

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 531.091

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-304-312

**Аналитическое обоснование гироскопического эффекта
в работах О. И. Сомова**

А. О. Юлина

Юлина Анна Олеговна — Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (г. Санкт-Петербург).

e-mail: parfanova19761976@mail.ru

Аннотация

С начала XIX в. в европейских странах (Германия, Франция, Бельгия, Австрия) астрономы, инженеры, механики изобретали, создавали и совершенствовали гироскопы. Практический запрос на устройства с гироскопом был значительным, но специальной теории гироскопа ещё не было. Фундамент теории был заложен Эйлером, развит Лагранжем, продолжен Пуассоном. С другой стороны, в XIX в. в работах Якоби, Абеля, Вейерштрасса была создана и начала развиваться теория эллиптических функций. На основе этой теории К. Якоби и О.И. Сомовым была создана специальная теория гироскопа.

Ключевые слова: Гироскоп, эллиптическая функция, Эйлер, Лагранж, Якоби, Сомов.

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:

А. О. Юлина. Аналитическое обоснование гироскопического эффекта в работах О. И. Сомова // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 304–312.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 531.091

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-304-312

**Analytical substantiation of the gyroscopic effect
in the works of O. I. Somov**

A. O. Yulina

Yulina Anna Olegovna — Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering (St. Petersburg).

e-mail: parfanova19761976@mail.ru

Abstract

Since the beginning of the XIX century in European countries (Germany, France, Belgium, Austria) astronomers, engineers, mechanics invented, created and improved gyroscopes. The practical demand for gyroscope devices has been significant, but there has not yet been a specific theory of the gyroscope. The foundation of the theory was laid by Euler, developed by Lagrange, and continued by Poisson. On the other hand, in the 19th century in the works of Jacobi, Abel, Weierstrass, the theory of elliptic functions was created and began to develop. Based on this theory, K. Jacobi and O.I. Somov created a special theory of the gyroscope

Keywords: Gyroscope, elliptic function, Euler, Lagrange, Jacobi, Somov.

Bibliography: 9 titles.

For citation:

A. O. Yulina, 2023, "Analytical substantiation of the gyroscopic effect in the works of O. I Somov", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 304–312.

1. Введение

В 1817 году Иоанн Боненбергер (Johann von Bohnenberger; 1765–1831) изобрёл, а затем опубликовал описание гироскопа [1]. Главной частью устройства был вращающийся массивный шар в кардановом подвесе. В 1852 году французский учёный Ж. Б. Фуко (J. B. L. Foucault, 1819–1868) усовершенствовал гироскоп и впервые использовал его как прибор, доказывающий суточное вращение Земли.

Впервые уравновешенный гироскоп нашел практическое применение в устройстве для стабилизации курса торпеды, изобретенном в 1880-х гг. австрийским инженером Л. Обри (L. Obry, 1863–1915) [1]. Гироскоп Обри устанавливался в кардановом подвесе так, чтобы его ось вращения была параллельна продольной оси торпеды. Ротор гироскопа приводился во вращение за несколько секунд до выстрела, когда ось торпеды была уже направлена на цель. При движении торпеды гироскоп продолжал сохранять исходное направление и при возникновении отклонений торпеды поворачивал ее рули таким образом, чтобы обеспечить неизменность курса.

Специальным прикладным разделом динамики твердого тела с одной неподвижной точкой является теория гироскопа. Теоретические основания теории гироскопа в рамках динамики твердого тела развивались в связи с решением задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Впервые задачу о вращении твердого тела, причем сразу в общем виде, поставил Эйлер в 1758 г. В работе «Теория движения твердых тел» [6] он рассмотрел случай движения твердого тела вокруг неподвижной точки (полюса). В этом случае тело имеет три степени свободы. Такие три параметра Леонард Эйлер называет углами: прецессии – ψ , собственного вращения – φ , нутации – θ , которые однозначно определяют положение подвижной системы отсчета, жестко связанной с телом, относительно неподвижной системы координат. При вращении твердого тела углы Эйлера меняются, являясь некоторыми функциями времени, которые он вывел еще в работе «Открытие нового принципа механики» (1750). Были получены кинематические уравнения (связи угловых скоростей тела и параметров движения). Далее Эйлер устанавливает зависимости между параметрами движения и силами, действующими на тело – динамические уравнения. Эйлер решает задачу для случая трех или двух равных главных моментов инерции. В случае попарно неравных моментов при отсутствии внешних сил он выражает закон движения через дуги конических сечений, т.е. через эллиптические интегралы, и рассматривает условия, при которых решение сводится к элементарным интегралам.

