ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 1.

УДК 517.56 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-228-236

О преобразованиях Бушмана — Эрдейи и Мелера — Фока, связанных с группой $SO_0(3,1)$

И. А. Шилин

Шилин Илья Анатольевич — Национальный исследовательский университет «МЭИ»; Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: ilyashilin@li.ru

Аннотация

С помощью функционала, определенного на паре согласованных пространств представления связной подгруппы собственной группы Лоренца, вычислены формула преобразований Бушмана — Эрдейи функции, кратной функции Лежандра, и формула преобразования Мелера-Фока функции Лежандра обратного аргумента. Также выведено обобщение одной известной формулы для преобразования Мелера–Фока.

Ключевые слова: преобразование Бушмана — Эрдейи, преобразование Мелера–Фока, функция Лежандра.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
И. А. Шилин. О преобразованиях Бушмана — Эрдейи и Мелера — Фока, связанных с группой $SO_0(3,1)$ // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 228–236.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 1.

UDC 517.56 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-228-236

On Buschman–Erdelyi and Mehler–Fock transforms related to the group $SO_0(3,1)$

I. A. Shilin

Shilin Ilya Anatol'evich — National Research University "MPEI"; Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: ilyashilin@li.ru

Abstract

By using a functional defined on a pair of the assorted represention spaces of the connected subgroup of the proper Lorentz group, a formula for the Buschman–Erdelyi transform of the Legendre function (up to a factor) is derived. Also a formula for the Mehler–Fock transform of the Legendre function of an inverse argument is obtained. Moreover, a generalization of one known formula for the Mehler–Fock transform is derived.

Keywords: Buschman–Erdelyi transform, Mehler–Fock transform, Legendre function.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
I. A. Shilin, 2023, "On Buschman — Erdelyi and Mehler — Fock transforms, related to the group $SO_0(3,1)$" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 228–236.

1. Введение

В работе [13] с помощью функционала $\mathcal{B}$, определенного на паре пространств представления связной подгруппы собственной группы Лоренца, мы получили новые интегральные соотношения между функцией Макдональда и мультииндексным аналогом (гиперфункцией) бесселевой модифицированной функции первого рода $I_\mu(x)$. Полученные результаты можно понимать как значения введенных нами гиперпреобразований Ганкеля–Клиффорда (то есть преобразований, ядром которого является гиперфункция). В настоящем дополнении к работе [13] показано, как с частными значениями функционала $\mathcal{B}$ связаны преобразования Бушмана — Эрдейи и Мелера–Фока. В работе используются функции

$$f_{I_1}(x) = x_1^{\sigma-|q_1|}(x_3+\mathbf{i}\,x_2\operatorname{sign}q_1)^{|q_1|}\,C^{|q_1|+\frac{1}{2}}_{p_1-|q_1|}\left(\frac{x_4}{x_1}\right)$$

и

$$f_{(I_2,\pm)}(x) = (x_4)_{\pm}^{\sigma-|q_2|}\,(x_2^2+x_3^2)^{-|q_2|/2}\,(x_3+\mathbf{i}x_2)^{|q_2|}\,P^{-|q_2|}_{-1/2+\mathbf{i}p_2}\left(\frac{x_1}{x_4}\right),$$

из которых состоят базисы $B_1=\{f_{I_1}\mid I_1=(p_1,q_1),q_2\in\mathbb{Z},p_1>|q_1|\}$ и $B_2=\{f_{(I_2,\pm)}\mid I_2= =(p_2,q_2)\in\mathbb{R}^2\}$ пространства представления, заданного в [13].

