ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 1.

УДК 517.5

САМОУЛУЧШЕНИЕ L^p-НЕРАВЕНСТВА ПУАНКАРЕ ПРИ $p > 0$

А. И. Порабкович (г. Минск)

Аннотация

Классическое (θ, p)-неравенство Пуанкаре на $\mathbb{R}^n$

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B \left| f(y) - \frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B f \, d\mu \right|^\theta d\mu(y) \right)^{1/\theta} \lesssim r_B \left(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B |\nabla f|^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

(r_B — радиус шара $B \subset \mathbb{R}^n$) обладает свойством самоулучшения — из $(1, p)$-неравенства, $1 < p < n$, вытекает «более сильное» (q, p)-неравенство (Соболева–Пуанкаре), где $1/q = 1/p - 1/n$ (неравенство $A \lesssim B$ означает, что $A \leqslant cB$ с несущественной постоянной c).

Такой эффект изучался в ряде работ для неравенств более общего вида

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B |f(y) - S_B f|^\theta \, d\mu(y) \right)^{1/\theta} \lesssim \eta(r_B) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_{\sigma B} g^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

для функций на метрическом пространстве с мерой. Здесь $f \in L^\theta_{\mathrm{loc}}$, $g \in L^p_{\mathrm{loc}}$, $S_B f$ — некоторое число, зависящее от шара B и функции f, η — некоторая положительная возрастающая функция, $\sigma \geqslant 1$. В качестве $S_B f$ выбиралось среднее значение функции f по шару B и рассматривался случай $p \geqslant 1$.

Мы изучаем свойство самоулучшения для таких неравенств на квазиметрических пространствах с мерой, удовлетворяющей условию удвоения с показателем $\gamma > 0$. Существенным отличием нашей работы от предыдущих является рассмотрение случая $p, \theta > 0$. В этой ситуации функции не обязаны быть суммируемыми и мы берем $S_B f = I_B^{(\theta)} f$ — наилучшее приближение постоянными в метрике пространства $L^\theta(B)$.

Мы доказываем, что если $\eta(t)t^{-\alpha}$ возрастает при некотором $\alpha > 0$, то при $0 < p < \gamma/\alpha$ и $\theta > 0$ из (θ, p)-неравенства Пуанкаре вытекает (q, p)-неравенство с $1/q > 1/p - \gamma/\alpha$. При $p \geqslant \gamma(\gamma + \alpha)^{-1}$ (при таких p функция f является локально суммируемой) отсюда вытекает также (q, p)-неравенство с интегральными средними на месте наилучших приближений $I_B^{(\theta)} f$.

В работе рассматриваются также случаи $\alpha p = \gamma$ и $\alpha p > \gamma$. Если $\alpha p = \gamma$, то из (θ, p)-неравенства Пуанкаре вытекает (q, p)-неравенство с любым $q > 0$ и, более того, справедливо экспоненциальное неравенство типа известного неравенства Трудингера.

Если же $\alpha p > \gamma$, то из (θ, p)-неравенства Пуанкаре вытекает неравенство

$$|f(x) - f(y)| \lesssim \eta(d(x, y))[d(x, y)]^{-\gamma/p} \lesssim [d(x, y)]^{\alpha - \gamma/p}$$

для почти всех x и y из любого фиксированного шара B ($\lesssim$ зависит от B).

Ключевые слова: метрическое пространство с мерой, условие удвоения, неравенство Пуанкаре.

Библиография: 15 названий.

SELF-IMPROVEMENT OF (θ, p) POINCARÉ INEQUALITY FOR $p > 0$

A. I. Porabkovich (Minsk)

Abstract

Classical Poincaré (θ,p)-inequality on $\mathbb{R}^n$

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B \left|f(y)-\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B f\,d\mu\right|^\theta d\mu(y)\right)^{1/\theta} \lesssim r_B\left(\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B |\nabla f|^p\,d\mu\right)^{1/p},$$

(r_B is the radius of ball $B\subset\mathbb{R}^n$) has a self-improvement property, that is $(1,p)$-inequality, $1<p<n$, implies the «stronger» (q,p)-inequality (Sobolev-Poincaré), where $1/q=1/p-1/n$ (inequality $A\lesssim B$ means that $A\leqslant cB$ with some inessential constant c).

Such effect was investigated in a series of papers for the inequalities of more general type

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B |f(y)-S_Bf|^\theta\,d\mu(y)\right)^{1/\theta} \lesssim \eta(r_B)\left(\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_{\sigma B} g^p\,d\mu\right)^{1/p}$$

for functions on metric measure spaces. Here $f\in L^\theta_{\mathrm{loc}}$, $g\in L^p_{\mathrm{loc}}$, and S_Bf is some number depending on the ball B and on the function f, η is some positive increasing function, $\sigma\geqslant 1$. Usually mean value of the function f on a ball B is chosen as S_Bf, and the case $p\geqslant 1$ is considered.

We investigate self-improvement property for such inequalities on quasimetric measure spaces with doubling condition with parameter $\gamma>0$. Unlike previous papers on this topic we consider the case $\theta,p>0$. In this case functions are not required to be summable, and we take $S_Bf=I_B^{(\theta)}f$. Here $I_B^{(\theta)}f$ is the best approximation of the function f in $L^\theta(B)$ by constants.

