ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 2.

УДК 519.716 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-5-14

Базисы полных систем рациональных функций с рациональными коэффициентами[1]

Н. Ф. Алексиадис

Алексиадис Никос Филиппович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).
e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Аннотация

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики, поскольку они являются математическими моделями реальных и абстрактных управляющих систем.

Проблематика функциональных систем обширна. Одной из основных задач является проблема полноты, состоящая в описании таких подсистем функций, которые являются полными, т.е. из этих функций с помощью заданных операций над ними можно получить все функции.

В статье рассматривается функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами, где в качестве операций выступают операции суперпозиции и для этой системы исследуется задача о базисах полных систем, а именно:

- *Имеет ли каждая полная система (конечный) базис?*
- *Существует ли для любого положительного целого числа n базис полной системы, состоящий из n функций?*
- *Найти конкретные базисы из n функций* ($n = 1, 2, 3, ...$).

Ответы на все эти вопросы положительные, что и является основным результатом данной статьи.

Ключевые слова: функциональная система, проблема полноты, полная система, рациональная функция, базис.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Н. Ф. Алексиадис. Базисы полных систем рациональных функций с рациональными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 5–14.

[1]Работа выполнена в МГУ им. М.В. Ломоносова

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 519.716 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-5-14

Bases of complete systems of rational functions with rational coefficients

N. Ph. Aleksiadis

Aleksiadis Nikos Filippovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; National Research University "MPEI" (Moscow).
e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Abstract

A functional system is a set of functions endowed with a set of operations on these functions. The operations allow one to obtain new functions from the existing ones.

Functional systems are mathematical models of real and abstract control systems and thus are one of the main objects of discrete mathematics and mathematical cybernetic.

The problems in the area of functional systems are extensive. One of the main problems is deciding completeness that consists in the description of all subsets of functions that are complete, i.e. generate the whole set.

In our paper we consider the functional system of rational functions with rational coefficients endowed with the superposition operation. We investigate the problem of bases of complete systems, namely:

- *Does every complete system have a (finite) basis?*;
- *For any positive integer n, is there a basis of a complete system consisting of n functions?*
- *a number of examples of basis consisting of n functions are presented explicitly* $(n = 1, 2, 3, ...)$.

The answers to all these questions are positive, which is the main result of this article.

Keywords: functional system, completeness problem, complete system, rational function, basis.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
N. Ph. Aleksiadis, 2023, "Bases of complete systems of rational functions with rational coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 5–14.

1. Введение

Эта статья является расширенной версией моего доклада о базисах рациональных функций с рациональными коэффициентами, сделанного в сентябре 2021 года на XX Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова [1] и ее можно считать продолжением моих статьей [2] и [3].

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики и отражают следующие основные особенности реальных и абстрактных управляющих систем: функционирование (в функциональных системах - это функции), правила построения более сложных управляющих систем из заданных и описание функционирования сложных систем по функционированию их компонент (последние два момента отражены в операциях функциональных систем).

Функциональные системы обладают определенной спецификой, состоящей в рассмотрении задач и подходов, возникающих при их исследовании с позиции математической кибернетики, математической логики и алгебры. Так, с позиции математической кибернетики функциональные системы рассматриваются как модели, описывающие функционирование сложных кибернетических систем; с позиции математической логики – как модели логик, т.е. системы предложений с логическими операциями над ними; с позиции алгебры – как универсальные алгебры.

В качестве обобщений реальных функциональных систем могут в принципе рассматриваться и универсальные алгебры, однако, в этом случае теряются основные достоинства реальных систем и, прежде всего, такие, как конструктивность множества и операций.

Содержательная связь функциональных систем с реальными кибернетическими моделями управляющих систем определяет, с одной стороны, серию существенных требований, которые накладываются на функциональные системы, а с другой стороны, порождает класс важных задач, имеющих как теоретическое, так и прикладное значение.

Проблематика функциональных систем обширна. К числу основных задач для функциональных систем относятся проблемы полноты и выразимости, о базисах, о синтезе и анализе, о тождественных преобразованиях и другие.

При исследовании проблемы полноты одной из основных задач является задача о базисах, т.е. о минимальных полных системах (минимум понимаем в том смысле, что никакая собственная подсистема полной системы не является опять полной).