Следующий шаг вперед вскоре сделал Жозеф Луи Лагранж (1736–1813). Существенно новым достижением Лагранжа в этой проблеме была постановка задачи о движении твердого

тела, получившая в дальнейшем наименование “случая Лагранжа”: точка опоры или подвеса не совпадает с центром тяжести тела [7]. Лагранж ввел упрощающие предположения о динамической симметрии твердого тела и о расположении точки опоры на оси симметрии. Этот важный результат вместе с выделением практически интересного случая движения тяжелого симметричного гироскопа (как стали позже называть случай Лагранжа) представляет чрезвычайно большое достижение в динамике твердого тела. Таким образом, Лагранж привел задачу о вращении твердого тела около неподвижной точки к квадратурам. В 1773 г. он исследовал вращение твердого тела некоторой формы около неподвижной точки, рассмотрев и усовершенствовав решение Эйлера задачи о вращении тела без действия внешних сил. Позже, при подготовке второго издания “Аналитической механики” в начале XIX в., Лагранж вернулся к этой проблеме, начав более глубокое ее исследование [7]. Он вводит понятие мгновенной оси вращения твердого тела около неподвижной точки, опираясь на обоснование примененного им подхода, детально разработанного ранее. Далее заново выводятся кинематические уравнения Эйлера вращения твердого тела в дифференциальной форме. Затем заново выводятся динамические уравнения Эйлера, исходя из той формы дифференциальных уравнений движения системы, которые теперь называют “уравнениями Лагранжа второго рода”. Лагранж подчеркивает, что свободные оси в твердом теле открыл Эйлер, и наиболее изящная и удобная во многих случаях форма дифференциальных уравнений движения впервые выведена Эйлером [7]. Однако Лагранж этим не ограничился: он наметил путь интегрирования и двух первых уравнений движения, довел их до квадратур в эллиптических функциях.

В 1811 г. Симеон Дени Пуассон (1781–1840) более детально исследовал проблемы для случая, найденного Лагранжем, и довел его почти до современного состояния. Пуассон опубликовал эти исследования несколько раньше посмертного выхода в свет второго тома “Аналитической механики” Лагранжа (1815). Он, видимо, ничего не знал о результатах своего учителя Лагранжа по тому же вопросу, связанному с кинематикой вращения твердого тела [8].

Существенный шаг в развитии динамики твердого тела, сделал Карл Якоби (1854–1851), введя эллиптические функции. С помощью этих функций время становится независимой переменной и основные параметры вращения твердого тела являются однозначными функциями времени. Работа К. Якоби по эллиптическим функциям была выполнена им в 1849 году, а опубликована уже посмертно в его втором томе сочинений Берлинской академией наук в 1882 году. Таким образом, созданный Якоби математический аппарат эллиптических функций позволил О.И. Сомову в 1850 году блестяще решить задачу о вращении твердого тела в случае первоначального удара. В 1850 году Осип Иванович Сомов (1815–1876) решил задачу о вращении твердого тела около неподвижной точки в новой постановке, отличной от Эйлера и Лагранжа: для того случая, когда движение происходит только от первоначального удара. Он показал, как эллиптические функции Якоби применяются в механике твердого тела. «Якоби дал новые формулы, отличающиеся своей изящностью и разрешающие вполне вопрос. Они были сначала напечатаны без доказательства, а потом в 39 томе журнала Крелле, с доказательством и новым развитием» [2].

Общее решение задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки позволяет выполнять следующие технические задачи: рассчитывать кинематические параметры качки основания и элементов подвеса в системе с динамически настраиваемым гироскопом, определять способы стабилизации двуногих роботов на подвижной опоре, изобретать новые стабилизирующие устройства.