We prove that if $\eta(t)t^{-\alpha}$ increases with some $\alpha>0$, then for $0<p<\gamma/\alpha$ and $\theta>0$ (θ,p)-inequality Poincaré implies (q,p)-inequality with $1/q>1/p-\gamma/\alpha$. If $p\geqslant\gamma(\gamma+\alpha)^{-1}$ (then the function f is locally integrable) then it implies also (q,p)-inequality with mean value instead of the best approximations $I_B^{(\theta)}f$.

Also we consider the cases $\alpha p=\gamma$ and $\alpha p>\gamma$. If $\alpha p=\gamma$, then (q,p)-inequality with any $q>0$ follows from Poincaré (θ,p)-inequality and moreover some exponential Trudinger type inequality is true.

If $\alpha p>\gamma$ then Poincaré (θ,p)-inequality implies the inequality

$$|f(x)-f(y)|\lesssim\eta(d(x,y))[d(x,y)]^{-\gamma/p}\lesssim[d(x,y)]^{\alpha-\gamma/p}$$

for almost all x and y from any fixed ball B ($\lesssim$ does depend on B).

Keywords: Metric measure space, doubling condition, Poincaré inequality.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Классическое неравенство Пуанкаре на $\mathbb{R}^n$[1]

$$\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B \left|f(y)-\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B f\,d\mu\right| d\mu(y)\lesssim r_B\left(\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B |\nabla f|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

[1]Запись $A\lesssim B$ всегда означает, что $A\leqslant cB$, где c некоторая положительная постоянная зависящая, возможно, от некоторых параметров, но эти зависимости для нас несущественны (эти постоянные могут быть различными даже в пределах одной строки).

(r_B — радиус шара $B \subset \mathbb{R}^n$) обладает свойством самоулучшения — из него вытекает «более сильное» неравенство

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B \left|f(y) - \frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B f\,d\mu\right|^q d\mu(y)\right)^{1/q} \lesssim r_B\left(\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B |\nabla f|^p\,d\mu\right)^{1/p},$$

где $p > 1$, $1/q = 1/p - 1/n$.

Такой эффект изучался для неравенств более общего вида

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B |f(y) - S_B f|^\theta\,d\mu(y)\right)^{1/\theta} \leqslant \eta(r_B)\left(\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_{\sigma B} g^p\,d\mu\right)^{1/p}. \tag{1}$$

для функций на метрическом пространстве с мерой (см., например, [1, 2]). Здесь $f \in L^\theta_{\mathrm{loc}}$, $g \in L^p_{\mathrm{loc}}$, $S_B f$ — некоторое число, зависящее от шара B и функции f, η — некоторая положительная функция, $\sigma \geqslant 1$.

В цитированных работах в качестве $S_B f$ выбиралось среднее значение функции f по шару B и рассматривался случай $\theta \geqslant 1$. Существенным отличием нашей работы от предыдущих является изучение свойства самоулучшения для неравенств (1) при $\theta > 0$ — при таких условиях рассматриваемые функции не обязаны быть суммируемыми. Для формулировки нашего основного результата нам понадобится ряд определений и обозначений.

Пусть (X, d, μ) — хаусдорфово пространство с регулярной борелевской мерой μ и квазиметрикой d (неравенство треугольника заменяется следующим: существует такая постоянная $a_d \geqslant 1$, что $d(x,y) \leqslant a_d[d(x,z) + d(z,y)]$ для любых $x, y, z \in X$).

Кроме того, семейство открытых шаров

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

образует базу окрестностей топологии X и

$$0 < \mu\left(B(x,r)\right) < +\infty, \quad x \in X,\ r > 0.$$

Часто шар будет обозначаться просто B, тогда r_B — его радиус, $\lambda B \subset X$ — шар, концентрический с B, радиуса λr_B. Кроме того, пусть

$$f_B = ⨍\limits_B f\,d\mu = \frac{1}{\mu\left(B\right)}\int\limits_B f\,d\mu$$

— среднее значение функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ по шару $B \subset X$.

Говорят, что мера μ удовлетворяет условию удвоения, если существует такое число $a_\mu > 0$, что

$$\mu\left(B(x,2r)\right) \leqslant a_\mu \mu\left(B(x,r)\right), \quad x \in X, \quad r > 0.$$

Этому условию можно придать количественный вид: существует $\gamma > 0$ (можно взять $\gamma = \log_2 a_\mu$), для которого выполнено неравенство

$$\mu\left(B(x,R)\right) \leqslant a_\mu \left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu\left(B(x,r)\right), \quad x \in X,\ 0 < r \leqslant R. \tag{2}$$

Мы предполагаем (2) выполненным на протяжении всей работы. В таком случае тройка (X, d, μ) называется пространством однородного типа [9].

Для $0 \leqslant \alpha < \beta < \infty$ определим $\Omega[\alpha,\beta]$ как множество положительных возрастающих функций $\eta : [0,1) \to [0,+\infty)$, для которых $\eta(t)t^{-\alpha}$ возрастает и $\eta(t)t^{-\beta}$ убывает. Пусть еще

$$\Omega[\alpha,\beta) = \bigcup_{\beta'\in[\alpha,\beta)} \Omega[\alpha,\beta'], \quad \Omega[\alpha,\infty) = \bigcup_{\beta>\alpha} \Omega[\alpha,\beta).$$

Пусть $\eta \in \Omega[0,\infty)$, $\sigma \geq 1$ и $\theta, p > 0$. Будем говорить, что пара функции $f \in L^{\theta}_{\mathrm{loc}}(X)$, $g \in L^{p}_{\mathrm{loc}}(X)$ удовлетворяет (σ,η,θ,p)-неравенству Пуанкаре, если для всех шаров $B \subset X$

$$\left(\fint_B |f(y) - I_B^{(\theta)} f|^{\theta}\, d\mu(y)\right)^{1/\theta} \leqslant \eta(r_B) \left(\fint_{\sigma B} g^p\, d\mu\right)^{1/p}. \tag{3}$$

