

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 539.219.2

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-253-263

**Концентрация напряжений в слоистой плоскости с эллиптическим вырезом<sup>1</sup>**

В. И. Горбачев, В. В. Некрасов

**Горбачев Владимир Иванович** — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: vgorby@mail.ru*

**Некрасов Всеволод Валерьевич** — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: vsevolod.nekrasov@math.msu.ru*

**Аннотация**

В статье рассматривается задача о концентрации напряжений в упругой слоистой плоскости с эллиптическим вырезом. Явление исследуется с помощью понятия тензора концентрации напряжений. Изучаются два уровня концентрации: из-за слоистости и из-за выреза. Отдельно приведены формулы для компонент тензора концентрации напряжений в случае бесконечной слоистой плоскости (первый уровень), а также в случае однородной анизотропной плоскости с эллиптическим вырезом (второй уровень). Тензор концентрации напряжений в слоистой плоскости с вырезом представляется как произведение тензоров концентрации на первом и втором уровнях. Приведены приближенные формулы для компонент тензора концентрации. Подробно рассмотрен случай совпадения ориентации слоев и главных осей эллиптического отверстия. В этом случае вычислены коэффициенты концентрации в характерных точках, приведены графики зависимости этих коэффициентов от отношения модулей упругости слоев. Кроме того, проведено численное решение задачи с помощью пакета конечно-элементного анализа. Полученные аналитические и численные результаты согласуются с хорошей точностью.

*Ключевые слова:* механика деформируемого твердого тела, слоистый композит, концентрация напряжений.

*Библиография:* 17 названий.

**Для цитирования:**

В. И. Горбачев, В. В. Некрасов. Концентрация напряжений в слоистой плоскости с эллиптическим вырезом // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 253–263.

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках плана НИР кафедры механики композитов механико-математического ф-та МГУ им. М. В. Ломоносова № АААА-А16-116070810022-4, при финансовой поддержке Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 539.219.2

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-253-263

**Stress concentration in a layered plane with an elliptical cutout**

V. I. Gorbachev, V. V. Nekrasov

**Gorbachev Vladimir Ivanovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail: vigorby@mail.ru*

**Nekrasov Vsevolod Valeryevich** — Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail: vsevolod.nekrasov@math.msu.ru*

**Abstract**

The article deals with the problem of stress concentration in an elastic layered plane with an elliptical cutout. The phenomenon is investigated using the concept of stress concentration tensor. Two levels of concentration are studied: because of the layering and because of the cutout. Formulas for the stress concentration tensor components are given separately in the case of an infinite layered plane (first level), as well as in the case of a homogeneous anisotropic plane with an elliptical cutout (second level). Stress concentration tensor in a layered plane with It is represented as a product of concentration tensors at the first and second levels. Approximate formulas for the components of the concentration tensor are given. The case of the coincidence of the orientation of the layers and the main axes of the elliptical hole is considered in detail. In this case, the concentration coefficients at characteristic points are calculated, graphs of the dependence of these coefficients on the ratio of the elastic modulus of the layers are given. In addition, a numerical solution of the problem was carried out using a finite element analysis package. The obtained analytical and numerical results are consistent with good accuracy.

*Keywords:* mechanics of deformable solids, layered composite, stress concentration.

*Bibliography:* 17 titles.

**For citation:**

V. I. Gorbachev, V. V. Nekrasov, 2023, "Stress concentration in a layered plane with an elliptical cutout", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 253–263.

**1. Введение**

Широкое применение композиционных материалов (КМ) побуждает к поиску расчетных методик, способных без дорогостоящих затрат на эксперимент прогнозировать поведение композита в составе конструкции, оценивать его прочность. Детальное многоуровневое исследование КМ дает глубинное понимание поведения конструкции из композитов, что позволяет избежать возможных ошибок при проектировании изделий из подобных элементов, создавать конструкции, отвечающие требованиям по прочности и надежности.

При таком исследовании необходимо рассматривать концентрацию напряжений — явление возникновения повышенных местных напряжений в областях резких изменений формы упругого тела, в области вырезов и инородных включений. Концентрация напряжений может существенно влиять на прочность конструкции, особенно при циклических нагружениях [1]. Необходимо точно знать, каковы напряжения в областях концентрации, чтобы иметь возможность судить о возможности разрушения материала.

Классическим примером концентрации напряжений является задача Кирша [2] о равномерном растяжении широкой полосы из однородного изотропного упругого материала с малым отверстием посередине. Такая ситуация часто встречается в технике (например, болтовые, заклепочные соединения и др.).