Таким образом появилась необходимость в обосновании гироскопического эффекта. Для этого необходимо рассмотреть третий случай решения классической задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. К середине XIX в. в работах Абеля, Якоби, Вейерштрасса, Сомова, Римана определились два основных теоретических подхода: геометрический (Риман) и аналитический (на базе теории эллиптических функций). История этого вопроса содержит значительные пробелы, и целью нашей статьи является их освещение.

Первое систематическое изложение по вопросам теории эллиптических функций в России представлено у петербургского академика Осипа Ивановича Сомова. Подробно и ясно изложена эта непростая и поныне отрасль интегрального исчисления в его фундаментальном труде «Основания теории эллиптических функций» (1850 год). Книга содержит семь глав, и отдельная глава посвящена приложениям эллиптических функций к некоторым вопросам геометрии и механики.[2]

Таким образом, Сомов в 1850 году получил аналитическое представление для вращения твердого тела вокруг неподвижной точки [3].

А в 1855 году он объясняет гироскопический эффект [4]. Далее перейдем к анализу этой работы.

2. Аналитическое представление гироскопического эффекта

В 1855 году Сомов продолжил исследование задачи о вращении твердого тела. Эта работа представляет законченное аналитическое решение поставленной проблемы. Сомов получил все основные характеристики движения через эллиптические функции третьего рода и обосновал соотношения между моментами инерции для гироскопического явления. Кратко приведем основные выводы статьи «Solution rigoureuse du problème de la rotation autour d'un point fixe d'un corps solide pesant, lorsque ce corps a deux moments d'inertie principaux égaux. (Bulletin de la Classe Physico-Mathématique de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg, XIV, 1855.)»

Интегрирование уравнений движения тяжелого твердого тела любой формы вокруг неподвижной точки, которая не находится в центре тяжести, представляет значительные трудности. Сомов воспользовался свойствами эллиптических функций для строгого обсуждения такого движения. Он ограничился заменой эллиптических функций приближенными формулами в случае, когда угол между вертикалью и осью вращения остается очень малым, а скорость вращения очень большая.

В статье будет представлено содержание работы Сомова, в которой он дал полное и строгое решение поставленной задачи, включающей, как частный случай, задачу о коническом маятнике. Любопытные явления, наблюдаемые на гироскопе или машине от Bohnenberger, также находят свои объяснения в этом решении.

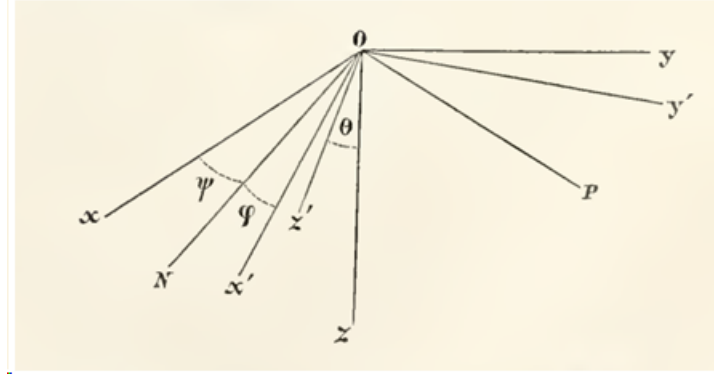
Дифференциальные уравнения движения, которые рассматриваются, а также их первые интегралы, могут быть взяты либо из аналитической механики Лагранжа, либо из механики Пуассона. Сомов, используя все данные задачи, сразу выводит первые интегралы геометрическим методом.

Для описания вращения твердого тела вокруг неподвижной точки Сомов вводит две системы отсчета: неподвижная (O, X, Y, Z) и подвижная, связанная с телом вращения (O, X', Y', Z') . Ось Z - вертикальная ось вращения, на линии Z' находится центр тяжести тела. Тогда параметры, однозначно определяющие положение тела: $ZOZ' = \theta$, $NOX = \psi$, $X'ON = \varphi$. Где ON , линия пересечения плоскостей (O, X, Y) и (O, X', Y') .