2. Значение функционала $\mathcal{B}\big(\sigma,I_1,(I_2,+),\mathrm{id}\big)$

Теорема 1. *При* $\Re(\sigma)<-\frac{1}{2}$

$$\mathcal{B}\big(\sigma,I_1,(I_2,+),\mathrm{id}\big)=\frac{2^{p_1-|q_1|-\sigma-1}\sqrt{\pi}\,\delta_{q_1,-q_2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+p_1\right)}{\Gamma(p_1-\sigma)\,\Gamma(1+p_1-|q_1|)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+|q_1|\right)}\times$$
$$\times\,\Gamma\left(\frac{p_1-|q_1|-\sigma+\mathbf{i}p_2}{2}-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{p_1-|q_1|-\sigma-\mathbf{i}p_2}{2}-\frac{1}{4}\right)\times$$
$$\times\ {}_4F_3\left[\left.\begin{matrix}\frac{|q_1|-p_1}{2},\ \frac{1+|q_1|-p_1}{2},\ \frac{1+\sigma-p_1}{2},\ 1-\frac{\sigma+p_1}{2}\\ \frac{1}{2}-p_1,\ \frac{5}{4}+\frac{\sigma+|q_1|-p_1+\mathbf{i}p_2}{2},\ \frac{5}{4}+\frac{\sigma+|q_1|-p_1-\mathbf{i}p_2}{2}\end{matrix}\ \right|\ 4\right].$$

Доказательство. В самом деле,

$$\mathcal{B}\big(\sigma,I_1,(I_2,+),\mathrm{id}\big)=\mathsf{F}_2(f_{I_1},f^*_{(I_2,+)})=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathbf{i}(q_1+q_2)\beta}\,\mathrm{d}\beta\times$$
$$\times\int\limits_0^{+\infty}P^{-|q_2|}_{-1/2+\mathbf{i}p_2}(\cosh\alpha)\,C^{|q_1|+1/2}_{p_1-|q_1|}(\operatorname{sech}\alpha)\,\cosh^{\sigma-|q_1|}\alpha\,\sinh^{|q_1|+1}\alpha\,\mathrm{d}\alpha=$$
$$=2\pi\,\delta_{q_1,-q_2}\int\limits_1^{+\infty}t^{\sigma-|q_1|}(t^2-1)^{|q_1|/2}\,P^{-|q_1|}_{-1/2+\mathbf{i}p_2}(t)\,C^{|q_1|+1/2}_{p_1-|q_1|}(t^{-1})\,\mathrm{d}t.\quad(1)$$

Записывая $C^{|q_1|+1/2}_{p_1-|q_1|}(\operatorname{sech}\alpha)$ явно в виде многочлена по формуле [2, формула 123]

$$C_n^\nu(x)=[\Gamma(x)]^{-1}\sum_{j=0}^{E(n/2)}\frac{(-1)^j\,\Gamma(n+\nu-j)}{j!\,(n-2j)!}\,(2x)^{n-2j},$$

имеем

$$\mathcal{B}\big(\sigma, I_1, (I_2, +), \mathrm{id}\big) = 2\pi\, \delta_{q_1,-q_2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2} + |q_1|\right)\right]^{-1} \times$$
$$\times \sum_{j=0}^{E\left((p_1-|q_1|)/2\right)} \frac{(-1)^j\, \Gamma\left(\frac{1}{2} + p_1 - j\right)}{j!\,(p_1 - |q_1| - 2j)!} \int_1^{+\infty} t^{\sigma+2j-p_1}\, (t^2-1)^{|q_1|/2}\, P^{-|q_1|}_{-1/2+\mathbf{i}p_2}(t)\, \mathrm{d}t.$$

Получившийся интеграл можно вычислить по формуле [3, 2.17.2.9]

$$\int_a^{+\infty} t^{\theta-1}\, (t^2-a^2)^{-\mu/2}\, P^\mu_\nu\left(\frac{t}{a}\right) \mathrm{d}t = \frac{2^{\mu-\theta-1}\, a^{\theta-\mu}\, \Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu-\theta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu-\theta}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\theta)},$$

в которой $a > 0$, $\Re(\mu) < 1$, $\Re(\theta) < 1 + \Re(\mu+\nu)$ и $\Re(\theta) < \Re(\mu-\nu)$. Тогда

$$\mathcal{B}\big(\sigma, I_1, (I_2, +), \mathrm{id}\big) = \frac{2^{p_1-|q_1|-\sigma-1}\sqrt{\pi}\,\delta_{q_1,-q_2}}{\Gamma(|q_1|+1/2)} \sum_{j=0}^{E\left((p_1-|q_1|)/2\right)} (-1)^j\, 2^{-2j} \times$$
$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p_1-j\right)\, \Gamma\left(\frac{p_1-|q_1|-\sigma+\mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4} - j\right)\, \Gamma\left(\frac{p_1-|q_1|-\sigma-\mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4} - j\right)}{j!\,(p_1-|q_1|-2j)!\,\Gamma(p_1-2j-\sigma)}. \quad (2)$$

