ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 2 (2014)

УДК 519.4

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева (г. Тула)

Vnbezv@rambler.ru   alyonka_smile@mail.ru

Исправления к статье

В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева. Проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением // Чебышевский сборник. Тула: ТГПУ, 2014, том XV, выпуск I(49).

Страница 52.

В данной статье допущены неточности при доказательстве основной теоремы. Приводим исправленное полное доказательство теоремы:

3. Основная теорема

Теорема 4. *В группе G_Γ разрешима проблема сопряженности слов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечалось ранее доказательство будем проводить по индукции. Предположим, что теорема справедлива для древесного произведения свободных конечно порожденных групп с циклическим объединением для числа сомножителей меньше n, т.е. в группе $G_{\Gamma_{n-1}}$. Докажем справедливость теоремы в группе $G_\Gamma = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_n$, где $C_n : \langle v_{n-1}^{p_{n-1}} \rangle = \langle w_n^{q_n} \rangle$.

Пусть $u_1, u_2 \in G_\Gamma$. $u_1 = g_1 g_2 ... g_{2k}$, $u_2' = g_1' g_2' ... g_{2k}'$ - нормальная форма элементов u_1, u_2 в группе G_Γ, причем u_1, u_2' - циклически несократимые элементы. u_2' некоторая циклическая перестановка слова u_2, такая что $g_1, g_1' \in G_{\Gamma_{n-1}}$. Тогда $g_{2i} \in F_n$, $g_{2i-1} \in G_{\Gamma_{n-1}}$, $i = \overline{1,k}$.

Из теоремы 2 следует, что если u_1, u_2' сопряжены, то они сопряжены элементом из объединяемой подгруппы, т.е. существует $h \in C_n$, такой что $hu_1h^{-1} = u_2'$ или

$$hu_1 = u_2'h. \tag{1}$$

Построим слово h, удовлетворяющее равенству (1).

I. Пусть $u_1 = g_1$, $u_2' = g_1'$, причем g_1, g_1' принадлежат одному сомножителю либо $G_{\Gamma_{n-1}}$, либо F_n.

1. Пусть $g_1, g_1' \in G_{\Gamma_{n-1}}$. Возможны случаи:

а) g_1, g_1' не сопряжены одновременно элементу из объединяемой подгруппы, то по утверждению 1 слова u_1 и u_2' сопряжены в группе G_Γ тогда и только тогда, когда они сопряжены в группе $G_{\Gamma_{n-1}}$.

б) g_1, g_1' сопряжены элементу из объединяемой подгруппы, тогда $g_1 = a^{-1}ha$, $g_1' = b^{-1}h'b$. Случай сводится к сопряжению h и h' в группе G_{Γ_n}. Покажем, что h и h' сопряжены в группе $G_{\Gamma_{n-1}}$.

Пусть элементы h и h' сопряжены элементом $z \in G_\Gamma$ и $z = b_1 b_2 ... b_k$ - нормальная форма: $zhz^{-1} = h'$.

$$b_1 b_2 ... b_k h b_k^{-1} b_{k-1}^{-1} ... b_1^{-1} = h'. \tag{2}$$

Для выполнения равенства (2), нужно чтобы слева сокращения дошли до длины равной 1. Значит, если $b_k \in F_n$, то $b_k = v_{n-1}^s$, следовательно $b_k h b_k^{-1} = h_0 \in C_n$. Поэтому предположим, что $b_k \in G_{\Gamma_{n-1}}$, тогда должно выполняться равенство $b_k h b_k^{-1} \in C_n$.

Далее $b_{k-1} \in F_n$, следовательно $b_{k-1} = v_{n-1}^{s_1}$, $b_{k-2} \in G_{\Gamma_{n-1}}$ и т.д.

Таким образом слоги из сомножителя F_n можно выбросить и рассматривать только сопряжение слогами из $G_{\Gamma_{n-1}}$.

2. Пусть $g_1, g_1' \in F_n$. Возможны случаи:

а) g_1, g_1' не сопряжены одновременно элементу из объединяемой подгруппы, тогда случай сводится к сопряженности в свободной группе.

б) g_1, g_1' сопряжены одновременно элементу из объединяемой подгруппы. Случай аналогичен 1б.

II. Пусть $u_1 = g_1 g_2$, $u_2' = g_1' g_2'$. Пусть $g_1, g_1' \in G_{\Gamma_{n-1}}$, $g_2, g_2' \in F_n$. Найдем элемент $h_1 \in C_n$, который слог g_1 переводит в g_1'. При этом должно выполняться равенство:

$$h_1 u_1 = h_1 g_1 g_2 = g_1' h_1' g_2 = g_1' \tilde{g}_2, \text{ где } \tilde{g}_2 = h_1' g_2. \tag{3}$$

Должно выполняться равенство

$$h_1 g_1 = g_1' h_1'. \tag{4}$$

$g_1^{-1} h_1 g_1 = g_1^{-1} g_1' h_1'$. Таким образом справедливость равенства (4) следует из разрешимой проблемы пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с циклической (см. лемма 5): $g_1^{-1} C_n g_1 \cap g_1^{-1} g_1' C_n$.