Для анизотропного материала эта задача была решена Лехницким [3]. Задача о растяжении перекрестно армированной пластины, содержащей круговое отверстие, изучалась Работновым [4].

Большой вклад в изучение явления концентрации напряжений внесли многие российские и иностранные ученые: [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12] и многие другие.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается бесконечная слоистая упругая плоскость, в которой вырезано эллиптическое отверстие (Рис. 1). Расположим оси декартовой системы координат  $Ox_1x_2$  вдоль главных осей эллиптического отверстия. Пусть  $\delta$  — угол между слоями и осью  $x_1$ .

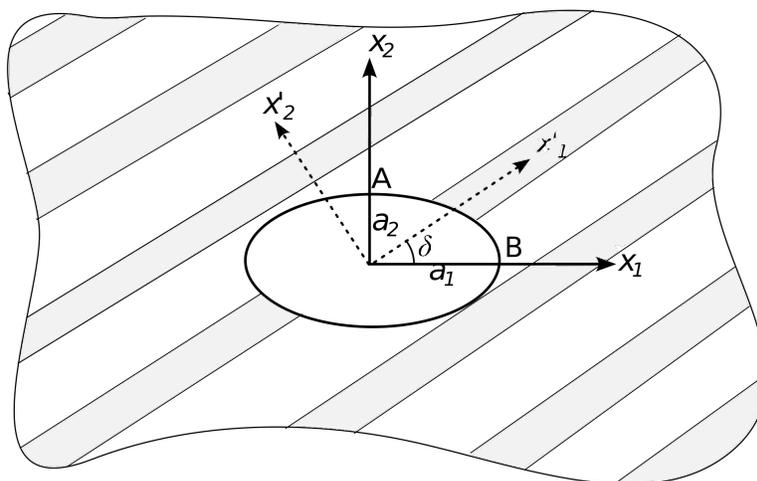


Рис. 1: Слоистая плоскость с эллиптическим вырезом

В рассматриваемой задаче концентрация напряжений происходит от двух причин, а именно из-за отверстия и из-за слоистости плоскости. Поэтому явление концентрации напряжений в слоистой плоскости с вырезом целесообразно рассмотреть на двух уровнях.

## 3. Концентрация напряжений из-за слоистости

Первый уровень — концентрация из-за слоистости. Такой выбор первого уровня связан с тем обстоятельством, что при удалении от отверстия напряжение будет определяться только тензором концентрации напряжений слоистой плоскости, т.е.

$$\underline{\sigma} \rightarrow \underline{A}^{(1)} \underline{\tau}^{(1)} \text{ при } r = \sqrt{x_I x_I} \rightarrow \infty. \quad (1)$$

где  $\underline{\tau}^{(1)}$  — напряжения в теле сравнения на первом уровне. В качестве тела сравнения на втором уровне естественно выбрать однородную анизотропную плоскость с отверстием. Причем свойства материала однородной анизотропной плоскости являются эффективными свойствами слоистого композита, т.е. в координатах  $x'_1 x'_2$  (Рис. 1) они определяются по формулам для

компонент тензора эффективных податливостей бесконечной слоистой плоскости [14]

$$H_{IJKL} = \langle J_{IJKL} \rangle - \left\langle \frac{J_{IJ11}J_{11KL}}{J_{1111}} \right\rangle + \frac{\langle J_{IJ11}/J_{1111} \rangle \langle J_{11KL}/J_{1111} \rangle}{\langle 1/J_{1111} \rangle}, \quad (2)$$

где  $J_{IJKL}(x'_2)$  — компоненты тензора податливости в случае плоской задачи теории упругости. Большие индексы принимают значения 1,2. Знак  $\langle \cdot \rangle$  означает среднее по переменной  $x'_2$ .

Тензор  $\underline{A}^{(1)}$ , входящий в формулу (1), является тензором концентрации напряжений в слоистом композите. Компоненты этого тензора в координатах  $x'_1x'_2$  для бесконечной слоистой плоскости со слоями, перпендикулярными  $x'_2$ ,  $A_{MNPQ}^{Cл}$  были вычислены в работе [15]:

$$A_{MNPQ}^{Cл}(x'_2) = \Delta_{MNPQ} - \Delta_{MN11} \frac{J_{11PQ}(x'_2)}{J_{1111}(x'_2)} + \Delta_{IJ11} \frac{\langle J_{11KL}/J_{1111} \rangle}{J_{1111}(x'_2) \langle 1/J_{1111} \rangle}. \quad (3)$$

Если слои изотропны, тогда [13]

$$J_{MNPQ}(x'_2) = \gamma(x'_2)\delta_{MN}\delta_{PQ} + q(x'_2)\Delta_{MNPQ}. \quad (4)$$

Здесь  $q(x'_2) = [1 + \nu(x'_2)]/E(x'_2)$ ,  $\gamma(x'_2) = -\nu(x'_2)/E(x'_2)$  при плоском напряженном состоянии, и  $\gamma(x'_2) = -\nu(x'_2) \cdot [1 + \nu(x'_2)]/E(x'_2)$  при плоской деформации.

