 1, 2)$ разрешима в простых числах p_1, p_2, p_3, p_4 для всех пар $(b_1, b_2), 1 < b_1, b_2 \leq X$, за исключением не более чем $X^{2-\delta}$ пар из них и $R(\bar{b})-$ число решений этой системи при заданном $\bar{b} = (b_1, b_2), 1 < b_1, b_2 \leq X$ удовлетворяет неравенству $R(\bar{b}) \geqslant \frac{K^{2-\delta}}{(\ln K)^4}$. Здесь $\delta (0 < \delta < 1)$ достаточно малое, эффективно вычисляемое постоянное $X > B^A, B = \underbrace{max}_{i=1,2; j=\overline{1,4}} 3|a_{ij}|$, достаточно большое постоянное.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu Fang. On the solutions of the systems of linear equations with prime variables // Acta Math. Sinica.-1957.-V.7.-P.102-121.

2. Ming-Chit Liu and Kai-Tsang. On pairs of linear equations in three prime and application to Goldbach's problem // J.Reine angew.Math.-1989.-V.399.-P.109-136.

3. Аллаков И. Об условиях разрешимости системы линейных дифонтовых уравнений в простых числах. Известия ВУЗов. «Математика».-Казань, 2006. № 1-С.3-10

4. Аллаков И. Об условиях разрешимости системы линейных уравнений в простых числах.// Вестник ТерГУ-Ташкент 2005.№ 2.-С.146-157.

5. Абраев Б.Х., Аллакова Д.И. О решение системы линейных уравнений в простых числах. Материалы научно-технической конференции «Прикладная математика и информационная безопасность» Ташкент. 2014 г. 28-30 апреля, С.50-54

6. Abrayev B.KH., Allakov I. On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers //Uzb.mat.jurnal. -2020.-№ 3.-P.16-24.

7. Аллаков И.,Абраев Б.Х. О условиях разрешимости пары линейных уравнений с четырьмя неизвестными в простых числах.(Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории) Тула.23-26 сентябрь 2020. С.6-8.

8. Davenport H.Multiplicative number theory.Third edition.Springer.New York.2000.177p.

9. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. -М.: Наука.1983. -199с.

10. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. Термез.Изд. «Сурхан нашр» 2021.160с.

11. Абраев Б.Х. Исследование сингулярного ряда в задаче об одновременном представлении пары чисел суммой четырёх простых чисел. Научный вестник.Самаркандский государственный университет, № 1 (131), 2022г. С.68-77.

12. Vaughan R.C.The Hardy-Littlewood method. Second edition. Cambridge University Press. 1997.232p.

13. Подвигин. И.В. Основы функционального анализа. Новосибирск. Изд. Новосибирский государственный университет, 2017. 184с.

14. Бабаназаров Б., Тулаганова М.И., Файнлейб А.С. О разрешимости системы линейных уравнений в простых числах // Докл. АН РУз.- Ташкент, 1992. - № 6-7. - С.7-9.

15. Аллаков И., Исраилов М.И. О разрешимости системы линейных уравнений в простых числах // Докл. АН РУз. –Ташкент, 1992. - № 10-11. -С.12-15.

16. Аллаков И.,Сафаров А.Ш. Об одной аддитивной проблеме Хуа-Ло- Кена.Чебышевский сборник, 2019, т.20, № 4, с.32-45.

17. Liu M.C., Tsang K.M. Small prime solutions of linear equations // Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval Uniyersity. Cand. Math. Soc. Berlin- New York . - 1989. - P.595-624.

18. Allakov I.A., Israilov M.I. About Simultaneous Representation of Two Natural Numbers by Sum of Three Primes // Computer Algebra in Scientific Computing, CASC-2000: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. -2000. - P.13-20.

19. Аллаков И. Об одновременном представлении чисел суммой простых чисел. Материалы международной конференции «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа». Душанбе, 2019, 13-14 декабря, с.46-49.

20. Аллаков И. Абраев Б.Х. О разрешимости одной системы линейных уравнений с целыми коэффициентами в простых числах. Бюллетень Института математики 2022, Vol. 5, № 6, стр. 37-49

REFERENCES

1. Wu Fang . On the solutions of the systems of linear equations with prime variables. Acta Math. Sinica.-V.7.-P.102-121 (1957).

2. Ming-Chit Liu and Kai-Tsang. On pairs of linear equations in three prime and application to Goldbach's problem. J. Reine angew . Math.-V.399.-P.109-136 (1989).

3. Allakov I. On the conditions for the solvability of a system of linear difont equations in prime numbers. Proceedings of universities. "Mathematics ". - Kazan, V.1.p.3-10 (2006). (in Russian)

4. Allakov I. On the conditions for the solvability of a system of linear equations in prime numbers. Bulletin of TerSU - Tashkent No.2. - P. 146-157 (2005). (in Russian)

5. Abraev B.Kh. , Allakova D.I. On the solution of a system of linear equations in prime numbers. Materials of the scientific and technical conference "Applied Mathematics and Information Security"Tashkent. pp.50-54 (2014). (in Russian)

6. Abrayev B.KH., Allakov I. On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers. Uzb.mat.jurnal . -No.3.-P.16-24 (2020).

7. Allakov I. Abrayev B.KH. On the conditions for the solvability of a pair of linear equations in four unknowns in prime numbers. (Algebra , number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history) Tula. pp.6-8 (2020). (in Russian)

8. Davenport H. Multiplicative number theory. (Third edition.Springer.New York.2000).

9. Karatsuba A.A. Fundamentals of analytic number theory. (Nauka, M., 1983). (in Russian).

10. Allakov I. Estimation of trigonometric sums and their applications to the solution of some additive problems in number theory. (Surkhan nashr , Termez. 2021). (in Russian).

11. Abrayev B.Kh. Investigation of a singular series in the problem of simultaneous representation of a pair of numbers by the sum of four prime numbers. (Scientific Bulletin. Samarkand State University. 1(131),p.68-77.2022) (in Russian).

12. Vaughan R.C. The Hardy-Littlwood method. (Second edition. Cambridge University Press. 1997).

13. Podvigin I.V. Fundamentals of functional analysis. (Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2017). (in Russian).

14. Babanazarov B., Tulaganov M.I., Fineleib A.S. On the solvability of a system of linear equations in prime numbers // Dokl. AN RUz. - Tashkent, 1992. - No. 6-7. - P.7-9.

15. Allakov I., Israilov M.I. On the solvability of a system of linear equations in prime numbers // Dokl. AN RUz. - Tashkent, 1992. - No. 10-11. -p.12-15.

16. Allakov I., Safarov A.Sh. On one additive problem of Hua-Lo- Ken. Chebyshevsky collection, 2019, vol. 20, no. 4, pp. 32-45.(in Russian).

17. Liu M.C., Tsang K.M. Small prime solutions of linear equations. Proc. Intern. Number. Th.Conf. 1987. Laval University. Cand. Math.Soc. Berlin-New York p.595-624(1989).

18. Allakov I.A., Israilov M.I. About Simultaneous Representation of Two Natural Numbers by Sum of Three Primes // Computer Algebra in Scientific Computing, CASC-2000: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. -2000. - R.13-20.

19. Allakov I. On the simultaneous representation of numbers as a sum of primes. Proceedings of the international conference "Modern problems and applications of algebra, number theory and mathematical analysis". Dushanbe, 2019, December 13-14, pp. 46-49.

20. Allakov I. Abrayev B.KH. On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers. Bulletin of the Institute of Mathematics 2022, Vol. 5, № 6, pp.37-49 (in Russian).

Получено: 01.04.2023
Принято в печать: 14.06.2023