ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 3 (2015)

УДК 517.53, 517.55

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФОРМУЛАХ

И. И. Баврин (г. Москва)
ivbavrin@yandex.ru

Аннотация

Одним из мощных средств исследования в комплексном анализе являются интегральные представления.

Теория аналитических функций комплексного переменного построена в большей степени на основе интегральной формулы Коши [1].

Значительным классом некорректно поставленных задач, возникших в физике, технике и других областях знаний, являются так называемые обратные задачи [2] — [4].

Автором [5] — [6] для функции $f(z)$, голоморфной в круге $K_R : |z| < < R$, установлена интегральная формула (она в данной статье приведена во введении как формула (1)), являющаяся решением обратной задачи для интегральной формулы Коши в круге K_R. Формула (1), в отличие от формулы Коши, по значениям функции $f(z)$ на любой окружности C_r : $|z| = r\,(0 < r < R)$, лежащей в круге K_R, или на произвольной замкнутой кусочно-гладкой линии, охватывающей начало координат и содержащейся внутри окружности C_R — границы круга K_R, выражает ее значения во всех остальных точках круга K_R. В [5] получены и решения обратных задач для формул Пуассона [1] и Шварца [7], а в [5] — [6] — и для формул производных формулы Коши [1].

Обратная задача для интегральной формулы Пуассона использована [8] для обобщения формулы Пуассона — Иенсена [7], из которого формулы Пуассона — Иенсена и Иенсена вытекают как частные случаи.

Аналогично использована [9] и обратная задача для обобщения формулы Шварца — Иенсена [7].

В случае кольца D: $r < |z| < R$ установлено [10] интегральное представление (в [10] это формула (1)) для голоморфной в области D функции $f(z)$, которая, в отличие от формулы Коши для кольца, по значениям $f(z)$ на произвольной замкнутой кусочно-гладкой линии, охватывающей начало координат и содержащейся внутри кольца D, выражает её значения во всех остальных точках этого кольца, т.е. в [10] решена обратная задача для формулы Коши и в случае кольца D.

В статье [11] в случае круга K_R найдено решение обратных задач для интегральных формул, приведённых в [12] (в [12] это формулы (3) и (4)),

справедливые для функций, голоморфных в звёздной области относительно начала координат.

Формула Коши имеет место и в случае многих комплексных переменных (см., например, [13]).

В статье [14] в случае поликруга

$$E_R = E(R_1, \ldots, R_n) = \{z = (z_1, \ldots, z_n) : |z_1| < R_1, \ldots, |z_n| < R_n\}$$

решены обратные задачи как для формулы Коши, так и для вытекающих из неё формул (аналогичные формулам Шварца и Пуассона в случае одного комплексного переменного).

Решены обратные задачи [15] и в случае интегральных формул Темлякова (об этих формулах см., например, [16]).

Наконец, в настоящей статье в случае выпуклой области и круга (соответственно теорема 2 и 3) установлены новые интегральные представления (3) и (5), из которых (3) есть интегральное представление для функций, голоморфных в выпуклой области, а (5) — решение обратной задачи для интегрального представления (3) в круге K_R.

Ключевые слова: голоморфная функция, интегральная формула Коши, интегральная формула Пуассона, интегральная формула Шварца, формула Пуассона — Иенсена, формула Шварца — Иенсена, звёздная область, выпуклая область, поликруг.

Библиография: 16 названий.

INVERSE PROBLEMS IN INTEGRAL FORMULAS

I. I. Bavrin (Moscow)

Abstract

In complex analysis an integral representations are one of the powerful tools of research.

The theory of analytic functions of complex variables is largely built on the basis of Cauchy's integral formula [1].

An important class of ill-posed problems arising in physics, engineering and other fields, are so-called inverse problems [2] — [4].

In [5] - [6] author sets an integral formula for the function $f(z)$, holomorphic in the circle $K_R : |z| < R$, (it is in the introduction of this article as formula (1)) is the solution of the inverse problem for Cauchy's integral formula in the circle K_R. . Equation (1), unlike the Cauchy formula for the values of the function $f(z)$ on any circumference $C_r : \; |z| = r \, (0 < r < R)$ lying in a circle K_R, or an arbitrary closed piecewise smooth lines covering the origin and contained within a circle circle C_R — the circle border K_R expresses its values at all other points in the range of K_R. In [5] the solution of inverse problems for Poisson's formula [1] and Schwartz' formula [7] and the formulas for derivatives of Cauchy formula [1] in [5] — [6] are obtained.