В координатах  $x_1x_2$ , повернутых относительно координат  $x'_1x'_2$  на угол  $\delta$  против часовой стрелки компоненты тензора  $\underline{A}^{(1)}$  будут иметь вид

$$A_{IJKL}^{(1)} = l_{IM}l_{JN}l_{PK}l_{QL}A_{MNPQ}^{Cл}, \quad (5)$$

где  $l_{IJ}$  — компоненты матрицы перехода от координат  $x'_1x'_2$  к координатам  $x_1x_2$

$$(l_{IJ}) = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}. \quad (6)$$

#### 4. Концентрация напряжений из-за отверстия

На втором уровне концентрация напряжений в однородной анизотропной плоскости связана с наличием эллиптического выреза. Телом сравнения на втором уровне является та же самая плоскость, только без отверстия, следовательно

$$\underline{\tau}^{(1)} = \underline{A}^{(2)}\underline{\tau}^{(2)}. \quad (7)$$

Здесь  $\underline{A}^{(2)}$  — тензор концентрации напряжений в анизотропной плоскости с эллиптическим вырезом. Компоненты этого тензора определяются по формуле, полученной ранее В.И. Горбачевым в [17] с использованием методов ТФКП:

$$\begin{aligned} A_{IJKL}^{(2)} &= \Delta_{IJKL} + \\ &+ (-1)^{I+J} \operatorname{Re} \frac{a_1(\Delta_{12KL} + \mu_2\Delta_{22KL}) - ia_2(\Delta_{11KL} + \mu_2\Delta_{12KL})}{(\mu_1 - \mu_2)(a_1 + i\mu_1a_2)} \mu_1^{4-I-J} f_1(z_1) \\ &+ (-1)^{I+J} \operatorname{Re} \frac{a_1(\Delta_{12KL} + \mu_1\Delta_{22KL}) - ia_2(\Delta_{11KL} + \mu_1\Delta_{12KL})}{(\mu_1 - \mu_2)(a_1 + i\mu_2a_2)} \mu_2^{4-I-J} f_2(z_2) \end{aligned} \quad (8)$$

Поясним подробнее обозначения:  $a_1, a_2$  — большая и малая полуоси эллипса соответственно,

$$\mu_K = \alpha_K + i\beta_K, \quad z_K = x_1 + \mu_K x_2, \quad f_K(z_K) = 1 - \frac{z_K}{\sqrt{z_K^2 - (a_1^2 + \mu_K^2 a_2^2)}} \quad (9)$$

$$\alpha_K = \frac{(\lambda_K^2 - 1) \sin \delta \cos \delta}{\cos^2 \delta + \lambda_K^2 \sin^2 \delta}, \quad \beta_K = \frac{\lambda_K}{\cos^2 \delta + \lambda_K^2 \sin^2 \delta} \quad (10)$$

$$\lambda_K = \sqrt{\frac{H'_{1122} + 2H'_{1212}}{H'_{1111}} - (-1)^K \sqrt{D}} \quad D = \left( \frac{H'_{1122} + 2H'_{1212}}{H'_{1111}} \right)^2 - \frac{H'_{2222}}{H'_{1111}} \quad (11)$$

В формулу (8) входят параметры  $\mu_1, \mu_2$ , которые определяются через параметры  $\alpha_K, \beta_K$  по формулам (9). Эти параметры выражаются по формулам (10) через угол  $\delta$  между главной осью анизотропии  $x'_1$  и координатной осью  $x_1$ , а также через величины  $\lambda_K$ . Величины  $\lambda_K$ , в свою очередь, выражаются по формулам (11) через компоненты тензора эффективной податливости в главных осях анизотропии  $x'_1 x'_2$ .