Здесь $I_B^{(\theta)} f$ — постоянная наилучшего приближения функции f в $L^{\theta}(B)$ (см. ниже лемму 3), т.е.

$$\left(\fint_B |f(y) - I_B^{(\theta)} f|^{\theta}\, d\mu(y)\right)^{1/\theta} = \inf_{I\in\mathbb{R}} \left(\fint_B |f(y) - I|^{\theta}\, d\mu(y)\right)^{1/\theta}. \tag{4}$$

Основной результат нашей работы — следующая теорема, описывающая свойство самоулучшения неравенства Пуанкаре (3). Она была анонсирована в [14].

Теорема 1. *Пусть $\theta, p > 0$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $\eta \in \Omega[\alpha,\gamma/p)$, $\sigma \geqslant 1$. Пусть также функции $f \in L^{\theta}_{\mathrm{loc}}(X)$, $g \in L^{p}_{\mathrm{loc}}(X)$ удовлетворяют (σ,η,θ,p)-неравенству Пуанкаре, $1/q \geqslant 1/p - \alpha/\gamma$.*

Тогда для любого шара $B \subset X$

1) если $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$, то справедливо неравенство слабого типа

$$\frac{\mu\left(\left\{x \in B : |f(x) - I_B^{(\theta)} f| > \lambda\right\}\right)}{\mu(B)} \lesssim \left[\frac{\eta(r_B)}{\lambda} \left(\fint_{4a_d^2\sigma B} g^p\, d\mu\right)^{1/p}\right]^q, \quad \lambda > 0; \tag{5}$$

2) если $1/q > 1/p - \alpha/\gamma$, то

$$\left(\fint_B |f(y) - I_B^{(\theta)} f|^{q}\, d\mu(y)\right)^{1/q} \lesssim \eta(r_B) \left(\fint_{4a_d^2\sigma B} g^p\, d\mu\right)^{1/p}, \tag{6}$$

где $\lesssim$ не зависят от f, g и B.

Заметим, что если $q \geqslant 1$ (т.е. $p \geqslant \gamma(\gamma+\alpha)^{-1}$), то неравенства (5) и (6) в теореме 1 сохраняют силу, если в них заменить $I_B^{(\theta)} f$ на интегральные средние f_B. Это следует из известного простого неравенства

$$\left(\int_B |f(y) - f_B|^{q}\, d\mu(y)\right)^{1/q} \leqslant 2 \left(\int_B |f(y) - I_B^{(q)} f|^{q}\, d\mu(y)\right)^{1/q},$$

справедливого при $q \geqslant 1$.

В случае $p > \theta = 1$ это утверждение имеется в [2] (при $\eta(t) = t$ см. также [1, теорема 5.1]). Следовательно, из теоремы 1 вытекает распространение этих результатов из [1, 2] на случай $p \geqslant \gamma(\gamma+\alpha)^{-1}$.

Мы приведем доказательство теоремы 1 в разделе 3.

Кроме того, в пп. 3.2, 3.3 рассматриваются аналоги теоремы 1 для случаев $\alpha \geqslant \gamma/p$.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть $B_1 \subset B_2 \subset X$ — два шара, причем $0 < r_{B_1} \leqslant r_{B_2}$. Тогда*

$$\frac{\mu(B_2)}{\mu(B_1)} \lesssim \left(\frac{r_{B_2}}{r_{B_1}}\right)^{\gamma}.$$

Эта лемма имеется, например, в [2, лемма 1].

Для $\theta > 0$, шара $B_0 \subset X$ и $x \in B_0$ положим

$$M_{\theta,B_0} f(x) = \sup_{B \ni x, r_B \leqslant r_{B_0}} \left(\fint_B |f|^{\theta} d\mu \right)^{1/\theta},$$

где точная верхняя граница берется по всем шарам B радиуса $r_B \leqslant r_{B_0}$, содержащим точку x. Это — локальная максимальная функция Харди–Литтлвуда. Для нее справедливы следующие стандартные оценки с обычным доказательством (см. например, [10, 11]).

Лемма 2. *Пусть $0 < q < p < \infty$, $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$. Тогда для любого шара $B \subset X$ справедливы неравенства*

$$\mu\left(\{x \in B : M_{p,B} f(x) > \lambda\}\right) \lesssim \left(\frac{\|f\|_{L^p(2a_d B)}}{\lambda}\right)^p, \quad \lambda > 0 \tag{7}$$

и

$$\|M_{p,B} f\|_{L^q(B)} \lesssim \mu(B)^{1/q - 1/p} \|f\|_{L^p(2a_d B)}. \tag{8}$$

Следующие три леммы имеются в [14] — см. [14, лемма 3], [14, лемма 5] и [14, лемма 7] соответственно (по поводу леммы 5 см. еще [12, 13]).

Лемма 3. *Пусть $B \subset X$, $f \in L^{\theta}(B)$, $\theta > 0$. Тогда существует такое число $I_B^{(\theta)} f \in \mathbb{R}$, что выполнено* (4).

Число $I_B^{(\theta)} f$ из леммы 3 определяется неоднозначно (если $\theta \leqslant 1$). В дальнейшем под $I_B^{(\theta)} f$ понимаем любое из его возможных значений.