Но ввиду формулы [3, стр. 759] $\Gamma(z-k) = \frac{(-1)^k\,\Gamma(z)}{(1-z)_k}$ имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+p_1-j\right) = \frac{(-1)^j\,\Gamma(1/2+p_1)}{(1/2-p_1)_j},$$
$$\Gamma\left(\frac{p_1-|q_1|-\sigma\pm\mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4} - j\right) = \frac{(-1)^j\,\Gamma\left(\frac{p_1-|q_1|-\sigma\pm\mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{5}{4} + \frac{\sigma+|q_1|-p_1\mp\mathbf{i}p_2}{2}\right)_j},$$

а в силу формулы [3, стр. 759]

$$\Gamma(z-2k) = 2^{-2k}\,\Gamma(z)\,\left[\left(\frac{1-z}{2}\right)_k \left(\frac{2-z}{2}\right)_k\right]$$

получаем, что

$$\Gamma(p_1-2j-\sigma) = \frac{2^{-2j}\,\Gamma(p_1-\sigma)}{\left(\frac{1+\sigma-p_1}{2}\right)_j \left(1-\frac{\sigma+p_1}{2}\right)_j},$$
$$(p_1-|q_1|-2j)! = \Gamma(1+p_1-|q_1|-2j) = \frac{2^{-2j}\,\Gamma(1+p_1-|q_1|)}{\left(\frac{|q_1|-p_1}{2}\right)_j \left(\frac{1+|q_1|-p_1}{2}\right)_j}.$$

Поэтому (2) можно переписать в виде

$$\mathcal{B}\big(\sigma, I_1, (I_2, +), \mathrm{id}\big) = \frac{2^{p_1-|q_1|-\sigma-1}\sqrt{\pi}\,\delta_{q_1,-q_2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+p_1\right)}{\Gamma(p_1-\sigma)\,\Gamma(1+p_1-|q_1|)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+|q_1|\right)} \times$$
$$\times\,\Gamma\left(\frac{p_1-|q_1|-\sigma+\mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{p_1-|q_1|-\sigma-\mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4}\right) \times$$
$$\times \sum_{j=0}^{E\left((p_1-|q_1|)/2\right)} \frac{2^{2j}\,\left(\frac{|q_1|-p_1}{2}\right)_j \left(\frac{1+|q_1|-p_1}{2}\right)_j \left(\frac{1+\sigma-p_1}{2}\right)_j \left(1-\frac{\sigma+p_1}{2}\right)_j}{j!\,\left(\frac{1}{2}-p_1\right)_j \left(\frac{5}{4}+\frac{\sigma+|q_1|-p_1+\mathbf{i}p_2}{2}\right)_j \left(\frac{5}{4}+\frac{\sigma+|q_1|-p_1-\mathbf{i}p_2}{2}\right)_j}. \quad (3)$$

Замечая, что для $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2$, такого, что $\varepsilon \equiv p_1 - |q_1| \mathrm{mod} 2$,

$$\left(\frac{\varepsilon + |q_1| - p_1}{2}\right)_j = 0 \quad \text{при} \quad j \geqslant p_1 - |q_1|,$$

мы видим, что сумма в формуле (3) является $E\big((p_1 - |q_1|)/2\big)$-ой частичной суммой обобщенного гипергеометрического ${}_4F_3$-ряда, все члены которого, начиная с номера $p_1 - |q_1|$, равны нулю. Таким образом, она является суммой этого ряда, то есть в (3) символ $\sum\limits_{j=0}^{E\left((p_1-|q_1|)/2\right)}$ можно заменить символом $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}$ и воспользоваться определением

$${}_nF_m\left[\begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} \middle|\, z\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j \dots (a_n)_j}{(b_1)_j \dots (b_m)_j} \frac{z^j}{j!}$$

обобщенного гипергеометрического ряда, сумма которого является значением ${}_nF_m$-функции на области сходимости этого ряда. □

3. Об одной из формул для преобразования Бушмана — Эрдейи

Выведем следствие из теоремы 1.