В нашем случае компоненты тензора эффективной податливости в осях  $x'_1 x'_2$  будут определяться через податливости слоев по формулам (2). Если слои изотропны, т.е. компоненты  $J_{IJKL}(x'_2)$  представляются в виде (4), тогда [15]

$$\frac{H'_{1122} + 2H'_{1212}}{H'_{1111}} = \left\langle \frac{\gamma + \langle q \rangle}{\gamma + q} \right\rangle, \quad (12)$$

$$D = \left( \frac{H'_{1122} + 2H'_{1212}}{H'_{1111}} \right)^2 - \frac{H'_{2222}}{H'_{1111}} = \left\langle \frac{1}{\gamma + q} \right\rangle \left\langle \frac{(q - \langle q \rangle)^2}{\gamma + q} \right\rangle \quad (13)$$

При этом коэффициенты  $\lambda_K$  (11) будут определяться по следующей формуле

$$\lambda_K = \sqrt{\left\langle \frac{1}{\gamma + q} \right\rangle - (-1)^K \sqrt{D}} \quad (14)$$

Рассмотрим подробнее формулу (8) для случая совпадения главных осей анизотропии и осей эллипсоидального выреза. Т.к. при этом  $\delta = 0$ , то, согласно (10),  $\alpha_K = 0, \beta_K = \lambda_K$ . Отсюда и из (9) найдем чисто мнимые  $\mu_1, \mu_2$ :  $\mu_K = i\lambda_K, \bar{\mu}_K = -i\lambda_K$ . Учитывая, что в этом случае из (9)  $z_K = x_1 + i\lambda_K x_2$ , представим функции  $f_K(z_K)$  из (8)-(9) в виде

$$f_K(z_K) = 1 - \frac{x_1 + i\lambda_K x_2}{\sqrt{x_1^2 - a_1^2 - \lambda_K^2(x_2^2 - a_2^2) + 2i\lambda_K x_1 x_2}} \quad (15)$$

Отсюда видно, что функции  $f_K(z_K)$  при  $x_1 = 0$  или  $x_2 = 0$  будут действительными функциями

$$f_K(z_K) \Big|_{x_1=0} = 1 - \frac{\lambda_K x_2}{\sqrt{a_1^2 + \lambda_K^2(x_2^2 - a_2^2)}}, \quad f_K(z_K) \Big|_{x_2=0} = 1 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a_1^2 + \lambda_K^2 a_2^2}} \quad (16)$$

В частности, из (8) для рассматриваемого случая вычислим следующие величины компонент тензора концентрации напряжений в характерных точках А и В (см. Рис. 1)

$$A_{1111}^{(2)}(0, a_2) = 1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{a_2}{a_1}, \quad A_{2211}(a_1, 0) = -\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (17)$$

Эти значения компонент тензора концентрации в точности совпадают с коэффициентами концентрации напряжений в растягиваемой вдоль  $x_1$  анизотропной пластинке с эллипсоидальным отверстием, вычисленными С.Г. Лехницким в 1936 г [3].

## 5. Приближенные выражения для компонент тензора концентрации напряжений в слоистой плоскости с отверстием

Найдем далее приближенные выражения для компонент тензора концентрации напряжений в слоистой плоскости с эллиптическим отверстием. В соответствии с методикой, предложенной в [17], этот тензор равен произведению тензоров концентрации на первом и втором уровнях. Кратко сформулируем положения теории, подробно описанной в [17]: это произведение представляет собой первый член асимптотического разложения по малому геометрическому параметру  $\alpha$ , равному отношению периода ячейки к характерному размеру концентратора. Оно дает основной вклад в напряжение в теле с концентраторами различной природы. Такой подход использовался в работе [16] для вычисления концентрации напряжений в упругих телах с множественными концентраторами, где с его помощью были получены результаты, хорошо согласующиеся с известными решениями. Таким образом,

$$\begin{aligned} A_{IJKL} &\approx A_{IJST}^{(1)} A_{STKL}^{(2)} = A_{MNPQ}^{\text{Сл}} l_{IM} l_{JN} l_{PS} l_{QT} A_{STKL}^{(2)} = \\ &= (\Delta_{MNPQ} + \Delta_{MN11} Q_{PQ}) l_{IM} l_{JN} l_{PS} l_{QT} A_{STKL}^{(2)} = A_{IJKL}^{(2)} + l_{11} l_{J1} l_{PS} l_{QT} Q_{PQ} A_{STKL}^{(2)}, \end{aligned} \quad (18)$$

где через  $Q_{IJ}$  обозначена величина

$$Q_{IJ} = \frac{\langle J_{11IJ} / J_{1111} \rangle}{J_{1111}(x'_2) \langle 1 / J_{1111} \rangle} - \frac{J_{11IJ}(x'_2)}{J_{1111}(x'_2)} \quad (19)$$

а коэффициенты  $A_{IJKL}^{(2)}(x_1, x_2)$  определяются по формуле (8).

