

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 511.352

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-237-242

**О множестве исключений в произведении множеств натуральных чисел с асимптотической плотностью 1**

Ю. Н. Штейников

**Штейников Юрий Николаевич** — Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» (г. Москва).

*e-mail: yuriisht@gmail.com*

**Аннотация**

В статье изучается следующая задача. Пусть имеется два подмножества множества натуральных чисел, которые мы обозначим как  $A$  и  $B$ . Пусть дополнительно известно также, что асимптотическая плотность этих множеств  $A, B$  равна 1. Мы определяем множество натуральных чисел, которые являются представимыми в виде произведения этих множеств  $AB$ , то есть такие элементы  $ab$ , где  $a \in A, b \in B$ . Мы изучаем свойства этого подмножества произведений во множестве всех натуральных чисел. Авторы S. Bettin, D. Koukoulopoulos и C. Sanna в статье [1] доказали помимо всего прочего, что плотность множества  $AB$  также равна 1. Более того была выведена количественная версия этого утверждения, а именно получена оценка на множество  $\mathbb{N} \setminus AB$ , которое мы обозначим через  $\overline{AB}$ . А именно, этими авторами в случае когда известны количественные верхние оценки на  $\overline{A} \cap [1, x] = \alpha(x)x, \overline{B} \cap [1, x] = \beta(x)x, \alpha(x), \beta(x) = O(1/(\log x)^a), x \rightarrow \infty$  выведена и верхняя оценка на множество  $\overline{AB} \cap [1, x]$ . В данной работе мы изучаем случай когда  $\alpha, \beta$  стремятся к нулю медленнее чем в вышеуказанном случае и несколько уточняем верхнюю оценку на множество  $\overline{AB} \cap [1, x]$ . В настоящей статье мы рассматриваем случай  $\alpha(x), \beta(x) = O\left(\frac{1}{(\log \log x)^a}\right)$  при некотором фиксированном  $a > 1$ . Мы заимствуем подходы, аргументы и схему доказательства из упомянутой работы трех авторов S. Bettin, D. Koukoulopoulos и C. Sanna[1].

*Ключевые слова:* натуральные числа, плотность, гладкие числа, произведение.

*Библиография:* 11 названий.

**Для цитирования:**

Ю. Н. Штейников. О множестве исключений в произведении множеств натуральных чисел с асимптотической плотностью 1 // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 237–242.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 511.352

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-237-242

# On the set of exceptions in the product of sets of natural numbers with asymptotic density 1

Yu. N. Shteinikov

**Shteinikov Yuri Nikolaevich** — Federal Research Center “Research Institute of System Research of the Russian Academy of Sciences” (Moscow).

*e-mail: yuriisht@gmail.com*

## Abstract

The article examines the following problem. Let there be two subsets of the set of natural numbers, which we denote as  $A$  and  $B$ . Let it also be additionally known that the asymptotic density of these sets  $A, B$  is 1. We define the set of natural numbers that are representable as the product of these sets  $AB$ , that is, such elements  $ab$ , where  $a \in A, b \in B$ . We study the properties of this subset of products in the set of all natural numbers. The authors S. Bettin, D. Koukoulopoulos and C. Sanna in the article [1] proved, among other things, that the density of the set  $AB$  is also equal to 1. Moreover, a quantitative version of this statement was derived, namely, an estimate was obtained for the set  $\mathbb{N} \setminus AB$ , which we will denote by  $\overline{AB}$ . Namely, by these authors, in the case when quantitative upper bounds are known for  $\overline{A} \cap [1, x] = \alpha(x)x, \overline{B} \cap [1, x] = \beta(x)x, \alpha(x), \beta(x) = O(1/(\log x)^a), x \rightarrow \infty$  the upper bound on the set  $\overline{AB} \cap [1, x]$  is also derived. In this paper, we study the case when  $\alpha, \beta$  tend to zero slower than in the above case and somewhat refine the upper bound on the set  $\overline{AB} \cap [1, x]$ . In this paper we consider the case of  $\alpha(x), \beta(x) = O\left(\frac{1}{(\log \log x)^a}\right)$  for some fixed  $a > 1$ . We borrow approaches, arguments and proof scheme from the mentioned work of three authors S. Bettin, D. Koukoulopoulos and C. Sanna[1].

*Keywords:* integer numbers, density, smooth numbers, product.