Обозначая за t время, дифференциалы этих углов: $d\psi, d\varphi, d\theta$ будут тремя мгновенными перемещениями, которые определяют угловое перемещение в течение времени dt .

Итак, если автор представляет значения: $d\psi, d\varphi, d\theta$ по длинам диапазона на соответствующих осях: ON, OZ, OZ' , и далее находит равнодействующую по правилу параллелограмма, тогда направление результирующей будет мгновенной осью, а ее длина - значением мгновенного углового смещения. Такие же предположения он делает относительно осей OX', OY', OZ' , которые будут представлять значения мгновенных перемещений вокруг этих осей. Вот их записать:

$$pdt, qdt, rdt.$$



Сумма их проекций на любую ось должна быть равной сумме проекций $d\psi, d\varphi, d\theta$ на эту же ось. Таким образом rdt есть сумма проекций $d\psi, d\varphi, d\theta$ на OZ' ; но $d\theta$, направленное по ON , которое перпендикулярно OZ , дает нулевую проекцию; проекция $d\theta$ будет $\cos \theta \cdot d\psi$, а $d\varphi$ не отличается от элемента проектирования; следовательно

$$rdt = \cos \theta \cdot d\psi + d\varphi.$$

Это значение, деленное на dt , представляет собой мгновенную скорость вращения вокруг оси OZ . Далее Сщмов обозначает через n начальное значение скорости вращения вокруг этой оси, тогда для каждого момента $r = n$:

$$r = n = \cos \cdot \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \quad (1)$$

Для исследования этой скорости Сомов использует законы сохранения кинетического момента:

$$A \sin^2(2\theta) \cdot \frac{d\psi}{dt} + Cn \quad (2)$$

и механической энергии (теорема живых сил):

$$A[\sin^2(2\theta) \cdot (\frac{d\psi}{dt})^2 + (\frac{d\theta}{dt})^2] = 2Mg\gamma(\cos \theta + h) \quad (3)$$

A, C - моменты инерции относительно осей OP, OZ' , γ - расстояние от центра тяжести до точки O , h - начальное отклонение.

Определяет константы l и h для средних значений начальных угла θ и составляющих мгновенной угловой скорости: $\frac{d\psi}{dt}, \frac{d\theta}{dt}$. Обозначает соответственно эти начальные значения через: α, λ, μ , тогда уравнения (2) и (3) примут вид:

$$A\lambda \sin^2(\alpha) + Cn \cos \alpha = l, A(\lambda^2 \cdot \sin^2(\alpha) + \mu^2) = 2Mg\gamma(\cos \alpha + h) \quad (4)$$

Исключение $\frac{d\psi}{dt}$ из уравнений (2) и (3) дает следующее уравнение между θ и t :

$$\sin^2(2\theta) \cdot (\frac{d\theta}{dt})^2 = \frac{2Mg\gamma}{A} \cdot (\cos \theta + h) \cdot \sin^2(2\theta) - \frac{(l - Cn \cos \theta)^2}{A^2}$$

Для краткости, обозначая $\cos \theta = z$:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2Mg\gamma(z+h)(1-z^2) - (l - Cnz)^2}{A^2}$$

Три корня второго члена этого уравнения, рассматриваемые как функция от z , действительны. В самом деле, подставляя в этом члене вместо z последовательно: $-\infty, -1, \cos \alpha, +1$, выясняем знаки этой функции: $+, -, +, -$.

Это не только доказывает действительность корней, но и показывает, что рассматриваемая Сомовым функция имеет корень отрицательный, модуль которого < 1 , и два корня с числовыми значениями > 1 , одно из которых находится между пределами: $-1, \cos(\alpha)$. Обозначив эти корни в соответствии с порядком их величины: $-c, b, a$, будем иметь:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2Mg\gamma}{A} \cdot (a-c)(z-b)(z+c) \quad (5)$$

Числовое значение для $z = \cos \theta$ не может превышать 1, значение $(z+c)$ всегда будет оставаться положительным; поэтому $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ имеет положительные значения если, соответствующая величина z находится в пределах: a, b .