Пусть слои изотропны, т.е. компоненты  $J_{IJKL}(x'_2)$  представляются в виде (4), тогда отличны от нуля только  $Q_{11}(x'_2)$  и  $Q_{22}(x'_2)$

$$Q_{11} = \frac{1}{(\gamma + q) \langle 1 / (\gamma + q) \rangle} - 1, \quad Q_{22} = \frac{\langle \gamma / (\gamma + q) \rangle}{(\gamma + q) \langle 1 / (\gamma + q) \rangle} - \frac{\gamma}{\gamma + q} \quad (20)$$

Пользуясь формулой (18), распишем более подробно выражения для компонент тензора концентрации

$$\begin{aligned} A_{11KL} &\approx A_{11KL}^{(2)} + Q_{11} \cdot (A_{11KL}^{(2)} \cos^2 \delta + A_{22KL}^{(2)} \sin^2 \delta - A_{12KL}^{(2)} \sin 2\delta) \cos^2 \delta + \\ &\quad + Q_{22} \cdot (A_{11KL}^{(2)} \sin^2 \delta + A_{22KL}^{(2)} \cos^2 \delta + A_{12KL}^{(2)} \sin 2\delta) \cos^2 \delta, \\ A_{22KL} &\approx A_{22KL}^{(2)} + Q_{11} \cdot (A_{11KL}^{(2)} \cos^2 \delta + A_{22KL}^{(2)} \sin^2 \delta - A_{12KL}^{(2)} \sin 2\delta) \sin^2 \delta + \\ &\quad + Q_{22} \cdot (A_{11KL}^{(2)} \sin^2 \delta + A_{22KL}^{(2)} \cos^2 \delta + A_{12KL}^{(2)} \sin 2\delta) \sin^2 \delta, \\ A_{12KL} &\approx A_{12KL}^{(2)} + \frac{1}{2} Q_{11} \cdot (A_{11KL}^{(2)} \cos^2 \delta + A_{22KL}^{(2)} \sin^2 \delta - A_{12KL}^{(2)} \sin 2\delta) \sin 2\delta + \\ &\quad + \frac{1}{2} Q_{22} \cdot (A_{11KL}^{(2)} \sin^2 \delta + A_{22KL}^{(2)} \cos^2 \delta + A_{12KL}^{(2)} \sin 2\delta) \sin 2\delta \end{aligned} \quad (21)$$

## 6. Случай одинаковой ориентации слоев и главных осей эллиптического отверстия

Особенно простой вид приобретают формулы (21) при  $\delta = 0$ , т.е. в том случае, когда слои и главные оси эллиптического отверстия одинаково ориентированы. В этой ситуации системы координат  $x_1, x_2$  и  $x'_1, x'_2$  совпадают,  $l_{IJ} = \delta_{IJ}$ , и формула (18) принимает вид

$$A_{IJKL}(x_1, x_2) \approx A_{IJKL}^{(2)}(x_1, x_2) + \Delta_{IJ11} Q_{MN}(x_2) A_{MNKL}^{(2)}(x_1, x_2) \quad (22)$$

или

$$\begin{aligned} A_{11KL} &\approx A_{11KL}^{(2)} + Q_{MN}A_{MNKL}^{(2)}, \\ A_{22KL} &\approx A_{22KL}^{(2)}, \quad A_{12KL} \approx A_{12KL}^{(2)} \end{aligned} \quad (23)$$

Найденный здесь тензор концентрации напряжений позволяет дать приближенные выражения для напряжений в окрестности эллипсоидального выреза в слоистой плоскости при заданном постоянном тензоре напряжений в теле сравнения, в качестве которого берется однородная анизотропная плоскость с эффективными свойствами без отверстия

$$\sigma_{IJ} \approx A_{IJKL}(x_1, x_2)\tau_{KL} \quad (24)$$

Пусть, например, рассматривается растяжение вдоль слоев, т.е.  $\tau_{11} = p$ ,  $\tau_{22} = \tau_{12} = 0$ . В этом случае

$$\sigma_{IJ} \approx A_{IJ11}(x_1, x_2)p = [A_{IJ11}^{(2)}(x_1, x_2) + \Delta_{IJ11}Q_{MN}(x_2)A_{MN11}^{(2)}(x_1, x_2)]p \quad (25)$$