1. В случае, если $g_1^{-1} C_n g_1 \cap C_n = E$, то найденное h_1 единственно. Для него проверяем равенство (1).

2. В случае, если $g_1^{-1} C_n g_1 \cap C_n \neq E$, т.е. $g_1^{-1} C_n g_1 \cap C_n = \langle w_n^{q_n k_1} \rangle = C_n' < C_n$ и для любого $h \in C_n'$, выполняется $h g_1' = g_1' h'$, где $h' \in \overline{C}_n' = \langle w_n^{q_n k_2} \rangle$. Возможны случаи:

а) $\tilde{g}_2 = h_1' g_2$ и $\tilde{g_2'} = g_2' h_1$ не являются степенями w_n, тогда выясняем, сущетвует ли элемент $h_0 \in C_n'$, такой что

$$h_0 \tilde{g}_2 = \tilde{g_2'} h_0'. \tag{5}$$

Из доказательства теоремы 3 следует, что равенство (5) должно выполняться только для единственного h_0, в противном случае $\tilde{g}_2, \tilde{g_2'}$ являются степенями w_n.

б) $\tilde{g}_2 = w_n^{r_1}$ и $\tilde{g_2'} = w_n^{r_2}$, $r_1 \neq r_2$. В этом случае проверяем существование такого $y \in \mathbf{Z}$, что

$$(w_n^{q_n k_1})^y g_1' \tilde{g}_2 = g_1' \tilde{g_2'} (w_n^{q_n k_1})^y,$$
$$g_1' (w_n^{q_n k_2})^y w_n^{r_1} = g_1' w_n^{r_2} (w_n^{q_n k_1})^y. \tag{6}$$

Равенство (6) будет иметь место вследствие разрешимости уравнения в целых числах:

$$q_n k_2 y + r_1 = r_2 + q_n k_1 y.$$

III. Пусть теперь $u_1 = g_1 g_2 ... g_{2k}$, $u_2' = g_1' g_2' ... g_{2k}'$. Предполагаем, что все слоги g_{2i} являются степенями w_n. В противном случае h определяется единственным образом.

Пусть $g_{2i} = w_n^{s_i}$, $1 \leqslant s_i < q_n$, $g_{2i}' = w_n^{t_i}$, $1 \leqslant t_i < q_n$. Как указано выше слог g_1 переведен в g_1' одновременным умножением элемента $h_1 \in C_n$ слева на u_1 и справа на u_2', вследствие чего определена подгруппа $C_n' = \langle w_n^{q_n k_1} \rangle < C_n$. Причем любое $h \in C_n'$ удовлетворяет соотношению $h g_1' = g_1' h'$, где $h' \in \overline{C}_n' = \langle w_n^{q_n k_2} \rangle$. Затем, умножая слово $h_1 u_1 = g_1' g_2 \tilde{g}_3 g_4 ... g_{2k}$, где $h_1 g_1 = g_1' h_1'$ и $\tilde{g}_3 = h_1' g_3$, слева на $h_2 \in \overline{C}_n'$, а также умножая $u_2' h_1$ на h_2 справа, слог $\tilde{g}_3$ переводим в g_3', т.е. выясняем выполнимость равенства $h_2 \tilde{g}_3 = g_3' h_2'$, где $h_2' \in \overline{C}_n'$. Элементы h_2 и h_2' определяем из соотношения $\tilde{g}_3^{-1} \overline{C}_n' \tilde{g}_3 \cap \tilde{g}_3^{-1} g_3' \overline{C}_n'$.

Далее, если $\tilde{g}_3^{-1} \overline{C}_n' \tilde{g}_3 \cap \overline{C}_n' \neq E$, то вычисляем $C_n'' = \tilde{g}_3^{-1} \overline{C}_n' \tilde{g}_3 \cap \overline{C}_n'$.

Очевидно, что $g_2 = g_2'$, т.к. в противном случае u_1 и u_2' не сопряжены.

Рассмотрим теперь слова $u_1' = g g_4 \tilde{g}_5 g_6 ... g_{2k}$ и $u_2'' = g g_4' g_5' ... g_{2k}' h_1 h_2$, где $g = g_1' g_3'$, $\tilde{g}_5 = h_2' g_5$. Так как слоговая длина u_1' и u_2'' соответственно меньше u_1 и u_2', то по индукции можно эффективно выяснить, существует ли $h \in C_n''$, такое что $h u_1 = u_2' h$.

Если для данной циклический перестановки u_2' не найдено подходящее h, то рассматриваем другие циклические перестановки слова u_2.

Основная теорема доказана. □

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Поступило 24.04.2014