*Bibliography:* 11 titles.

## For citation:

Yu. N. Shteinikov 2023, “On the set of exceptions in the product of sets of natural numbers with asymptotic density 1”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 237–242.

## 1. Введение

Пусть множества  $A, B$  являются какими-то подмножествами натуральных чисел. Множество  $AB$  называется произведением множеств  $A$  и  $B$ , и определяется как

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

Исследование и изучения размера произведения двух множеств имеет давнюю историю. Известная проблема о таблице умножения, давно поставленная П. Эрдешем [3], [4] задает вопрос о размере множества  $M_n$  являющегося множеством  $n \times n$ , то есть множество  $\{1, \dots, n\}^2$ . П. Эрдеш установил что  $M_n = o(n^2)$ . К.Форд [6] установил точный порядок роста величины  $M_n$ , см. также работы Тененбаума[5] и Д. Коукоулопуоса [7].

Изучение же величины  $(A \cap [1, x])^2$  для произвольных множеств было проведено Х. Силлеруело, С. Рамана и О. Рамаре [2]. В статье начаты изучения данного вопроса для таких множеств как сдвинутые простые числа, суммы двух квадратов и случайные множества.

Рассмотрим теперь случай бесконечных множеств. Стандартным образом определим понятие плотности множества

$$d(A) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [1, x]|}{x},$$

и через  $\bar{A}$  обозначим дополнение множества  $A$ .

Хегувари, Хеннекарт и Пач рассмотрели аналогичную задачу, но для бесконечных множеств натуральных чисел и поставили такие вопросы.

Вопрос 1. Верно ли что если  $d(A) = 1$ , то  $d(A^2) = 1$  ?

Вопрос 2. Верно ли что  $\inf_{A \subset \mathbb{N}: d(A)=\alpha} d(A^2) = 0$  для любого  $\alpha \in [0, 1)$  или хотя бы для  $\alpha \in [0, \alpha_0)$  для некоторого  $\alpha_0 \in (0, 1)$  ?

В статье [1] были даны ответы на эти вопросы и соответственно доказана такая теорема.

ЛЕММА 1. Имеем

$$\begin{cases} \inf_{A \subset \mathbb{N}: d(A)=1} d(A^2) = 1 \\ \alpha \in [0, 1) \inf_{A \subset \mathbb{N}: d(A)=\alpha} d(A^2) = 0; \end{cases} \quad (1)$$

Следуя аргументам, предложенным в этой статье [1], эти авторы получили количественную версию этого утверждения. А именно, если

$$|\{n \leq x : n \in \bar{A}\}|, |\{n \leq x : n \in \bar{B}\}| \ll x(\log x)^{-a}$$

для некоторого фиксированного  $0 < a < 1$ , то

$$|\{n \leq x : n \in \overline{AB}\}| \ll x(\log x)^{-\frac{a^2}{1+a} + o(1)}.$$

Мы же рассматриваем случай

$$|\{n \leq x : n \in \bar{A}\}|, |\{n \leq x : n \in \bar{B}\}| \ll x(\log \log x)^{-a}. \quad (2)$$

Основываясь на аргументах и технике предложенной в статье [1] мы даем аналогичные оценки в вышеописанном случае. Главный результат данной статьи это вывести такую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть  $a > 1$  - некоторое фиксированное число. Если

$$|\{n \leq x : n \in \bar{A}\}|, |\{n \leq x : n \in \bar{B}\}| \ll x(\log_2 x)^{-a}. \quad (3)$$

то

$$|\{n \leq x : n \in \overline{AB}\}| \ll \frac{x \log_4 x}{\log_5 x (\log_3 x)^a}.$$

Здесь всюду через  $\log_k$  обозначает  $k$ -ый повторный логарифм числа  $x$ .

## 2. Предварительные результаты

Нам понадобится ряд вспомогательных определений и некоторых результатов. Здесь мы тоже следуем понятиям, предложенным в статье [1]. Для целого  $n$ , пусть  $P^-(n)$  и  $P^+(n)$  обозначают наименьший и наибольший простой множитель числа  $n$  с допущением  $P^-(1) = \infty, P^+(1) = 1$ . Если  $P^+(n) \leq y$  мы называем число  $n$   $y$ -гладким. Введем по определению

$$\psi(x, y) = \{n \leq x, P^+(n) \leq y\}, \phi(x, y) = \{n \leq x, P^-(n) \geq y\}. \quad (4)$$

Известны следующие результаты.