Если слои изотропны, тогда из формулы (25), а также из формул (20) и (17) найдем значения тангенциальных напряжений в характерных точках А и В (см. Рис. 1) контура отверстия

$$\sigma_{11}(0, a_2) \approx K_A \cdot p, \quad \sigma_{22}(a_1, 0) \approx K_B \cdot p \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} K_A &= [1 + Q_{11}(a_2)]A_{1111}^{(2)}(0, a_2) = \frac{1 + (\lambda_1 + \lambda_2)a_2/a_1}{[\gamma(a_2) + q(a_2)] < 1/\gamma + q >}, \\ K_B &= A_{2211}^{(2)}(a_1, 0) = -\frac{1}{\lambda_1\lambda_2} \end{aligned} \quad (27)$$

При растяжении поперек слоев  $\tau_{22} = p$ ,  $\tau_{11} = \tau_{12} = 0$  получаем

$$\sigma_{IJ} \approx A_{IJ22}(x_1, x_2)p = [A_{IJ22}^{(2)}(x_1, x_2) + \Delta_{IJ11}Q_{MN}(x_2)A_{MN22}^{(2)}(x_1, x_2)]p \quad (28)$$

Тангенциальные напряжения в точках А и В будут равны

$$\sigma_{11}(0, a_2) \approx K'_A \cdot p, \quad \sigma_{22}(a_1, 0) \approx K'_B \cdot p \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} K'_A &= [1 + Q_{11}(a_2)]A_{1122}^{(2)}(0, a_2) = -\frac{1}{[\gamma(a_2) + q(a_2)] < 1/\gamma + q >} \cdot \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}, \\ K'_B &= A_{2211}^{(2)}(a_1, 0) = 1 + (\lambda_1 + \lambda_2)a_2/a_1 \end{aligned} \quad (30)$$

Из формул (27) и (30) видно, что коэффициенты концентрации  $K_B$  и  $K'_B$  будут такими же, как и для однородной анизотропной плоскости, а коэффициенты  $K_A$  и  $K'_A$  зависят от того, какому из слоев принадлежит точка А.

В таблице 1 приведены значения коэффициентов концентрации напряжений для случая слоистой пластины, составленной из двухслойных пакетов периодичности с вырезанным в ней круговым отверстием. Ширина слоев предполагается одинаковой. Коэффициенты Пуассона материалов слоев также приняты одинаковыми  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ , а отношение модулей Юнга изменяются в пределах  $0 < \eta = E_1/E_2 \leq 1$ .

На рисунке 2 представлены графики зависимости коэффициентов концентрации от отношения модулей Юнга слоев  $0 < \eta = E_1/E_2 \leq 1$ . Кривые  $K_B$ ,  $K_A^{[1]}$  и  $K_A^{[2]}$  соответствуют случаю растяжения вдоль слоев периодически неоднородной пластины с круглым отверстием. При этом кривая  $K_A^{[1]}$  соответствует случаю, когда точка А принадлежит первому  $E_1 < E_2$  слою, а кривая  $K_A^{[2]}$  — случаю, когда точка А принадлежит второму, более жесткому, слою. Кривые

$E_1/E_2$	0,01	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8
$l_1$	8,084	2,617	1,897	1,405	1,285	1,197	1,078
$l_2$	0,597	0,644	0,693	0,781	0,822	0,86	0,933
$K_B$	-0,207	-0,593	-0,761	-0,911	-0,947	-0,971	-0,994
$K_A^{[1]}$	0,192	0,775	1,197	1,821	2,071	2,293	2,676
$K_A^{[2]}$	19,17	7,747	5,983	4,551	4,143	3,821	3,346
$K'_B$	9,681	4,261	3,59	3,186	3,107	3,057	3,011
$K'_A^{[1]}$	-0,004	-0,108	-0,254	-0,521	-0,631	-0,728	-0,884
$K'_A^{[2]}$	-0,409	-1,078	-1,268	-1,301	-1,263	-1,214	-1,104

Таблица 1: Значения коэффициентов концентрации напряжений.

$K'_B$ ,  $K'_A^{[1]}$  и  $K'_A^{[2]}$  построены для случая растяжения этой же пластинки поперек слоев. При  $\eta = E_1/E_2 \approx 0.3$  в случае растяжения вдоль слоев в точке А контура слой растянуты, причем в более жестком втором слое растягивающие напряжения примерно в 5 раз превышают напряжения вдали от отверстия. Если же пластинка растягивается поперек слоев, то в точке А будут действовать сжимающие напряжения, и в более жестком слое они примерно в 1,3 раза превышают приложенную на бесконечности нагрузку.