Теорема 2. *При* $\Re(\sigma) < -\frac{1}{2}$

$$\int\limits_1^{+\infty} t^{\sigma} P^{-|q_1|}_{-1/2+\mathbf{i}p_2}(t)\, P^{|q_1|}_{p_1}(t^{-1})\, \mathrm{d}t = \frac{(-1)^{|q_1|}\, 2^{p_1-\sigma-2}\, \Gamma(p_1 + 1/2)}{\pi\, \Gamma(p_1 - \sigma)\, \Gamma(1 + p_1 - |q_1|)} \times$$
$$\times\, \Gamma\left(\frac{p_1 - |q_1| - \sigma + \mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{p_1 - |q_1| - \sigma - \mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4}\right) \times$$
$$\times\, {}_4F_3\left[\begin{array}{c} \frac{|q_1|-p_1}{2},\ \frac{1+|q_1|-p_1}{2},\ \frac{1+\sigma-p_1}{2},\ 1 - \frac{\sigma+p_1}{2} \\ \frac{1}{2} - p_1,\ \frac{5}{4} + \frac{\sigma+|q_1|-p_1+\mathbf{i}p_2}{2},\ \frac{5}{4} + \frac{\sigma+|q_1|-p_1-\mathbf{i}p_2}{2} \end{array} \middle|\, 4\right].$$

Доказательство. Выразим многочлен Гегенбауэра в последнем интеграле формулы (1) через функцию Лежандра по формуле [1, 8.936.2]:

$$C^{|q_1|+1/2}_{p_1-|q_1|}(t^{-1}) = \frac{(-1)^{|q_1|}\, (2t)^{|q_1|}\, |q_1|!}{(2|q_1|)!\, (t^2 - 1)^{|q_1|/2}}\, P^{|q_1|}_{p_1}(t^{-1}).$$

Учитывая, что $2^{|q_1|}\, |q_1| = (2|q_1|)!!$ и $\frac{(2|q_1|)!!}{(2|q_1|)!} = \frac{1}{(2|q_1|-1)!!}$, получаем

$$C^{|q_1|+1/2}_{p_1-|q_1|}(t^{-1}) = \frac{(-1)^{|q_1|}\, t^{|q_1|}}{(2|q_1| - 1)!!\, (t^2 - 1)^{|q_1|/2}}\, P^{|q_1|}_{p_1}(t^{-1}).$$

Но [3, стр. 759] $(2|q_1| - 1)!! = \frac{2^{|q_1|}\, \Gamma(|q_1|+1/2)}{\sqrt{\pi}}$, поэтому

$$C^{|q_1|+1/2}_{p_1-|q_1|}(t^{-1}) = \frac{(-1)^{|q_1|}\, \sqrt{\pi}\, t^{|q_1|}}{2^{|q_1|}\, \Gamma\left(\frac{1}{2} + |q_1|\right)\, (t^2 - 1)^{|q_1|/2}}\, P^{|q_1|}_{p_1}(t^{-1}), \tag{4}$$

а значит, формулу (1) можно переписать в виде

$$\mathcal{D}\big(\sigma, I_1, (I_2,+), \mathrm{id}\big) = \frac{2^{1-|q_1|}\,(-1)^{|q_1|}\,\pi^{3/2}\,\delta_{q_1,-q_2}}{\Gamma(|q_1|+1/2)} \int\limits_1^{+\infty} t^{\sigma}\,P^{-|q_1|}_{-1/2+\mathbf{i}p_2}(t)\,P^{|q_1|}_{p_1}(t^{-1})\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Остается сравнить (5) и теорему 1. □

Интегральные преобразования, ядром которых является функция Лежандра первого рода от «обратного» аргумента, неявно были использованы впервые в статье [9] при изучении уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\nu}{y}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{6}$$

Систематическое изучение таких преобразований было начато в работах Р. Г. Бушмана [8] и А. Эрдейи [10], поэтому эти преобразования получили название преобразований Бушмана — Эрдейи. Они имеют вид

$$\mathbf{B}^{\mu,\nu}_{+,x}(f) = \int\limits_0^{x} P^{\nu}_{\mu}(xt^{-1})\,(x^2-t^2)^{-\nu/2}\,f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\mathbf{B}^{\mu,\nu}_{-,x}(f) = \int\limits_x^{+\infty} P^{\nu}_{\mu}(xt^{-1})\,(t^2-x^2)^{-\nu/2}\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