ЛЕММА 2. Для  $1 < y \leq x$  справедливо  $|\phi(x, y)| \ll x/\log y$ .

ЛЕММА 3. Пусть  $2 \leq y \leq x, v = \frac{\log x}{\log y}$  и  $\epsilon > 0$  – произвольное фиксированное и  $v \leq y^{1-\epsilon}$ . Тогда справедлива формула

$$|\psi(x, y)| = xv^{-(1+o(1))v}, v \rightarrow \infty.$$

Каждое натуральное число  $n$  представим в виде  $n = n_1 n_2$ , где  $P^+(n_1) \leq y, P^-(n_2) \geq y$ . Пусть  $N(x, y, z)$  обозначает множество  $n \leq x$  таких, что  $n_1 > z$ .

В статье [1] была выведена верхняя оценка для множества чисел (для широкой области определения параметров), у которых гладкая часть большая. Ниже мы докажем чуть более точную оценку.

Эта лемма является продолжением соответствующего результата в [8], см. также [9].

ЛЕММА 4. Пусть  $y \leq z \leq x$ , параметр  $u$  определяется равенством  $u = \frac{\log z}{\log y}$ . Пусть также  $\epsilon > 0$  произвольное фиксированное и имеет место  $\frac{\log x}{\log y} \leq y^{1-\epsilon}$ . Тогда справедлива оценка

$$|N(x, y, z)| \leq x \exp\{-(1+o(1))u \log u\}, u \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Доказательство ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Имеем, что  $|N(x, y, z)| = \sum_{z \leq n_1 \leq x, P^+(n_1) \leq y} |\phi(\frac{x}{n_1}, y)|$ . Последнюю же сумму разобьем на 2 части.

$$\sum_{z \leq n_1 \leq \frac{x}{y}} |\phi(\frac{x}{n_1}, y)| + \sum_{\frac{x}{y} \leq n_1 \leq x} 1.$$

Последнее слагаемое оцениваем сверху как множество всех  $y$ -гладких чисел, не превосходящих  $x$ , то есть величиной  $|\psi(x, y)| \leq x \exp\{(1+o(1))u \log u\}$ .

Разберемся с 1-ой суммой.

$$\sum_{z \leq n_1 \leq \frac{x}{y}} |\phi(\frac{x}{n_1}, y)| \leq \frac{x}{\log y} \sum_{z \leq n_1 \leq \frac{x}{y}} \frac{1}{n_1}.$$

Разберемся с последней суммой, применив преобразование Абеля.

$$\sum_{z \leq n_1 \leq \frac{x}{y}} \frac{1}{n_1} \ll \frac{|\psi(x/y, y)| - |\psi(z, y)|}{x/y} + \int_z^{x/y} \frac{|\psi(t, y)| - |\psi(z, y)|}{t^2} dt$$

Делаем замену переменной в интеграле  $t \rightarrow h : t = y^h$ . Интеграл преобразуется к виду

$$\log y \int_u^{\frac{\log x}{\log y}} \frac{|\psi(y^h, y)| - |\psi(y^u, y)|}{y^h} dh$$

Подставляя оценки из Леммы 3 мы получаем нужное нам утверждение. Лемма доказана.  $\square$

### 3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1 идет по той же схеме доказательства из статьи [1]. Введем параметр  $u = u(x) > 1, y = y(x) < x, z = y^u$ . Как и раньше представим  $n = n_1 n_2$ , где  $n_1$  -  $y$ -гладкая часть числа  $n$ ,  $n_2$  - оставшаяся. Рассмотрим множество  $N = \{n \leq x : n_1 \leq y^u\}$ . По Лемме 4 имеем, что

$$|[1, x] \setminus N| \leq x \exp\{-(1+o(1))u \log u\}, u \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Пусть теперь  $n \in N$ .  $n = n_1 n_2$ . Если  $n \in \overline{AB}$ , то либо  $n_1 \in \overline{A}$  либо  $n_2 \in \overline{B}$ . Значит множество количество элементов из  $N \cap \overline{AB}$  не превосходит  $S_1 + S_2$ , где

$$S_1 = |\{n \in N : n_1 \in \overline{A}\}|, S_2 = |\{n \in N : n_2 \in \overline{B}\}|.$$