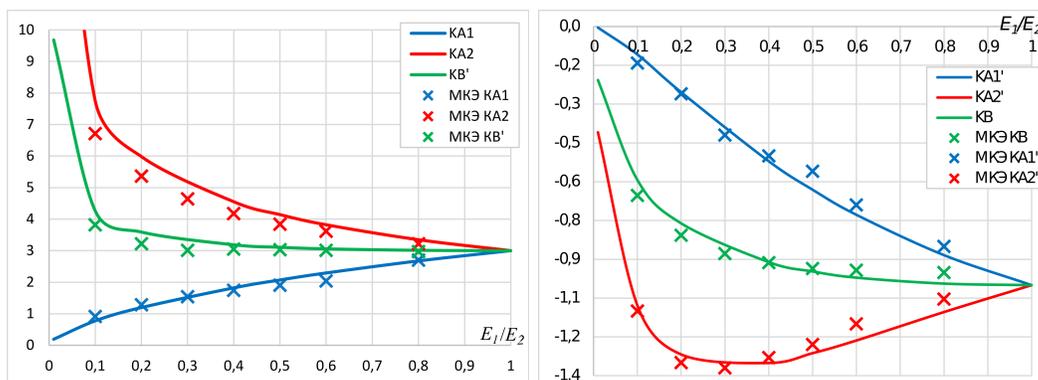


Рис. 2: Зависимость коэффициентов концентрации в характерных точках от отношения модулей упругости  $0 < E_1/E_2 \leq 1$ . Сплошные линии построены по полученным приближенным аналитическим формулам. Крестиком представлены результаты численного решения методом конечных элементов.

## 7. Численное решение задачи

Для сравнения с приближенными аналитическими результатами было проведено конечно-элементное моделирование задачи в пакете Simcenter Femap with Nastran: создана геометрическая модель пластины с круговым отверстием, проведено разбиение пластины на слои, соответствующие разным материалам (см. Рис. (3)), построена сетка пластинчатых элементов, поставлены требуемые граничные условия.

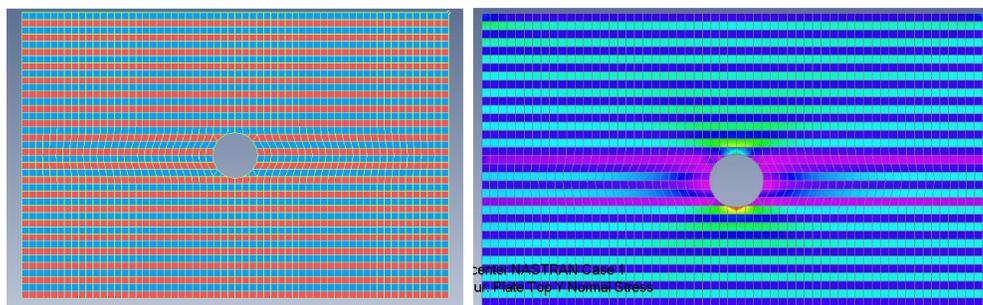


Рис. 3: Конечно-элементная модель решаемой задачи и один из результатов расчета: поле напряжений  $\sigma_{11}$  для случая растяжения вдоль слоев.

По результатам расчета анализировались поля напряжений и вычислялись коэффициенты концентрации в характерных точках. Они представлены на рисунке 2 и хорошо согласуются с кривыми, которые построены по полученным в работе приближенным аналитическим формулам.

Отметим ещё раз, что формула (24) для напряжений в слоистой плоскости с эллипсоидальным отверстием является приближенной. Правая часть этой формулы представляет из себя первый член разложения точных напряжений по степеням малого параметра  $\alpha = l/\Delta \ll 1$ , где  $l$  — размер ячейки периодичности слоистой плоскости, а  $\Delta$  — характерный размер эллипса.

## 8. Заключение

Рассмотрена задача о концентрации напряжений в упругой слоистой плоскости с эллиптическим вырезом. Изучались два уровня концентрации: из-за слоистости и из-за выреза. Тензор концентрации напряжений в слоистой плоскости с вырезом получен как произведение тензоров концентрации на первом и втором уровнях. В случае совпадения ориентации слоев и главных осей эллиптического отверстия вычислены коэффициенты концентрации в характерных точках, приведены графики зависимости этих коэффициентов от отношения модулей упругости слоев. Кроме того, проведено численное решение задачи с помощью пакета конечно-элементного анализа. Полученные аналитические и численные результаты согласуются с хорошей точностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев В. И. Соппротивление материалов // М.: Наука, 1979. 560 с.
2. Kirsch E. G. Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre // Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure. – 1898. – Т. 42. – С. 797-807.
3. Лехницкий С. Г. Концентрация напряжений вблизи эллиптического и кругового отверстия в растягиваемой анизотропной пластинке // Вестн. инж. и техн. № 5. 1936.
4. Работнов Ю. Н. Введение в механику разрушения // М.: Наука, 1987.
5. Нейбер Г. Концентрация напряжений // М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости // М.: Наука, 1966. 708 с.

7. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий // Киев, Наукова думка, 1968. 888 с.
8. Савин Г.Н., Тульчий В.И. Справочник по концентрации напряжений // Киев, Вища школа, 1976, 412 с.
9. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями и полостями // Киев - Донецк, Вища школа, 1976, 200 с.
10. Кишкин Б.П. Конструкционная прочность материалов // М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976, 184 с.
11. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах // М.: Наука, 1993, 224 с.
12. Мавлютов Р.Р. Концентрация напряжений в элементах конструкций // М.: Наука, 1996, 240 с.
13. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. - М.: Изд-во МГУ, 1976.
14. Горбачев В.И., Победря Б.Е. Об упругом равновесии неоднородных полос // Известия АН СССР, МТТ, № 5, 1979.
15. Горбачев В.И. Операторы концентрации напряжений и деформаций в упругих телах // В сб. Расчеты на прочность. -М.: Машиностроение, № 30, 1989.
16. Горбачев В. И., Гаделев Р. Р. Концентрация напряжений в упругих телах с множественными концентраторами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2014. — № 6. — С. 45–50
17. Горбачев В.И. Вариант метода осреднения для решения краевых задач неоднородной упругости: дис. доктора физико-математических наук : 01.02.04 / МГУ им. М. В. Ломоносова. - Москва, 1991.

## REFERENCES

1. Feodos'ev V. I. Soprotivlenie materialov // М.: Nauka, 1979. 560 p.
2. Kirsch E. G. Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre // Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure. – 1898. – Т. 42. – 797-807 pp.
3. Lekhnickij S. G. Koncentraciya napryazhenij vblizi ellipticheskogo i krugovogo otverstiya v rastyagivaemoj anizotropnoj plastinke // Vestn. inzh. i tekhn. № 5. 1936.
4. Rabotnov YU. N. Vvedenie v mekhaniku razrusheniya // М.: Nauka, 1987.
5. Nejber G. Koncentraciya napryazhenij // М.-Л.: OGIZ, 1947.
6. Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti // М.: Nauka, 1966. 708 p.
7. Savin G.N. Raspredelenie napryazhenij okolo otverstij // Kiev, Naukova dumka, 1968. 888 p.
8. Savin G.N., Tul'chij V.I. Spravochnik po koncentracii napryazhenij // Kiev, Vishcha shkola, 1976, 412 p.

9. Kosmodamianskij A.S. Napryazhennoe sostoyanie anizotropnyh sred s otverstiyami i polostyami // Kiev - Doneck, Vishcha shkola, 1976, 200 P.
10. Kishkin B.P. Konstrukcionnaya prochnost' materialov // M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 1976, 184 p.
11. Aleksandrov V.M., Smetanin B.I., Sobol' B.V. Tonkie koncentratory napryazhenij v uprugih telah // M.: Nauka, 1993, 224 p.
12. Mavlyutov R.R. Koncentraciya napryazhenij v elementah konstrukcij // M.: Nauka, 1996, 240 p.
13. Lomakin V.A. Teoriya uprugosti neodnorodnyh tel. - M.: Izd-vo MGU, 1976.
14. Gorbachev V.I., Pobedrya B.E. Ob uprugom ravnovesii neodnorodnyh polos // Izvestiya AN SSSR, MTT, № 5, 1979.
15. Gorbachev V.I. Operatory koncentracii napryazhenij i deformatsij v uprugih telah // V sb. Raschety na prochnost'. -M.: Mashinostroenie, № 30, 1989.
16. Gorbachev V. I., Gadelev R. R. Koncentraciya napryazhenij v uprugih telah s mnozhestvennyimi koncentratorami // Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. — 2014. — № 6. — 45--50 pp.
17. Gorbachev V.I. Variant metoda osredneniya dlya resheniya kraevykh zadach neodnorodnoj uprugosti: dis. doktora fiziko-matematicheskikh nauk : 01.02.04 / MGU im. M. V. Lomonosova. - Moskva, 1991.

Получено: 31.08.2022

Принято в печать: 24.04.2023