The inverse problem for the Poisson integral formula is used in [8] for generalization of Poisson — Jensen's formula [7] from which Poisson – Jensen's formula and Jensen's formula follow as a special cases.

Similarly, [9] and the inverse problem are used for the generalization of the Schwartz — Jensen's formula [7].

In the case of ring D: $r < |z| < R$ to [10] the integral representation is set (in [10] is a formula (1)) for a holomorphic function in D D which, unlike the Cauchy formula for the ring, according to the values on an arbitrary closed piecewise smooth lines hugging origin and contained within the ring D, expresses its values at all other points of the rings, ie [10] the inverse problem for the Cauchy formula in the case of ring D is solved.

In the article [11] for the case of the circle K_R the solution of inverse problems for integral formulas is found and given in [12] (in [12] these are formulas (3) and (4)) are valid for functions holomorphic in a star domain with respect to the origin.

The Cauchy formula holds in the case of several complex variables (see., Eg, [13]).

In the article [14] for the case of polydisc

$$E_R = E(R_1, \dots, R_n) = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_1| < R_1, \dots, |z_n| < R_n\}$$

the inverse problems for the Cauchy formula and by deriving from its are resolved (analogous to the Poisson formulas for the case of one complex variable).

The inverse problems [15] in the case of integral Temlyakov's formulas are solved (these are formulas, see., Eg, [16]).

Finally, in this article, in the case of a convex domain and circle (respectively Theorem 2 and 3) new integral representations (3) and (5) are set, of which (3) is an integral representation for holomorphic functions in a convex domain, and (5) is a solution of the inverse problem for the integral representation (3) in a circle K_R.

Keywords: holomorphic function, Cauchy integral formula, Poisson integral formula, Schwarz integral formula, Poisson — Jensen formula, Schwartz — Jensen formula, star domain, convex domain, polydisc.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

Как уже отмечалось, значительным классом некорректно поставленных задач, возникших в физике, технике и других областях знаний, являются так называемые обратные задачи (см., например, [2] — [4]).

Автором [6] для функции $f(z)$, голоморфной в круге $K_R : |z| < R$, найдена интегральная формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} e^{-t}dt \int_{C_r} e^{\frac{zt}{\xi}} \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi, \tag{1}$$

где $C_r: \ |\xi| = r \, (0 < r < R)$, являющаяся решением обратной задачи как для интегральной формулы Коши [1].

Эта формула, в отличие от формулы Коши, по значениям функции $f(z)$ на любой окружности $C_r: \ |\xi| = r \, (0 < r < R)$, лежащей в круге K_R, выражает ее значения во всех остальных точках круга K_R.

В настоящем сообщении в случае выпуклой области и круга (соответственно теоремы 2 и 3) получены новые интегральные представления, из которых одно (теорема 2) есть интегральное представление для функции, голоморфной в выпуклой области B, а другое (теорема 3) — обратное в случае круга K_R к первому.

2. Основная теорема

Пусть B — выпуклая область в плоскости комплексного переменного z, $f(z)$ — функция, голоморфная в области B.

Предположим, что τ — вещественная переменная, изменяющаяся в сегменте $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Справедлива теорема 1.

Теорема 1. *Если функция $f(z)$ голоморфна в области B, то в B имеет место формула*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \int_0^1 f'(\tau z + (1-\tau) z_0) d\tau, \tag{2}$$

где z_0 — фиксированная произвольная точка области B.

Доказательство. Пусть z — произвольная точка области B. Так как область B является выпуклой, то при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ точки $(\tau z + (1-\tau) z_0) \in B$. Теперь имеем

$$\begin{aligned}(z - z_0) \int_0^1 f'(\tau z + (1-\tau) z_0) d\tau &= \int_0^1 f'_\tau(\tau z + (1-\tau) z_0) d\tau = \\ = \quad f(\tau z + (1-\tau) z_0)\Big|_0^1 &= f(z) - f(z_0),\end{aligned}$$

что и доказывает формулу (2).