Лемма 4. *Пусть $f \in L^{\theta}_{\mathrm{loc}}(X)$, $\theta > 0$, $B_1, B_2 \subset X$ — два шара, причем $0 < r_{B_1} \leqslant r_{B_2}$. Тогда:*

1) если $B_1 \subset B_2$, то

$$|I_{B_1}^{(\theta)} f - I_{B_2}^{(\theta)} f| \lesssim \left(\fint_{B_1} |f(y) - I_{B_1}^{(\theta)} f|^{\theta} \, d\mu \right)^{1/\theta} + \left(\frac{r_{B_2}}{r_{B_1}}\right)^{\gamma/\theta} \left(\fint_{B_2} |f(y) - I_{B_2}^{(\theta)} f|^{\theta} \, d\mu \right)^{1/\theta};$$

2) если $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, то для любой точки $x_0 \in B_1 \cap B_2$ выполнено неравенство

$$|I_{B_1}^{(\theta)} f - I_{B_2}^{(\theta)} f| \lesssim \left(\fint_{B_1} |f(y) - I_{B_1}^{(\theta)} f|^{\theta} \, d\mu \right)^{1/\theta} + \left(\fint_{B_2} |f(y) - I_{B_2}^{(\theta)} f|^{\theta} \, d\mu \right)^{1/\theta} +$$

$$+ \left(\frac{r_{B_2}}{r_{B_1}}\right)^{\gamma/\theta} \left(\fint_{B(x_0,R)} |f(y) - I_{B(x_0,R)}^{(\theta)} f|^{\theta} \, d\mu \right)^{1/\theta},$$

где $R = 2a_d r_{B_2}$.

Лемма 5. *Для любой функции $f \in L^{\theta}_{\mathrm{loc}}(X)$, $\theta > 0$*

$$\lim_{r\to+0} I^{(\theta)}_{B(x,r)} f = f(x) \tag{9}$$

для почти всех $x \in X$.

Точки, в которых выполнено соотношение (9), будем называть θ-точками Лебега.

Отметим еще, что для любой функции $\eta \in \Omega[\alpha,\beta]$, $0 < \alpha < \beta$, выполнены неравенства

$$\sum_{k=n}^{\infty} \eta(2^{-k}) \lesssim \eta(2^{-n}), \quad \sum_{k=0}^{n} 2^{\beta k}\eta(2^{-k}) \lesssim 2^{\beta n}\eta(2^{-n}). \tag{10}$$

3. Самоулучшение неравенств Пуанкаре

3.1. Доказательство теоремы 1

Пусть $B \subset X$ — любой фиксированный шар, $r = r_B$, $R = 2a_d r$. Рассмотрим любую θ-точку Лебега $x \in B$. Для произвольного $s > 0$ положим

$$v(x,s) = \left(\fint_{\sigma B(x,s)} g^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Отметим, что в силу условия удвоения (2) при $t \leqslant s$ выполнено неравенство

$$v(x,t) \leqslant \left(\frac{\mu(B(x,s))}{\mu(B(x,t))} \fint_{\sigma B(x,s)} g^p \, d\mu \right)^{1/p} \lesssim \left(\left(\frac{s}{t}\right)^{\gamma} \fint_{\sigma B(x,s)} g^p \, d\mu \right)^{1/p} \lesssim \left(\frac{s}{t}\right)^{\gamma/p} v(x,s). \tag{11}$$

Введем обозначения

$$I = \left(\fint_{\sigma B(x,R)} g^p \, d\mu \right)^{1/p} \quad \text{и} \quad M = M_{p,2a_d\sigma B}\, g(x).$$

Очевидно, что $I \leqslant M$.

Докажем теперь неравенство

$$|f(x) - I^{(\theta)}_{B(x,r)} f| \lesssim \eta(r) I^{\frac{\alpha p}{\gamma}} M^{1-\frac{\alpha p}{\gamma}}. \tag{12}$$

Пусть для краткости $B_k = B(x, 2^{-k} r)$, $k \geqslant 0$. Тогда по определению θ-точки Лебега с помощью леммы 4 и неравенства (3) получаем

$$|f(x) - I^{(\theta)}_{B(x,r)} f| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \left[I^{(\theta)}_{B_{k+1}} f - I^{(\theta)}_{B_k} f \right] \right| \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \eta(2^{-k} r) v(x, 2^{-k} r) = \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{13}$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{n} \eta(2^{-k} r) v(x, 2^{-k} r), \ \Sigma_2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \eta(2^{-k} r) v(x, 2^{-k} r).$$

Выбор числа $n \in \mathbb{N}$ будет указан позже.

Оценим Σ_1. В силу (11) и (10)

$$\Sigma_1=\sum_{k=0}^{n}\eta(2^{-k}r)v(x,2^{-k}r)\lesssim I\sum_{k=0}^{n}\eta(2^{-k}r)2^{k\frac{\gamma}{p}}\lesssim 2^{n\frac{\gamma}{p}}I\eta(2^{-n}r). \tag{14}$$

Для оценки Σ_2 также воспользуемся (10)

$$\Sigma_2=\sum_{k=n+1}^{\infty}\eta(2^{-k}r)v(x,2^{-k}r)\lesssim M\sum_{k=n+1}^{\infty}\eta(2^{-k}r)\lesssim M\eta(2^{-n}r). \tag{15}$$

Поэтому, учитывая (14) и (15), видим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\eta(2^{-k}r)v(x,2^{-k}r)\lesssim\eta(2^{-n}r)\left[2^{n\frac{\gamma}{p}}I+M\right].$$