Чтобы подчинить z этому условию, автор полагает :

$$z = a \cos^2 \omega + b \sin^2 \omega = b + (a-b) \cdot \cos^2 \omega$$

обозначая через ω вещественный угол. Более того если:

$$\frac{a-b}{a+c} = k^2, u = \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \omega)}}$$

Получает

$$\omega = am(u), z = a \cos^2(am(u)) + b \sin^2(am(u)), a-z = (a+c)k^2 \sin^2(am(u)), \\ z-b = (a+c)k^2 \cos^2(am(u)), z+c = (a-c)(1-k^2) \sin^2(am(u)) = (a+c)\Delta^2 am(u).$$

Тогда

$$\frac{dz}{dt} = -2(a+c)k^2 \sin^2(am(u)) \cos(am(u)) \Delta am(u) \frac{du}{dt}$$

, что при подстановке в уравнение (5) дает

$$\frac{du}{dt} = \frac{Mg\gamma}{2A} \cdot (a+c)$$

Обозначив для сокращения $\sqrt{\frac{du}{dt} = \frac{Mg\gamma}{2A} \cdot (a+c)} = p$, получает

$$du = \pm p dt, u = \pm p(t + \tau),$$

где τ произвольная константа.

Далее из уравнения (2) определяет значение угла ψ , пользуясь подстановками приведенными выше. После интегрирования получает следующее выражение для этого угла:

$$\psi + \psi_0 = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{(1+b)(c-1)}{(a+c)(1+a)}} \int_0^u \frac{du}{1 - \frac{a-b}{1+a}} \cdot \sin^2 am(u) + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{(1-b)(c+1)}{(a+c)(1-a)}} \int_0^u \frac{du}{1 + \frac{a-b}{1-a}} \cdot \sin^2 am(u) \quad (6)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – параметры, определяющие связь между моментами инерции, кинетическим моментом и введенными выше величинами: p, a, b, c .

Таким образом, переменная ψ будет выражаться двумя эллиптическими функциями третьего рода. Далее представляет эти эллиптические функции через тета функции и переходит к быстросходящимся рядам. Подобные выводы делает относительно двух остальных углов (собственного вращения и нутации).

Угловую скорость тела Сомов раскладывает на составляющие: p, q, r относительно осей X', Y', Z' соответственно. Составляющая скорости r определяет вращение тела относительно вертикальной оси. Значения этой скорости будут задавать следующие режимы движения твердого тела:

- Вращение с постоянной по направлению угловой скоростью собственного вращения (гироскоп),
- Колебательное движение.

Для гироскопического явления Сомов приводит подробные выводы относительно соотношения моментов инерции. Детально анализируя угловую скорость собственного вращения тела:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{n[A \sin^2 \theta + C \cos \theta (\cos \theta - \cos \alpha)]}{\sin^2 \theta}$$

, Сомов доказывает, что подобное явление имеет место при следующих условиях:

$$A = \frac{C}{2}, \cos \alpha < 0, \cos^2 \alpha > \frac{4A(C - A)}{C}$$

3. Заключение

К началу XIX века Ж.Л. Лагранж привел задачу о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки к квадратурам. Дальнейшее развитие динамика твердого тела получила в работах К. Якоби и О.И. Сомова [5]. Якоби разработал аппарат теории эллиптических функций и применил его к решению задачи о вращении. Сомов показал, что основные интегралы движения являются эллиптическими интегралами: первый из них – эллиптический интеграл первого рода, два других эллиптических интеграла имеют более сложный вид. К 1851 г. Сомов дал первое обобщение задачи вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. Он получил решение этой задачи для случая после первоначального удара, интегрируя дифференциальные уравнения движения с помощью эллиптических функций Якоби третьего рода с мнимым параметром. Решение Сомова показало, что основные параметры движения выражаются через композицию эллиптических функций простейшего вида и, вводя их, задача о вращении твердого тела относительно неподвижной точки сводится к простейшим элементам.

В 1855 Сомов дает фундаментальное аналитическое обоснование гироскопического эффекта, опираясь на полученные ранее выводы.