3. Следствия из основной теоремы

Следствие 1. *При $z_0 = 0$* [1] *имеем известную формулу автора (см., например, [12])*

$$f(z) = f(0) + z \int_0^1 f'_{\tau z}(\tau z) d\tau.$$

[1]В этом случае предполагаем, что начало координат принадлежит области B. Так и в дальнейшем.

Используя формулу (2) и известную формулу Коши ([1], гл. IV)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi,$$

приходим к следующему предложению

Теорема 2. *Если функция $f(z)$ голоморфна в области B и вместе с первой производной непрерывна в замкнутой области $\overline{B}$, то в B*

$$f(z) = f(z_0) + \frac{(z - z_0)}{2\pi i}\int_0^1 d\tau\int_{\Gamma}\frac{f'(\xi)d\xi}{\xi - \tau z - (1-\tau)z_0}, \tag{3}$$

где z_0 — фиксированная произвольная точка области B и Γ — замкнутый контур области B, проходимый в положительном направлении.

Следствие 2. *При $z_0 = 0$ из формулы (3) в случае выпуклой области B имеем известное интегральные представление автора (см., например, [12])*

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{2\pi i}\int_0^1 d\tau\int_{\Gamma}\frac{f'(\xi)d\xi}{\xi - \tau z}. \tag{4}$$

Далее, используя формулы (1) и (2), приходим к теореме 3.

Теорема 3. *Пусть z_0 — фиксированная по произволу точка из круга K_R : $|z| < R$ и C_r — окружность $|\xi| = r, 0 < r < R$.*

Тогда, если функция $f(z)$ голоморфна в круге K_R, то в $K_r \backslash C_r$

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} e^{-t}dt\int_{C_r}\frac{e^{\frac{zt}{\xi}} - e^{\frac{z_0 t}{\xi}}}{t}f'(\xi)d\xi. \tag{5}$$

Следствие 3. *При $z_0 = 0$ из формулы (5) в случае круга K_R имеем интегральную формулу автора [11]*

$$f(z) = f(0) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} e^{-t}dt\int_{C_r}\frac{e^{\frac{zt}{\xi}} - 1}{t}f'(\xi)d\xi,$$

обратную к формуле (4).

4. Заключение

1. Дан краткий обзор результатов автора по решению обратных задач в интегральных представлениях Коши как в случае круга, так и в случае поликруга, а также в интегральных формулах Темлякова (аннотация).

2. В случае выпуклой области B с фиксированной точкой установлено интегральные представление (3), выражающее значения функции в B через значения её производной на границе B с точностью до аддитивной постоянной $f(z_0)$.

3. Для установленного интегрального представления решена обратная задача.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Высшая школа, 1999. 432 с.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с .
3. Лаврентьев М. М., Романов В. Г. , Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
4. Марчук Г. И. О постановке обратных задач // ДАН СССР. 1964. Т. 156, № 3. С. 503–506.
5. Баврин И. И. Интегральные представления аналитических и гармонических в круге функций // ДАН. 2008. Т. 421, № 3, С. 299–301.
6. Баврин И. И. Обратные задачи для интегральной формулы Коши и для формул для производных интеграла Коши // ДАН. 2008. Т. 422, № 2. С. 155–156.
7. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.: Наука, 1968. 624 с.
8. Баврин И. И. Обобщение формулы Пуассона-Иенсена // ДАН. 2010. Т. 431, № 2. С. 154–156.
9. Баврин И. И. Обобщение формулы Шварца—Иенсена // ДАН. 2010. Т. 433, № 4. С. 439–440.
10. Баврин И. И. Обратная задача для интегральной формулы Коши в кольце // ДАН. 2009. Т. 428, № 2. С. 151–152.
11. Баврин И. И. Обратные задачи в интегральных формулах // ДАН. 2013. Т. 450, №3. С. 257–259.
12. Баврин И. И. Интегральные представления в звездных областях // ДАН. 2012. Т. 447, №4. С. 359–360.
13. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964. 412 с.
14. Баврин И. И. Обратные задачи для интегральных формул Коши, Шварца и Пуассона в поликруге // ДАН. 2010. Т. 434, №6, С. 727–729.
15. Баврин И. И. Интегральные представления в кратно-круговых областях. Обратные задачи // ДАН. 2011. Т. 441, №5. С. 583–587.
16. Баврин И. И. Операторный метод в комплексном анализе. М.: Прометей, 1991. 200 с.