В настоящей работе решается эта задача для функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами, которая играет ключевую роль не только в самой дискретной математике и математической кибернетике, но и во многих других областях математики, например, в теории функций (аппроксимационные теоремы Чебышева и Вейерштрасса), в вычислительной математике и технике (построение и анализ вычислительных чипов и нейронных сетей). Актуальность полученных результатов также состоит и в развитии самой теории функциональных систем как в плане охвата новых модельных объектов типа рациональных функций, так и в вычленении позитивных результатов типа существования базисов полных систем, а также в отсечении негативных ситуаций, когда указанных базисов не существует.

При изложении материала в основном используется терминология книг [7] и [11].

Несмотря на то, что мы используем стандартные обозначения и общеизвестные понятия дискретной математики (в частности, теории функциональных систем), с целью корректного понимания изложенного, все-таки следует уточнить некоторые моменты.

Функциональная система (ф.с.) $\mathbf{F}$ – это пара вида $\mathbf{F} = (F, O)$, где F – множество функций, а O множество операций над функциями из F, при этом каждая операция из O замкнута относительно множества F.

Для произвольного подмножества $A \subseteq F$ обозначим через $[A]$ множество всех функций из F, которые получаются из функций множества A с помощью конечного числа применения операций из O. Множество $[A]$ называется *замыканием множества* A.

Множество $A\,(A \subseteq F)$ называется *замкнутым* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = A$.

Замкнутое множество принято называть *замкнутым классом.*

Множество $A\,(A \subseteq F)$ называется *полным* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = F$.

Полное множество принято называть *полной системой.*

Функциональная система **F** называется *конечно-порожденной*, если в **F** существует конечная полная система.

Проблематика теории функциональных систем обширна. Одной из основных проблем является *проблема полноты, состоящая в описании всех подмножеств A множества функций F, которые являются полными в ф.с. **F**, т.е. $[A] = F$.*

Как известно, изучение проблемы полноты осуществлялось путем исследования конкретных функциональных систем: 2-значная логика (Пост [14]), 3-значная логика (Яблонский [12]), 4-значная логика (Мальцев [8]), k-значная логика (Розенберг [15], Саломаа [9], Слупецкий [16], Яблонский [13]), автоматные функции (Кудрявцев [6], Часовских [10]), счетнозначные логики (Гаврилов [4]). В этих функциональных системах решение проблемы полноты было сведено к описанию всех предполных классов (максимальных подалгебр). Метод решения проблемы полноты в терминах предполных классов стал после этого одним из основных (можно сказать, стало традицией).

С проблемой полноты связана и задача о базисах, т.е. изучение вопроса о минимальных полных системах.

Множество A ($A \subseteq F$) называется *базисом* в ф.с. **F**, если A полная система, а никакая его собственная подсистема не является полной в ф.с. **F**.

Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется A-функцией, если $[\{f(x_1, ..., x_n)\}] = F$, т.е. если из одной-единственной функции $f(x_1, ..., x_n)$ с помощью операций из O можно получить все функции из F.

Введем несколько стандартных обозначений, необходимых для дальнейшего изложения.

N — множества всех натуральных (включая 0).

Z — множества всех рациональных чисел.

Q — множества всех рациональных чисел.

$\equiv$ — обозначим, по определению, тождественно равно.

Для удобства изложения полагаем, что $0^0 = 1$.

2. Функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами

Выражение вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$, где $n, k_1, k_2, \ldots, k_n \in N$, а $c \in Q$ называется *мономом с рациональным коэффициентом*, зависящим от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой c, т.е. мономом с рациональным коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с рациональными коэффициентами называется *полиномом с рациональными коэффициентами.*

Функция вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{g(x_1, \ldots, x_n)}{h(x_1, \ldots, x_n)},$$

где $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $h(x_1, \ldots, x_n)$ — полиномы с рациональными коэффициентами, при этом $h(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0$, называется *рациональной функцией с рациональными коэффициентами.*

Рациональные функции с рациональными коэффициентами будем называть также rq-функциями.

Обозначим через F_{RQ} множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Пришло время определить основной объект нашего исследования — функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ}$ — это пара $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$, где F_{RQ} — множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами, а O — множество операции суперпозиции. Операции суперпозиции включают в себя:

- *перестановку переменных,*
- *переименование переменных (без отождествления),*
- *отождествление переменных,*
- *введение фиктивной переменной,*
- *удаление фиктивной переменной,*
- *подстановку одной функции в другую.*

Заметим, что это определение функциональной системы $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{RQ} является опять функцией из F_{RQ}.