и помимо уравнения (6) используются и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений: например, С. М. Ситником [5] установлено, что эти операторы сплетают оператор Бесселя $\mathfrak{b}_\theta = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2\theta+1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ и вторую производную: $\mathbf{B}^{\mu,\nu}_{\pm,s}\mathfrak{b}_\theta = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathbf{B}^{\mu,\nu}_{\pm,s}$. В теореме 2 фактически вычислено преобразование $\mathbf{B}^{p_1,|q_1|}_{-,1}$ функции $t^{-\sigma}\,(t^2-1)^{|q_1|/2}\,P^{-|q_1|}_{-1/2+\mathbf{i}p_2}(t)$.

4. Ядро преобразования Бушмана — Эрдейи как значение преобразования Бушмана — Эрдейи

Интегральное преобразование

$$\mathbf{I}_\mu(f) = F(t) = \int\limits_0^{+\infty} f(s)\,P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+\mathbf{i}s}(t)\,\mathrm{d}s$$

($t>1$) и обратное к нему преобразование [12, 15]

$$\mathbf{I}^{-1}_\mu(F) = f(s) = \pi^{-1}\,\sinh(\pi s)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+\mathbf{i}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\mathbf{i}s\right)\int\limits_1^{+\infty} F(t)\,P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+\mathbf{i}s}(t)\,\mathrm{d}t$$

являются обобщениями введенных Ф. Мелером [11] прямого и В. Фоком [6] обратного интегральных преобразований (ядром которых являлась функция $P_{-\frac{1}{2}+\mathbf{i}s}(t)$) и потому называется обобщенным преобразованием Мелера–Фока. Оно является одним из наиболее известных индексных интегральных преобразований [16], к числу которых относятся преобразование Конторовича–Лебедева, Вимпа, Крума, Лебедева, Тичмарша и др.

Представим один из множителей $P^{|q_1|}_{p_1}(t^{-1})$ ядер $(t^2-1)^{-|q_1|/2}_{\pm}\,P^{|q_1|}_{p_1}(t^{-1})$ преобразований Бушмана — Эрдейи $\mathbf{B}^{p_1,|q_1|}_{\pm,x}$ в виде прямого преобразования Мелера–Фока.

Теорема 3. *При* $\Re(\sigma) < -\frac{1}{2}$ *выполняется равенство* $P_{p_1}^{|q_1|}(t^{-1}) = \mathbf{I}_{-|q_1|}(F)$, *где*

$$F(p_2) = (-1)^{|q_1|}\, 2^{p_1-\sigma-2}\, \pi^{-2}\, t^{-\sigma}\, p_2 \sinh(\pi p_2)\, \Gamma\left(\frac{1}{2}+p_1\right) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{p_1-|q_1|-\sigma+\mathbf{i}p_2}{2}-\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{p_1-|q_1|-\sigma-\mathbf{i}p_2}{2}-\frac{1}{4}\right) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{1}{2}+|q_1|+\mathbf{i}p_2\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+|q_1|-\mathbf{i}p_2\right) [\Gamma(p_1-\sigma)\,\Gamma(1+p_1-|q_1|)]^{-1} \times \\ \times\ {}_4F_3\left[\begin{array}{c} \frac{|q_1|-p_1}{2},\ \frac{1+|q_1|-p_1}{2},\ \frac{1+\sigma-p_1}{2},\ 1-\frac{\sigma+p_1}{2} \\ \frac{1}{2}-p_1,\ \frac{5}{4}+\frac{\sigma+|q_1|-p_1+\mathbf{i}p_2}{2},\ \frac{5}{4}+\frac{\sigma+|q_1|-p_1-\mathbf{i}p_2}{2} \end{array}\ \middle|\ 4\right].$$

Доказательство. Домножив обе части теоремы 2 на

$$\pi^{-1}\, p_2 \sinh(\pi p_2)\, \Gamma\left(\frac{1}{2}+|q_1|+\mathbf{i}p_2\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+|q_1|-\mathbf{i}p_2\right),$$

получаем, что

$$\mathbf{I}_{-|q_1|}^{-1}\big(t^{\sigma}\, P_{p_1}^{|q_1|}(t^{-1})\big) = F(p_2).$$