REFERENCES

1. Privalov, I. I. 1984, "Vvedenie v teoriyu funktsii kompleksnogo peremennogo." [Introduction to the theory of functions of a complex variable] Thirteenth edition. *Nauka, Moscow*, 432 pp. (Russian)
2. Tihonov, A. N. & Arsenin, V. Ja. 1979, "Metody resheniya nekorrektnykh zadach.", [Methods for the solution of ill-posed problems] Second edition, revised and supplemented, *Nauka, Moscow*, 286 pp. (Russian)
3. Lavrent'ev, M. M., Romanov, V. G. & Shishatskii, S. P. 1980, "Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza.", [Ill-posed problems of mathematical physics and analysis] *Nauka, Moscow*, 287 pp. (Russian)
4. Marchuk, G. I. 1964, "On the formulation of inverse problems", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 156, no. 3, pp. 503–506. (Russian)
5. Bavrin, I. I. 2008, "Integral representations of functions analytic and harmonic in a disk", *Dokl. Akad. Nauk* , vol. 421, no. 3, pp. 299–301. (Russian); translation in *Dokl. Math.* 2008, vol. 78, no. 1, pp. 522–524.
6. Bavrin, I. I. 2008, "Inverse problems for the Cauchy integral formula and for formulas for the derivatives of the Cauchy integral", *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 422, no. 2, pp. 155–156 (Russian); translation in *Dokl. Math.* 2008, vol. 78, no. 2, pp. 679—680.
7. Markushevich, A. I. 1968, "The theory of analytic functions.", *Nauka, Moscow*, 624 pp.
8. Bavrin, I. I. 2010, "A generalization of the Poisson-Jensen formula", *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 431, no. 2, pp. 154–156 (Russian); translation in *Dokl. Math.* 2010, vol. 81, no. 2, pp. 193–195.
9. Bavrin, I. I. 2010, "A generalization of the Schwartz-Jensen formula", *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 433, no. 4, pp. 439–440 (Russian); translation in *Dokl. Math.* 2010, vol. 82, no. 1, pp. 566–567.
10. Bavrin, I. I. 2009, "The inverse problem for the Cauchy integral formula in an annulus", *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 428, no. 2, pp. 151–152 (Russian); translation in *Dokl. Math.*, 2009, vol. 80, no. 2, pp. 660–661.
11. Bavrin, I. I. 2013, "Inverse problems in integral formulas", *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 450, no. 3, pp. 257–259 (Russian); translation in *Dokl. Math.* 2013, vol. 87, no. 3, pp. 293—295.
12. Bavrin, I. I. 2012, "Integral representations in starlike domains", *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 447, no. 4, pp. 359–360 (Russian); translation in *Dokl. Math.* 2012, vol. 86, no. 3, pp. 799—800.

13. Vladimirov, V. S. 1964, "Metody teorii funktsii mnogikh kompleksnykh peremennykh.", [Methods in the theory of functions of several complex variables] With a Foreword by N. N. Bogoljubov, *Nauka, Moscow* 411 pp. (Russian).

14. Bavrin, I. I. 2010, "Inverse problems for Cauchy, Schwarz, and Poisson integral formulas in a polydisk", *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 434, no. 6, pp. 727–729 (Russian); translation in *Dokl. Math.*, 2010, vol. 82, no. 2, pp. 787–789.

15. Bavrin, I. I. 2011, "Integral representations in multicircular domains: inverse problems", *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 441, no. 5, pp. 583–587 (Russian); translation in *Dokl. Math.*, 2011, vol. 84, no. 3, pp. 837–840.

16. Bavrin, I. I. 1991, "Operatornyi metod v kompleksnom analize.", [The operator method in complex analysis] *Prometei, Moscow*, 200 pp. (Russian).

Московский педагогический государственный университет.
Поступило 28.06.2015