3. Базисы полных систем рациональных функций с рациональными коэффициентами

Целью настоящей работы является исследование задачи о базисах полных систем в функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$:

- *Имеет ли каждая полная система (конечный) базис?*
- *Существует ли для любого положительного целого числа n базис полной системы, состоящий из n функций?*
- *Найти конкретные базисы из n функций* $(n = 1, 2, 3, ...)$.

Теорема 1. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$ каждая полная система имеет базис, причем конечный.*

Доказательство. Доказательство данного факта следует из того, что ф.с. $\mathbf{F}_{RQ}$ является конечно-порожденной [2], а как известно, в конечно-порожденной функциональной системе каждая полная система имеет базис, причем конечный (см. [7]).

Теорема доказана. □

А для установления истинности второго утверждения (существуют базисы полных систем любой конечной мощности) нам понадобится несколько вспомогательных утверждений (лемм).

Лемма 1 (см. [5]). *Если $xy \neq 0$, то диофантово уравнение $x^4 + 4y^4 = z^2$ не имеет решения в множестве Z.*

Лемма 2. *Квадратный трехчлен $a^4x^2 + x$ не принимает значения n^4* $(n = 1, 2, 3, ...)$ *при любых рациональных значениях параметра $a \neq 0$ и переменной x.*

Доказательство. Надо показать, что для любых рациональных значений параметра $a \neq 0$, переменной x и положительных целых значений n уравнение

$$a^4x^2 + x = n^4$$

не имеет решения. Действительно,

$$a^4x^2 + x = n^4 \leftrightarrow a^4x^2 + x - n^4 = 0 \leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a^4n^4}}{2a^4}.$$

Так как a произвольное рациональное число, кроме 0, то его можно представить в виде $a = \frac{m}{k}$, где $m \in Z, k \in N$ при этом $k \neq 0$ и $m \neq 0$.

Далее, имеем

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4m^4n^4}{k^4}}}{\frac{2m^4}{k^4}} = \frac{k^2 \pm k^2\sqrt{k^4 + 4m^4n^4}}{2m^4} =$$

$$= \frac{k^2 \pm k^2\sqrt{k^4 + 4(mn)^4}}{2m^4} = \frac{k^2 \pm k^2\sqrt{k^4 + 4l^4}}{2m^4},$$

где $l = mn$ при этом $l \neq 0$, (так как $m \neq 0$ и $n \neq 0$).

Понятно, что x является рациональным решением тогда и только тогда, когда $k^4 + 4l^4$ является полным квадратом, при этом $kl \neq 0$ (по условию), т.е. когда уравнение $k^4 + 4l^4 = r^2$ имеет решение в Z при $kl \neq 0$. Но, по лемме (1) это уравнение не имеет решения.

Лемма доказана. □

Теорема 2. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$ для любого натурального $n \geq 1$ существует базис, состоящий ровно из n функций.*

Доказательство. Сразу отметим, что при $n = 1$ существует базис, состоящий из одной-единственной rq-функции и, как было установлено в [2], такой rq-функцией является

$$f(x, y, z, t, u, v) = (t - u) \cdot \frac{x}{v} + xz - yz + z + 1.$$

Теперь пусть $n > 1$. Тогда обозначим через

$$F(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x, y, z, t, u, v) \equiv$$

$$[(x_1 - 1^4)^2 + (x_2 - 2^4)^2 + ... + (x_{n-1} - (n-1)^4)^2]^4 f^2(x, y, z, t, u, v) + f(x, y, z, t, u, v)$$

и рассмотрим систему из n функций

$$B = \{F(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x, y, z, t, u, v), 1^4, 2^4, 3^4, ..., (n-1)^4\}.$$

Докажем, что B является базисом в функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$.

Для этого надо показать, что в ф. с. $\mathbf{F}_{RQ}$

1. B является полной системой;

2. Никакая ее собственная подсистема не является полной, другими словами, если из этой системы удалить какую-нибудь одну функцию, то полученная подсистема не будет полной.

Первый факт легко доказать. Действительно, суперпозиция

$$F(1^4, 2^4, 3^4, ..., (n-1)^4, x, y, z, t, u, v) = f(x, y, z, t, u, v)$$

является A-функцией (см. выше). Следовательно, с помощью операций суперпозиции можно получить и все rq-функции.