Тогда функцию $t^{\sigma}\, P_{p_1}^{|q_1|}(t^{-1})$ можно представить в виде $\mathbf{I}_{-|q_1|}$-преобразования правой части. $\square$

4.1. Связь с формулой [3, 2.17.27.9]

Рассмотрим теорему 3 в простейшем случае $I_1 = \overline{0}$. Учитывая, что

$$P_0^0(t^{-1}) = 1 \quad \text{и} \quad {}_4F_3(0, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3; 4) = 1,$$

получаем

$$\mathbf{I}_0\left(p_2 \sinh(\pi p_2)\, \Gamma\left(\frac{1}{2}+\mathbf{i}p_2\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\mathbf{i}p_2\right) \times \right. \\ \left. \times\, \Gamma\left(\frac{\mathbf{i}p_2-\sigma}{2}-\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(-\frac{\sigma+\mathbf{i}p_2}{2}-\frac{1}{4}\right)\right) = 2^{\sigma+2}\, \pi^{3/2}\, t^{\sigma}\, \Gamma(-\sigma).$$

Вводя новый параметр $\nu = -\frac{2\sigma+1}{4}$ и записывая преобразование $\mathbf{I}_0$ в явном виде, получаем

$$\int_0^{+\infty} p_2 \sinh(\pi p_2)\, \Gamma\left(\frac{1}{2}+\mathbf{i}p_2\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\mathbf{i}p_2\right) \Gamma\left(\nu+\frac{\mathbf{i}p_2}{2}\right) \Gamma\left(\nu-\frac{\mathbf{i}p_2}{2}\right) P_{-1/2+\mathbf{i}p_2}(t)\, \mathrm{d}p_2,$$

где $\Re(\nu) > 0$. Эта формула, полученная из теоретико-групповых соображений и являющаяся частным случаем теоремы 3, совпадает с частным случаем известной формулы [3, 2.17.27.9]

$$\int_0^{+\infty} s \sinh(\pi s)\, \Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+\mathbf{i}s\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\mathbf{i}s\right) \times \\ \times\, \Gamma\left(\nu+\frac{\mathbf{i}s}{2}\right) \Gamma\left(\nu-\frac{\mathbf{i}s}{2}\right) P_{-1/2+\mathbf{i}s}^{\mu}(c)\, \mathrm{d}s = \\ = 2^{3/2-2\nu}\, \pi^{3/2}\, c^{\mu-2\nu-1/2}\, (c^2-1)^{-\mu/2}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}+2\nu-\mu\right)$$

$\big(\Re(\mu) \leqslant \frac{1}{2}$ и $\Re(\nu) \geqslant 0\big)$, получающимся при $\mu = 0$.

5. Заключение

Функционал $\mathcal{B}$ и его аналог $\mathcal{A}$, заданный [7, 14] для группы $SO_0(2,1)$, позволяет унифицировать вычисление матричных элементов операторов перехода между базисами и операторов представления в «прямом» и «смешанном» базисах. Из связи между матрицами операторов представления в различных базисах получаются континуальные теоремы сложения для $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$, которые при выражении значений этих функционалов через специальные функции приводят к новым формулам для интегральных преобразований, представлений и соотношений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. М.: Наука, 1963.
2. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М.: Из-во иностр. лит-ры, 1963.
3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
5. Ситник С. М. Операторы преобразования Бушмана — Эрдейи, их классификация, основные свойства и приложения // Научные ведомости БелГУ. Серия «Математика. Физика». 2015. Т. 39, № 11. С. 60–76.
6. Фок В. А. О представлении произвольной функции интегралом, включающим функции Лежандра с комплексным индексом // Доклады Академии Наук СССР. 1943. Т. 39, № 7. С. 279–283.
7. Шилин И. А., Чой Дж. Метод континуальных теорем сложения и интегральные соотношения между функциями Кулона и функцией Аппеля F_1 // Ж. вычисл. мат. и матем. физики. 2022. Т. 62, №9. С. 131–140.
8. Buschman R. G. An inversion integral for a Legendre transformation // American Math. Monthly. 1962. V. 69, № 4. P. 288–289.
9. Copson E. T. On a singular boundary value problem for an equation of hyperbolic type // Rational Mech. Analysis. 1957. V. 1. P. 349–356.
10. Erdelyi A. An integral equation involving Legendre functions // J. SIAM. 1964. V. 12, № 1. P. 15–30.
11. Mehler F. G. Ueber eine mit den Kugel- und cylinderfunctionen verwandte function und ihre anwendung in der theorie elektricitatatsvertheilung // Math. Annalen. 1881. V. 18, № 2. P. 161–194.
12. Rosenthal P. On an inversion theorem for the general Mehler-Fock transform pair // Pacific J. Math. 1974. V. 52, № 2. P. 539–545.
13. Shilin I. A., Choi J. On some relations between hyper Bessel–Clifford, Macdonald and Meijer functions and hyper Hankel–Clifford integrsl transforms. Int. Transforms. Spec. Func. 2023. doi.org/10.1080/10652469.2023.2191320.