Оценим сначала  $S_1$ .

$$S_1 \leq \sum_{m \leq z, m \in \overline{A}} |\phi(x/m, y)| \ll \frac{x}{\log y} \sum_{m \leq z, m \in \overline{A}} 1/m \ll \frac{ux}{(\log \log y)^a}.$$

Оценим теперь  $S_2$ . Сперва обозначим  $\overline{B}(t) = |\overline{B} \cap [1, t]|$ .

$$S_2 \leq \sum_{d: d \leq z, P^+(d) \leq y} \overline{B}(x/d) \leq \frac{x}{(\log \log x)^a} \log y.$$

Соберем все оценки воедино и выберем оптимальные параметры. Положим,

$$u = [10a \log_4 x / \log_5 x], \log Y = \frac{u^2 (\log_2 x)^a}{(\log_3 x)^a}.$$

Подставляя эти параметры получаем утверждение нашей теоремы.

## 4. Заключение

Отметим, что некоторые результаты о произведениях и частных подмножеств натуральных чисел содержатся в работах [1] – [9] и в приведенной ниже литературе. Работа выполнена в рамках государственного задания FNEF-2022-0011.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bettin, S., Koukoulopoulos, D., Sanna, C. A note on the natural density of product sets // Bull. Lond. Math. Soc. 2021. Vol. 53, №. 5, P. 1407-1413.
2. Cilleruelo, D. S. Ramana, and O. Ramare, Quotient and product sets of thin subsets of the positive integers, Proc. Steklov Inst. Math. 296 (2017), no. 1, P. 52–64.
3. Erdos, P. Some remarks on number theory // Riveon Lematematika. 1955. Vol. 9, P. 45-48.
4. Erdos, P. An asymptotic inequality in the theory of numbers // Vestnik Leningrad. Univ. 1960. Vol. 15, №. 13, P. 41–49.
5. Tenenbaum, G. Un probleme de probabilite conditionnelle en arithmetique // Acta Arith. 1987. Vol. 49, №. 2, P. 165–187.
6. Ford, K. The distribution of integers with a divisor in a given interval // Ann. of Math.(2) 2008. Vol. 168, №. 2, P. 367–433.
7. Koukoulopoulos, D. On the number of integers in a generalized multiplication table // J. Reine Angew. Math. Vol. 689, (2014), P. 33–99.
8. Banks, William D., Shparlinski I. Integers with a large smooth divisor // Electronic journal of combinatorial number theory. 2007. 7. №1, Paper A17, 11 p.
9. Ю. Н. Штейников. “О распределении элементов полугрупп натуральных чисел // Чебышевский сборник, 2012, 13:3 , С. 91–99.

**REFERENCES**

1. Bettin S., Koukoulopoulos D., Sanna C. “A note on the natural density of product sets” *Bull. Lond. Math. Soc.* vol. 53, no. 5, pp. 1407-1413.
2. Cilleruelo, D. S. Ramana, and O. Ramare, “Quotient and product sets of thin subsets of the positive integers” *Proc. Steklov Inst. Math.* vol. 296 , no. 1, pp. 52–64.
3. Erdos, P. “Some remarks on number theory” // *Riveon Lematematika*. 1955. vol. 9, pp. 45-48.
4. Erdos, P. “An asymptotic inequality in the theory of numbers” *Vestnik Leningrad. Univ.* 1960. Vol. 15, №. 13, pp. 41–49.
5. Tenenbaum, G. “Un probleme de probabilité conditionnelle en arithmétique” *Acta Arith.* 1987. Vol. 49, №. 2, pp. 165–187.
6. Ford, K. “The distribution of integers with a divisor in a given interval” *Ann. of Math.(2)* 2008. Vol. 168, №. 2, pp. 367–433.
7. Koukoulopoulos, D. “On the number of integers in a generalized multiplication table” *J. Reine Angew. Math. Vol.* vol. 689, pp. 33–99.
8. Banks, William D., Shparlinski I. “Integers with a large smooth divisor” *Electronic journal of combinatorial number theory* vol. 7, no. 1, Paper A17, 11 p.
9. Shteinikov Y,N. “On the distribution of elements semigroups of natural numbers” *Chebyshevskii Sb.* vol 13, no. 3 , pp. 91–99.

Получено: 17.10.22

Принято в печать: 24.04.2023