Итак, B полная система.

Теперь докажем второй факт.

Если из полной системы B удалить функцию $F(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x, y, z, t, u, v)$, то полученная подсистема

$$B_{\bar{F}} = \{1^4, 2^4, 3^4, ..., (n-1)^4\}$$

состоит из одних констант, поэтому

$$[B_{\bar{F}}] = B_{\bar{F}} \neq F_{RQ}.$$

Следовательно, $B_{\bar{F}}$ не является полной.

Если из B удалить любую константу k ($k \in \{1^4, 2^4, 3^4, ..., (n-1)^4\}$), то полученная подсистема

$$B_{\bar{k}} = \{F(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x, y, z, t, u, v), 1^4, 2^4, ..., (k-1)^4, (k+1)^4, ..., (n-1)^4\}$$

состоит из таких rq-функций, которые не принимают все значение из Q, т.е. пропускают хотя бы одно значения из Q. Для этого достаточно заметить, что функция

$$F(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x, y, z, t, u, v)$$

имеет такую же структуру, какую имеет квадратный трехчлен a^4x^2+x, который в силу леммы (2) не принимает значения n^4 ($n = 1, 2, 3, ...$) при любых рациональных значениях параметра $a \neq 0$ и переменной x. Действительно, в нашем случае

$$a = (x_1 - 1^4)^2 + (x_2 - 2^4)^2 ... + (x_{k-1} - (k-1)^4)^2 +$$

$$+(x_k - k^4)^2 + (x_{k+1} - (k+1)^4)^2 + ... + (x_{n-1} - (n-1)^4)^2,$$

а в качестве переменной x выступает функция $f(x, y, z, t, u, v)$, при этом условие, что первый коэффициент квадратного трехчлена $a \neq 0$ выполняется, т.к.

$$(x_1 - 1^4)^2 + (x_2 - 2^4)^2 ... + (x_{k-1} - (k-1)^4)^2 +$$

$$+(x_k - k^4)^2 + (x_{k+1} - (k+1)^4)^2 + ... + (x_{n-1} - (n-1)^4)^2 = 0$$

означает, что

$$x_1 = 1^4, x_2 = 2^4, ..., x_{k-1} = (k-1)^4, x_k = k^4, x_{k+1} = (k+1)^4, ..., x_{n-1} = (n-1)^4,$$

но в данном случае у нас нет константы k^4 и, следовательно, в силу леммы (2) функция $F(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x, y, z, t, u, v)$ не принимает все значения из Q.

Итак,из функций множества $B_{\bar{k}}$ с помощью операций суперпозиции можно получить только rq-функций, которые "пропускают" хотя бы одно значение из Q, т.е. невозможно получить rq-функции, которые принимают все значения из Q. Поэтому $B_{\bar{k}}$−неполная система.

Из вышесказанного следует, что B является базисом.

Теорема доказана. □

Замечание 1. *Следует отметить, что конкретным примером базиса из n элементов является базис, приведенный в доказательстве теоремы (2), а именно,*

$$\{[(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + ... + (x_{n-1} - (n-1))^2]^4 f^2(x, y, z, t, u, v) + f(x, y, z, t, u, v),$$

$$1^4, 2^4, 3^4, ..., (n-1)^4\}.$$

4. Заключение

В заключении коротко отметим, что цель, поставленная в начале статьи, достигнута: доказано, что в функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$ каждая полная система имеет (конечный) базис и для любого положительного целого числа n существует базис полной системы, состоящий из n функций и такими базисами являются

- *при* $n = 1$: *базис*

$$B = \{f(x, y, z, t, u, v) = (t - u) \cdot \frac{x}{v} + xz - yz + z + 1\};$$

- *при* $n > 1$: *базис*

$$B = \{\{[(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + ... + (x_{n-1} - (n-1))^2]^4 f^2(x, y, z, t, u, v) + f(x, y, z, t, u, v),$$

$$1^4, 2^4, 3^4, ..., (n-1)^4\}.$$

Автор выражает глубокую благодарность старшему научному сотруднику МГУ им. М.В.Ломоносова А.В. Галатенко за поддержку при выполнении данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексиадис Н. Ф. О базисах рациональных функций с рациональными коэффициентами // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XX Международной конференции, посвященной 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова (Тула, 21–24 сентября 2021 года). Тула, 2021. С. 80-83.