Если выбрать теперь

$$n=\left[\log_2\left(\frac{M}{I}\right)^{\frac{p}{\gamma}}\right]+1,$$

мы приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{\infty}\eta(2^{-k}r)v(x,2^{-k}r)\lesssim 2\eta(2^{-n}r)M.$$

Учитывая также то, что $\eta(t)t^{-\alpha}$ почти возрастает, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\eta(2^{-k}r)v(x,2^{-k}r)\lesssim\eta(2^{-n}r)M\lesssim M\eta\left(r\left(\frac{I}{M}\right)^{\frac{p}{\gamma}}\right)\lesssim\eta(r)\left(\frac{I}{M}\right)^{\frac{\alpha p}{\gamma}}M=\eta(r)I^{\frac{\alpha p}{\gamma}}M^{1-\frac{\alpha p}{\gamma}}.$$

Таким образом, для любой θ-точки Лебега доказано неравенство (12).

Далее докажем для любой θ-точки Лебега $x\in B$ неравенство

$$|f(x)-I_B^{(\theta)}f|\lesssim\eta(r)I^{\frac{\alpha p}{\gamma}}M^{1-\frac{\alpha p}{\gamma}}, \tag{16}$$

которое подобно (12), но шар $B(x,r)$ заменен на B.

Для этого запишем очевидное неравенство

$$|f(x)-I_B^{(\theta)}f|\leqslant|f(x)-I_{B(x,r)}^{(\theta)}f|+|I_{B(x,r)}^{(\theta)}f-I_B^{(\theta)}f|.$$

Первое из слагаемых в правой части неравенства оценивается аналогично (12). Для второго слагаемого мы применим утверждение 2 из леммы 4.

$$|I_{B(x,r)}^{(\theta)}f-I_B^{(\theta)}f|\lesssim\left(\fint_{B(x,r)}|f(y)-I_{B(x,r)}^{(\theta)}f|^\theta\,d\mu\right)^{1/\theta}+$$
$$+\left(\fint_{B}|f(y)-I_B^{(\theta)}f|^\theta\,d\mu\right)^{1/\theta}+\left(\fint_{B(x,R)}|f(y)-I_{B(x,R)}^{(\theta)}f|^\theta\,d\mu\right)^{1/\theta}.$$

В силу условия (3) последнее неравенство преобразуется так:

$$|I_{B(x,r)}^{(\theta)}f - I_B^{(\theta)}f| \lesssim \eta(r)\left(\fint_{\sigma B(x,R)} g^p\,d\mu\right)^{1/p} \lesssim \eta(r) I^{\frac{\alpha p}{\gamma}} I^{1-\frac{\alpha p}{\gamma}} \lesssim \eta(r) I^{\frac{\alpha p}{\gamma}} M^{1-\frac{\alpha p}{\gamma}}$$

и (16) доказано.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству утверждений теоремы 1. Неравенство (5) получается с помощью лемм 2 и 5 и оценки (16) следующим образом:

$$\mu\left(\left\{x\in B : |f(x) - I_B^{(\theta)}f| > \lambda\right\}\right) = \mu\left(\{x\in B : |f(x) - I_B^{(\theta)}f|^q > \lambda^q\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mu\left(\left\{x\in B : (\eta(r_B))^q M^{q\left(1-\frac{p\alpha}{\gamma}\right)} I^{q\frac{p\alpha}{\gamma}} \gtrsim \lambda^q\right\}\right) \leq$$

$$\leq \mu\left(\left\{x\in 2a_d\sigma B : M^p \gtrsim \lambda^q(\eta(r_B))^{-q} I^{-q\frac{p\alpha}{\gamma}}\right\}\right) \lesssim \lambda^{-q}(\eta(r_B))^q I^{q\frac{p\alpha}{\gamma}} \int_{4a_d^2\sigma B} g^p d\mu =$$

$$= \lambda^{-q}(\eta(r_B))^q \mu\left(\sigma B(x,R)\right)\left(\fint_{4a_d^2\sigma B} g^p\,d\mu\right)^{\frac{q\alpha}{\gamma}+1} \lesssim$$

$$\lesssim \mu\left(\sigma B(x,R)\right)\left[\frac{\eta(r_B)}{\lambda}\left(\fint_{4a_d^2\sigma B} g^p\,d\mu\right)^{1/p}\right]^q.$$

Для доказательства (6) обозначим $1/q_0 = 1/p - \alpha/\gamma$ и

$$A = \eta(r_B)\left(\fint_{4a_d^2\sigma B} g^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Тогда (5) можно переписать в виде

$$\frac{\mu\left(\left\{x\in B : |f - I_B^{(\theta)}f| > \lambda\right\}\right)}{\mu(B)} \leqslant \min\left\{1, c\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{q_0}\right\}, \tag{17}$$

где $c = 2a_d\sigma$.