Таким образом, рассмотренное решение задачи, представленное Сомовым О.И. в 1850 и 1855 годах вполне объясняет дальнейшее направление исследований: как в кватернионном представлении, так и в решении Ковалевской С.В.[5]

К сожалению, статья Сомова осталась невостребованной ни в России, ни в Европе. Возможно, это было связано с политическими событиями 1855 г. (Крымская война), либо с отсутствием в России запроса на использование гироскопов. Высоко оценил исследование Сомова лишь Феликс Клейн. С 1890-х гг. этой темой стали серьезно заниматься в военной и промышленной отраслях разных стран. В Германии Ф. Клейн вместе с Арнольдом Зоммерфельдом написал исследования теории гироскопа в четырех томах (Felix Klein with Arnold Sommerfeld.

Theorie des Kreisels. 1897, 1898, 1903, 1910). В России Мещерский И.В. использовал гироскопическую стабилизацию для создания однорельсовой железной дороги. Сейчас гироскоп широко применяется во всех промышленных отраслях, связанных со стабилизацией, навигацией и ориентацией механических объектов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.О. Юлина, Д.В. Бородин: О работе И.В. Мещерского в области гироскопической стабилизации монорельсового вагона // История науки и техники. 2020 г. № 4. С. 45-52.
2. Сомов О.И. Основания теории эллиптических функций. СПб: АН, 1850 г. - 250 с.
3. Юлина. А.О. К истории задачи о вращении твердого тела около неподвижной точки в случае первоначального удара. История науки и техники, 2021 (12): 03-08.
4. J. Somoff. "Solution rigoureuse du problème de la rotation autour d'un point fixe d'un corps solide pesant, lorsque ce corps a deux moments d'inertie principaux égaux"... (Bulletin de la Classe Physico-Mathématique de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg, XIV, 1855., стр.115-136.
5. Клейн Ф. Математическая теория волчка.- Москва-Ижевск, 2003 г.- 70 стр.
6. Euler L. Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable // Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 1765. T. XIV. – P. 154–193.
7. Lagrange J. L. Mécanique analytique. Paris: Ve Courcier, 1811–15.
8. Poinso, L. Éléments de statique, à l'usage des lycées (Nouv. éd.) par L. Poinso; nouv. éd., augm. d'un Mémoire sur la composition des moments et des aires. Paris: Volland l'aîné et le jeune, 1811. – 301 P.
9. Ковалевская С.В. Научные труды. СССР: АН, 1948 г. – с. 153.

REFERENCES

1. A. O. Yulina, D. V. Borodin, 2020, "About the work of I.V. Meshchersky in the field of gyroscopic stabilization of a monorail car" // History of Science and Technology. № . 4. pp. 45-52.
2. O. I. Somov. Foundations of the theory of elliptic functions. St. Petersburg: AN, 1850 - 250 p.
3. A. O. Yulina, 2021, "On the history of the problem of rotation of a rigid body around a fixed point in the case of an initial impact" // History of science and technology, (12): 03-08.
4. J. Somoff. "Solution rigoureuse du problème de la rotation autour d'un point fixe d'un corps solide pesant, lorsque ce corps a deux moments d'inertie principaux égaux"... (Bulletin de la Classe Physico-Mathématique de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg, XIV, 1855., стр.115-136.
5. F. Klein, 2003, "Mathematical theory of the top". - Moscow-Izhevsk, 2003 - 70 p.
6. L. Euler, 1765, "Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable" // Mémoires de l'académie des sciences de Berlin. T. XIV. – P. 154–193.
7. J. L. Lagrange, Mécanique analytique. Paris: Ve Courcier, 1811–15.

8. L. Poinsot, *Éléments de statique, à l'usage des lycées* (Nouv. éd.) par L. Poinsot; nouv. éd., augm. d'un *Mémoire sur la composition des moments et des aires*. Paris: Volland l'aîné et le jeune, 1811. – 301 P.
9. S.V. Kovalevskaya, *Scientific works*. USSR: AN, 1948 - p. 153.

Получено: 07.08.22

Принято в печать: 24.04.2023