2. Алексиадис Н. Ф. Рациональные А-функции с рациональными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 11–19. (DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19).

3. Н. Ф. Алексиадис. Замкнутые классы в функциональной системе полиномов с действительными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 5–14. DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-5-14.

4. Гаврилов Г. П. О функциональной полноте в счетнозначной логике // Проблемы кибернетики. 1965 (М. Наука). вып. 15. С. 5-64.

5. Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах. — М.: Изд–во Наука, 1978. 63 с.

6. Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных системах, связанных с автоматами //В кн.: Проблемы кибернетики. 1965 (М. Наука). вып. 13. С. 45-74.

7. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд–во МГУ, 1982. 157 с.

8. Мальцев А. И. Избранные труды. Т. II — М.: Изд–во Наука, 1976. 388 с.

9. Саломаа А. Некоторые критерии полноты для множеств функций многозначной логики //В кн.: Кибернетический сборник. 1964 (М.: Мир). Т.8. С. 7-32.

10. Часовских А. А. Проблема полноты в классах линейных автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. Т. 22, вып. 2. С. 151-154.

11. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Изд–во Наука, 1986. 384 с.

12. Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // ДАН СССР. 1954. 95. № 6. С. 1153–1156.

13. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.

14. Post E. Two-valued iterative sistems of mathematical logik. — Prinston. 1941.

15. Rosenberg Y. Uber die functionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. // Praha, Rozpravi Ceskoslovenska Acodemie Ved. v. 80, №4. P. 393,1970.

16. Slupecki J. Kriterium pelnosci wielowar — tosciowych systemow logiki zdan. // Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsivie. 1939. Cl. III. v. 32. P. 102-128.

REFERENCES

1. N. Ph. Aleksiadis, 2021, “On the bases of rational functions with rational coefficients”, *Proc. 20th Int. Conf. “Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history”*, pp. 80-83.

2. N. Ph. Aleksiadis, 2022, “Rational A-functions with rational co efficients”, Chebyshevskii sbornik, vol. 23, no. 4, pp. 11–19. (DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19)

3. N. Ph. Aleksiadis, 2023, “Closed classes in the functional system of polynomials with real Coefficients”, Chebyshevskii sbornik, vol. 24, № 1, pp. 5–14. DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-5-14.

4. Gavrilov, G. P. 1965, “On functional completeness in countable logic”, *Problems of cybernetics*, vol. 15, pp. 5-64.

5. Gelfond, A. O. 1978, “Solving equations in integers”, Moscow.:Science, 63 p.

6. Kudryavtsev, V. B. 1965, “On the powers of sets of discrete sets of some functional systems related to automata”, *Problems of cybernetics*, vol. 13, pp. 45-74.

7. Kudryavtsev, V. B. 1982, “Functional systems ”, Moscow: Publishing House of Mekh-mat. fac. MSU., 157 p.

8. Maltsev, A. I. 1976, “Selected works”. vol. II — Moscow: Publishing House “Nauka”, 388 p.

9. Salomaa, A. 1963, “Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain”, II. Ibid., Ser. A I 63, 19 pp.

10. Chasavskikh, A. A. 2018, “The problem of completeness in classes of linear automata”, *Intelligent systems. Theory and Applications*, vol. 22(2), pp. 151-154.

11. Yablonsky, S. V. 1986, “Introduction to discrete mathematics”, Moscow.:Science, 384 p.

12. Yablonsky, S. V. 1954, “On functional completeness in three-digit calculus”, *DAN USSR*, vol. 95(6), pp. 1153–1156.

13. Yablonsky, S. V. 1958, “Functional constructions in k-valued logic”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol.51, pp. 5–142.

14. Post, E. 1941,“Two-valued iterative sistems of mathematical logic”. — Prinston.

15. Rosenberg, Y.1970, “Uber die functionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken”. *Praha, Rozpravi Ceskoslovenska Acodemie Ved.*, v. 80, №4, p. 393.

16. Slupecki, J. 1939,“ Kriterium pelnosci wielowar — tosciowych systemow logiki zdan”. *Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsivie*, cl. III, v. 32, pp. 102-128.

Получено: 25.03.2023
Принято в печать: 14.06.2023