Положим $\lambda_0 = c^{1/q_0}A$, и, используя (17), оценим левую часть неравенства (6)

$$\fint_B |f - I_B^{(\theta)}f|^q d\mu = \int_0^\infty \lambda^{q-1}\frac{\mu\left(\left\{x\in B : |f - I_B^{(\theta)}f| > \lambda\right\}\right)}{\mu(B)}d\lambda =$$

$$= \left(\int_0^{\lambda_0} + \int_{\lambda_0}^\infty\right)\lambda^{q-1}\frac{\mu\left(\left\{x\in B : |f - I_B^{(\theta)}f| > \lambda\right\}\right)}{\mu(B)}d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\lambda_0}\lambda^{q-1}d\lambda + \int_{\lambda_0}^\infty \lambda^{q-1}\frac{\mu\left(\left\{x\in B : |f - I_B^{(\theta)}f| > \lambda\right\}\right)}{\mu(B)}d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_0^q + \int\limits_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{q-1} c \left(\frac{A}{\lambda}\right)^{q_0} d\lambda = cA^q + cA^{q_0} \int\limits_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{q-q_0-1} d\lambda \lesssim$$

$$\lesssim A^q + A^{q_0} A^{q-q_0} = cA^q.$$

Последняя оценка справедлива, так как $q < q_0$ и теорема 1 доказана.

3.2. Случай $\alpha p > \gamma$

В случае $\alpha p > \gamma$ условие $\eta \in \Omega[\alpha, \gamma/p)$ естественно заменить на $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$.

Теорема 2. *Пусть $p > 0$, $\alpha > \gamma/p$, $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$, $\sigma \geqslant 1$. Пусть также функции $f \in L^\theta_{\mathrm{loc}}(X)$, $g \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ удовлетворяют $(\sigma, \eta, \theta, p)$-неравенству Пуанкаре* (3). *Тогда*

1) для любой θ-точки Лебега x и любого $r > 0$

$$|f(x) - I^{(\theta)}_{B(x,r)} f| \lesssim \eta(r) \left(\fint\limits_{\sigma B(x,r)} g^p \, d\mu \right)^{1/p}, \tag{18}$$

2) для любого шара $B \subset X$ и любых θ-точек Лебега $x, y \in B$

$$|f(x) - f(y)| \lesssim \eta(r) \left(\fint\limits_{4a_d \sigma B} g^p \, d\mu \right)^{1/p}, \quad r = d(x,y) \tag{19}$$

($\lesssim$ не зависят от f, g, x, y и r).

Доказательство. Обозначим

$$I = \left(\fint\limits_{\sigma B(x,r)} g^p \, d\mu \right)^{1/p} \quad \text{и} \quad v(x,s) = \left(\fint\limits_{\sigma B(x,s)} g^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

В силу (13) и (11):

$$|f(x) - I^{(\theta)}_{B(x,r)} f| \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \eta(2^{-k} r) v(x, 2^{-k} r) \lesssim$$

$$\lesssim \eta(r_B) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k} v(x, 2^{-k} r_B) \lesssim \eta(r_B) I \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k} \left(\frac{r_B}{2^{-k} r_B} \right)^{\gamma/p} =$$

$$= \eta(r_B) I \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(\gamma/p - \alpha)k}.$$

Последний ряд сходится, так как $\alpha p > \gamma$, и (18) доказано.

Неравенство (19) выводится из (18) точно так же, как из (12) выводилось (16). Теорема 2 доказана.

Отметим, что при условиях теоремы 2 из неравенства (19) вытекает, что если $B \subset X$ — произвольный шар и $x, y \in B$ θ-точки Лебега, то

$$|f(x) - f(y)| \lesssim \eta(d(x,y)) [d(x,y)]^{-\gamma/p} \lesssim [d(x,y)]^{\alpha - \gamma/p}$$

при условиях теоремы 2. Здесь $\lesssim$ зависит от шара B и функции g. В этом легко убедиться, используя (19) и условие удвоения 2. Последнее неравенство означает, что функция f после изменения на множестве меры нуль (см. лемму 5) становится равномерно непрерывной на любом шаре и ее модуль непрерывности на этом оценивается как $\omega(t, f) \lesssim \eta(t) t^{-\gamma/p}$.

3.3. Случай предельного показателя $\alpha p = \gamma$

Теорема 3. *Пусть $p > 0$, $\alpha = \gamma/p$, $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$, $\sigma \geqslant 1$. Пусть также функции $f \in L^\theta_{\mathrm{loc}}(X)$, $g \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ удовлетворяют $(\sigma, \eta, \theta, p)$-неравенству Пуанкаре* (3). *Тогда для любого шара $B \subset X$ справедливы неравенства*

$$\fint_B \exp\left(\frac{|f - I_B^{(\theta)} f|}{\eta(r_B)} \left(\fint_{4a_d^2\sigma B} g^p\, d\mu\right)^{-1/p}\right) d\mu \lesssim 1 \tag{20}$$

и

$$\left(\fint_B |f - I_B^{(\theta)} f|^q\, d\mu\right)^{1/q} \lesssim \eta(r_B) \left(\fint_{4a_d^2\sigma B} g^p\, d\mu\right)^{1/p}, \quad q > 0. \tag{21}$$

Доказательство. Пусть $x \in B$ — θ-точка Лебега функции f. Обозначим для краткости $r = r_B$ и

$$I(x) = \left(\fint_{\sigma B(x,R)} g^p\, d\mu\right)^{1/p} \quad \text{и} \quad v(x,s) = \left(\fint_{\sigma B(x,s)} g^p\, d\mu\right)^{1/p},$$

где $R = 2a_d r$ и $M = M_{p, 2a_d\sigma B} g(x)$.