14. Shilin I. A., Choi J. Maximal subalgebras in $\mathfrak{so}(2,1)$, addition theorems and Bessel–Clifford functions // J. Analysis. 2023. Vol. 31. № 2. pp. 719-732.

15. Sneddon I. N. The Use of Integral Transforms. N. Y.: McGraw-Hill, 1972.

16. Yakubovich S. B. Index transforms. Singapore: World Scientific, 1996.

REFERENCES

1. Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M., 2007, *Tables of integrals, series, and products*, Academic Press, Amsterdam.

2. Kratzer, A. & Franz W., 1960, *Transzendente Functionen*, Academische Verlafsgesellschapt, Leipzig.

3. Pridnikov, A. P., Brychkov, Yu. A.& Marichev, O. I., 1986, *Integrals and Series. Vol. 3: More Special Functions*, Gordon & Breach Science Publishers, Amsterdam.

4. Pridnikov, A. P., Brychkov, Yu. A.& Marichev, O. I., 1986, *Integrals and Series. Vol. 2: Special Functions*, Gordon & Breach Science Publishers, Amsterdam.

5. Sitnik, S. M. 2015, "Operators of Buschman–Erdelyi transforms, their classification, basic properties, and applications", *Sci. Notes Belgorod State Univ., Series "Mathematics. Physics"*, vol. 39, no. 11, pp. 60–76. (In Russian.)

6. Fock, V. A., 1943, "On the representation of an arbitrary function by an integral involving Legendre's function with a complex index", *Docklady Math.*, vol. 39, no. 7, pp. 279–283.

7. Shilin, I. A. & Choi J., 2022, "Method of continual addition theorems and integral relations between the Coulomb functions and the Appell function F_1", *Comp. Math. & Mathem. Phys.*, vol. 62, no. 9, pp. 1486–1495.

8. Buschman, R. G., 1962, "An inversion integral for a Legendre transformation", *American Math. Monthly*, vol. 69, no. 4, pp. 288–289.

9. Copson, E. T., 1957, "On a singular boundary value problem for an equation of hyperbolic type", *Rational Mech. Analysis*, vol. 1, pp. 349–356.

10. Erdelyi, A. 1964, "An integral equation involving Legendre functions", *J. SIAM*, vol. 12, no. 1, pp.. 15–30.

11. Mehler, F. G., 1881, "Ueber eine mit den Kugel- und cylinderfunctionen verwandte function und ihre anwendung in der theorie elektricitatatsvertheilung", *Math. Annalen*, vol 18, no. 2, pp. 161–194.

12. Rosenthal, P., 1974, "On an inversion theorem for the general Mehler-Fock transform pair", *Pacific J. Math.*, vol. 52, no. 2, pp. 539–545.

13. Shilin, I. A. & Choi J., 2023, "On some relations between hyper Bessel–Clifford, Macdonald and Meijer functions and hyper Hankel–Clifford integrsl transforms". Int. Transforms. Spec. Func. doi.org/10.1080/10652469.2023.2191320.

14. Shilin, I. A. & Choi J., 2023, "Maximal subalgebras in $\mathfrak{so}(2,1)$, addition theorems and Bessel–Clifford functions", *J. Analysis*„ Vol. 31. № 2. pp. 719-732.

15. Sneddon, I. N., 1972, *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York.

16. Yakubovich, S. B., 1996, *Index transforms*, World Scientific, Singapore.

Получено: 31.08.2022
Принято в печать: 24.04.2023