Оценим разность $|f(x) - I^{(\theta)}_{B(x,r)}|$. Из условия (3) получим

$$|f(x) - I^{(\theta)}_{B(x,r)} f| \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \eta(2^{-k} r) v(x, 2^{-k} r) = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{n} \eta(2^{-k} r) v(x, 2^{-k} r),\ \Sigma_2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \eta(2^{-k} r) v(x, 2^{-k} r).$$

Будем оценивать эти суммы по отдельности. Используя условия $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$ и (11)

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{n} \eta(2^{-k} r) v(x, 2^{-k} r) \lesssim \eta(r) v(x,r) \sum_{k=0}^{n} 2^{-k\gamma/p} 2^{k\gamma/p} \lesssim n\eta(r) v(x,r).$$

В силу очевидного неравенства $v(x, 2^{-k} r) \leq M, \forall k$ и условия $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$

$$\Sigma_2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \eta(2^{-k} r) v(x, 2^{-k} r) \lesssim M \sum_{k=n+1}^{\infty} \eta(2^{-k} r) \lesssim$$

$$\lesssim M\eta(r) \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k\frac{\gamma}{p}} \lesssim M\eta(r) 2^{-n\frac{\gamma}{p}}.$$

Выберем

$$n = \left[\log_2 \left(\frac{M}{I(x)}\right)^{\frac{p}{\gamma}}\right] + 1.$$

Тогда

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 \lesssim n\eta(r) v(x,r) + M\eta(r) 2^{-n\frac{\gamma}{p}} \lesssim (n+1)\eta(r) I(x).$$

Выбрав некоторое число $0<\beta<p$, получим следующую оценку

$$|f(x)-I^{(\theta)}_{B(x,r)}f|\lesssim \eta(r)I\log_2\left(\frac{M}{I}\right)^{\frac{p}{\gamma}}\lesssim \eta(r)I\ln\left(\frac{M}{I}\right)^{\beta}. \tag{22}$$

Далее оценим разность

$$|f(x)-I^{(\theta)}_{B}f|\le |f(x)-I^{(\theta)}_{B(x,r)}f|+|I^{(\theta)}_{B}f-I^{(\theta)}_{B(x,r)}f|.$$

Первое из слагаемых справа оценено в (22). Для оценки второго слагаемого используем часть 2) леммы 4 и неравенство (3)

$$|I^{(\theta)}_{B}f-I^{(\theta)}_{B(x,r)}f|\lesssim \eta(r)\left(\fint_{\sigma B(x,R)} g^p\,d\mu\right)^{1/p}=\eta(r)I(x).$$

Мы использовали здесь то, что $B\subset B(x,R)$ и условие (2).

Таким образом, мы получаем, что

$$|f(x)-I^{(\theta)}_{B}f|\lesssim \eta(r)I\max\left\{1,\ln\left(\frac{M}{I(x)}\right)^{\beta}\right\}\lesssim$$

$$\lesssim \eta(r)\left(\fint_{4\sigma a_d^2 B} g^p\,d\mu\right)^{1/p}\max\left\{1,\ln\left(\frac{M}{I}\right)^{\beta}\right\}. \tag{23}$$

Далее из оценки (23) получаем неравенство

$$\exp\frac{|f(x)-I^{(\theta)}_{B}f|}{\eta(r)\left(\fint_{4\sigma a_d^2 B} g^p\,d\mu\right)^{1/p}}\lesssim \max\left\{e,\left(\frac{M}{I(x)}\right)^{\beta}\right\}.$$

Проинтегрировав его по $x\in B$, получаем

$$\fint_B \exp\frac{|f(x)-I^{(\theta)}_{B}f|}{\eta(r)\left(\fint_{4\sigma a_d^2 B} g^p\,d\mu\right)^{1/p}}\,d\mu(x)\lesssim \fint_B\left(\frac{1}{I(x)}\right)^{\beta}\left(M_{p,2a_d\sigma B}g(x)\right)^{\beta}\,d\mu(x)\lesssim$$

$$\lesssim \frac{1}{\mu(B)}\int_B\left(\fint_{\sigma B(x,R)} g^p\,d\mu\right)^{-\beta/p}\left(M_{p,2a_d\sigma B}g(x)\right)^{\beta}\,d\mu(x). \tag{24}$$

В силу очевидного неравенства

$$\fint_{\sigma B} g^p\,d\mu\lesssim \fint_{\sigma B(x,R)} g^p\,d\mu$$

выполнено следующее

$$\left(\fint_{\sigma B(x,R)} g^p \, d\mu\right)^{-\beta/p} \lesssim \left(\fint_{\sigma B} g^p \, d\mu\right)^{-\beta/p}.$$

Поэтому в силу (8) неравенство (24) примет вид

$$\fint_B \exp \frac{|f(x) - I_B^{(\theta)} f|}{\eta(r)\left(\fint_{4\sigma a_d^2 B} g^p \, d\mu\right)^{1/p}} \, d\mu(x) \lesssim$$

$$\lesssim \left(\fint_{\sigma B} g^p \, d\mu\right)^{-\beta/p} \frac{1}{\mu(B)} \mu\,(B)^{1-\beta/p} \left(\int_B g^p \, d\mu\right)^{\beta/p} \lesssim 1,$$

что и доказывает (20).

Наконец, (21) вытекает из уже доказанной экспоненциальной оценки (20) и неравенства

$$\exp|x| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \geq \frac{|x|^n}{n!}, \quad n = [q] + 1.$$

Отметим, что (20) — неравенство типа классического неравенства Трудингера [15].

4. Заключение

В работе доказано, что неравенство вида

$$\left(\fint_B |f(y) - I_B^{(\theta)} f|^\theta \, d\mu(y)\right)^{1/\theta} \leqslant c\eta(r_B) \left(\fint_{\sigma B} g^p \, d\mu\right)^{1/p},$$

справедливое для всех шаров B в метрическом пространстве с мерой, удовлетворяющей условию удвоения, обладают свойством самоулучшения — из него вытекает такое же неравенство (с некоторой большей постоянной c), но с заменой θ в левой части на вполне определенный больший показатель q. Здесь $\theta, p > 0$, η — возрастающая функция, $\eta(+0) = 0$ $I_B^{(\theta)} f$ — постоянная наилучшего приближения функции f в пространстве $L^\theta(B)$. Такой эффект для $\theta = 1 < p$ был известен.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. Hajłasz, P. Koskela Sobolev met Poincaré // Memoirs of Amer. Math. Soc. 2000. V. 145, P. 1–115.

2. И. А. Иванишко, В. Г. Кротов Обобщенное неравенство Пуанкаре–Соболева на метрических пространствах // Труды Ин-та математики НАН Беларуси. 2006. Т. 14, №1. С. 51–61.

3. Е. В. Игнатьева Неравенство типа Соболева-Пуанкаре на метрических пространствах в терминах шарп-максимальных функций // Матем. заметки. 2007. Т. 81, №1. С. 140–144.

4. V. G. Krotov Maximal Functions Measuring Smoothness // Recent Advances in Harmonic Analysis and Applications In Honor of Konstantin Oskolkov, Proc. in Math. and Stat. 2013. V. 25. C. 197–223.
5. A. P. Calderón Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions // Studia Math. 1972. V. 44, P. 167–186.
6. A. P. Calderón, R. Scott Sobolev type inequalities for $p > 0$ // Studia Math. 1978. V. 62, P. 75–92.
7. R. DeVore, R. Sharpley Maximal functions measuring local smoothness // Memoirs of the Amer. Math. Soc. 1984. V. 47, P. 1–115.
8. P. Hajłasz Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Anal. 1996. V. 5, №4. P. 403–415.
9. R. R. Coifman, G. Weiss Analyse harmonique non-commutative sur certain espaces homogenés. // Lecture Notes in Math. 1971. V. 242, P. 1–176.
10. J. Heinonen Lectures on Analysis on Metric Spaces. / Berlin: Springer-Verlag. 2001.
11. E. Stein Singular integrals and differentiability properties of functions. / Prinston Univ. Press. 1970.
12. В. Г. Кротов Количественная форма C-свойства Лузина. // Укр. Матем. Журнал. 2010. №3. С. 388–396.
13. В. Г. Кротов Критерии компактности в пространствах L^p, $p \geqslant 0$. // Матем. Сборник. 2012. №7. С. 129–148.
14. В. Г. Кротов, А. И. Порабкович Оценки L^p-осцилляций функций при $p > 0$. // Матем. заметки. 2015. Т. 97, №3. С. 407–420.
15. N. Trudinger On embedding into Orlicz spaces and some applications. // J. Math. Mech. 1967. Vol. 17. P. 473-483.

REFERENCES

1. Hajłasz, P., Koskela, P. 2000, "Sobolev met Poincaré", *Memoirs of Amer. Math. Soc.* vol. 145, pp. 1–115.
2. Ivanishko, I.A., Krotov, V.G. 2006, "Generalized Poincaré–Sobolev inequality on metric spaces", *Inst. of Math. of NAS of Belarus*, vol. 14, №1, pp. 51–61.
3. Ignat'eva, E.V. 2007, "Sobolev–Poincaré-type inequality on metric spaces in terms of sharp-maximal functions", *Math. Notes*, vol. 81, №1, pp. 121–125.
4. Krotov, V.G. 2013, "Maximal Functions Measuring Smoothness", In *Recent Advances in Harmonic Analysis and Applications In Honor of Konstantin Oskolkov, Springer Proc. in Math. and Stat.*, vol. 25, pp. 197–223.
5. Calderón, A.P. 1972, "Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions", *Studia Math.* vol. 44, pp. 167–186.
6. Calderón, A.P., Scott, R. 1978, "Sobolev type inequalities for $p > 0$", *Studia Math.* vol. 62, pp. 75–92.

7. DeVore, R., Sharpley R. 1984, ”Maximal functions measuring local smoothness” , *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* vol. 47, pp. 1–115.

8. Hajłasz, P. 1996, ”Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces” , *Potential Anal.* vol. 5, №4, pp. 403–415.

9. Coifman, R.R., Weiss, G. 1971, ”Analyse harmonique non-commutative sur certain espaces homogenés” , *Lecture Notes in Math* vol. 242, pp. 1–176.

10. Heinonen, J. 2001, ”Lectures on Analysis on Metric Spaces” , Springer-Verlag, Berlin

11. Stein, E. 1970, ”Singular integrals and differentiability properties of functions” , Prinston Univ. Press.

12. Krotov, V.G. 2010, ”Quantitative form of the Luzin C-property” , *Ukr. Math. J.*. vol. 62, №3, pp. 441–451.

13. Krotov, V.G. 2012, ”Criteria for compactness in L^p-spaces, $p \geqslant 0$” , *Sbornik: Mathematics* vol. 303, №7, pp. 1045–1064.

14. Krotov, V.G., Porabkovich, A.I. 2015, ”Estimates of L^p-oscillations of functions for $p > 0$” , *Math. Notes* vol. 97, №3, pp. 384–395.

15. Trudinger, N. 1967, ”On embedding into Orlicz spaces and some applications” , *J. Math. Mech.* vol. 17, pp. 473–483.

Белорусский государственный университет.
Получено 29.12.2015 г.
Принято в печать 11.03.2016 г.