ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 1.

УДК 511,513,82 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-219-227

Окрестность Вороного главной совершенной формы от пяти переменных

О. Х. Гуломов

Гуломов Отабек Худайбердиевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Узбекистан, г. Ташкент).
e-mail: otabek10@mail.ru

Аннотация

Вороной получил для совершенных форм три результата. Во-первых, он доказал, что форма, отвечающая плотнейшей упаковке, является совершенной. Во-вторых, он установил, что совершенных форм от данного числа переменных конечное число. И самое главное, в-третьих, Вороной предложил метод нахождения всех совершенных форм. Этот метод опирается на так называемый совершенный полиэдр, весьма сложный многомерный многогранник, введенный Вороным. В принципе, найдя методом Вороного все совершенные формы, можно вычислить плотности для конечного числа соответствующих упаковок и выделить те, которые отвечают максимальному значению. Классической задачи Вороного отыскания совершенных форм, тесно связанной с известной проблемой Эрмита арифметические минимумы положительных квадратичных форм. Они появились и в работах С.Л.Соболева и Х.М. Шадиметова в связи с построением решетчатых оптимальных кубатурных формул. В настоящей работы предлагается усовершенствованные алгоритма Вороного для вычислении окрестности Вороного совершенной формы от много переменных и с помощью этого алгоритма вычислена окрестность Вороного главной совершенной формы от пяти переменных.

Ключевые слова: плотнейшей упаковке, совершенных форм, алгоритм Вороного, многомерный многогранник.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
О. Х. Гуломов. Окрестность Вороного главной совершенной формы от пяти переменных // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 219–227.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 1.

UDC 511,513,82 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-219-227

The neighborhood of the Voronoi main perfect form from five variables

O. Kh. Gulomov

Gulomov Otabek Hudaiberdievich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Uzbekistan, Tashkent).
e-mail: otabek10@mail.ru

Abstract

Voronoi obtained three results for perfect forms. First, he proved that the form corresponding to the closest packing is perfect. Secondly, he established that there are a finite number of perfect forms from a given number of variables. And most importantly, thirdly, Voronoi proposed a method for finding all perfect forms. This method relies on the so-called perfect polyhedron, a highly complex multidimensional polyhedron introduced by Voronoi. In principle, having found all perfect forms by the Voronoi method, one can calculate the densities for a finite number of corresponding packings and single out those that correspond to the maximum value. The classical Voronoi problem of finding perfect forms, closely related to Hermite's well-known problem of arithmetic minima of positive quadratic forms. They also appeared in the works of S.L. Sobolev and Kh.M. Shadimetov in connection with the construction of lattice optimal cubature formulas. In this paper, we propose an improved Voronoi algorithm for calculating the Voronoi neighborhood of a perfect form in many variables, and using this algorithm, the Voronoi neighborhood of the main perfect form in five variables is calculated.

Keywords: densest packing, perfect forms, Voronoi algorithm, multidimensional polyhedron.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
O. Kh. Gulomov, 2023, "The neighborhood of the Voronoi main perfect form from five variables", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 219–227.

1. Введение

Геометрический исследования, относящиеся к теории чисел и алгебре, естественно можно разделить на 1) теорию положительных квадратичных форм, 2) теорию неопределенных квадратичных форм и обобщений алгорифма непрерывных дробей и 3) геометрию теории Галуа.

Параллелоэдром называется выпуклый многогранник P, допускающий разбиение грань-в-грань T(P) аффинного пространства своими транслятами (параллельными копиями). Термин параллелоэдр был введен в 1885 году российским кристаллографом Е. С. Федоровым. Параллелоэдры привлекли внимание таких замечательных математиков конца XIX начала XX века, как Г. Минковский и Г. Ф. Вороной, которые и считаются основоположниками теории параллелоэдров в математике.

В 1908 году Г. Ф. Вороной сформулировал гипотезу о том, что для всякого параллелоэдра можно указать такую евклидову метрику, в которой он будет ячейкой разбиения Вороного (эквивалентные термины: мозаики Вороного, разбиения Дирихле, разбиения Дирихле–Вороного) для некоторой решетки. Для параллелоэдров Вороного (параллелоэдров, являющихся областью Вороного для некоторой решетки) разработана глубокая теория. Фундамент этой теории заложил сам Вороной, разработавший метод непрерывного параметра алгоритм, позволяющий классифицировать все параллелоэдры Вороного данной размерности.

Теория параллелоэдров Вороного и тесно связанная с ней геометрия положительно определенных квадратичных форм изучались в работах Г. Ф. Вороного, Б. Н. Делоне, С. С. Рышкова, Е. П. Барановского, Р. Эрдала, С.Ш. Шушбаева, М. Дютура, А. Шюрманна, Ф. Валлентина и др.

Задача о наименее плотных решетчатых покрытиях состоит отыскании для каждой размерности n такой решетки Γ_n, которая дает наименьшее значение плотности $\theta_n(\Gamma)$ решетчатого покрытия евклидова пространстве E^n. Из однозначные соответствие между решеткой Γ_n и совершенной квадратичной формой, это проблемы сводиться к изучения главной совершенных форм. К настоящей работы вычисляется окрестности Вороного от пяти переменных с помощью усовершенствованные алгоритма Вороного.

Классической задачи Вороного отыскания совершенных форм, тесно связанной с известной проблемой Эрмита арифметические минимумы положительных квадратичных форм. Эти проблемы являются интересными и нетривиальными задачами геометрической теории чисел, которыми занимались многие математики [6-14]. Они появились и в работах С.Л.Соболева [15] в связи с построением решетчатых оптимальных кубатурных формул.

2. Проблема Эрмита. Предельные формы Коркина-Золотарева

Пусть

$$f = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j \qquad (1)$$

положительно-определенная квадратичная форма от n переменных, $n \geqslant 2$, с вещественными коэффициентами $a_{ij} = a_{ji}(i,j = 1,\dots,n)$, матрицей коэффициентов $A = (a_{ij})$ и определителем $d = d(f) = \det(a_{ij}) > 0$. Форму f можно интерпретировать точкой $f = (a_{11},\dots,a_{nn},a_{12},\dots,a_{n-1n})$ в $N = \frac{n(n+1)}{2}$- мерном евклидовом пространстве E^N. Множество всех положительно-определенная квадратичная форма в E^N образует конус положительности K^N.

Пусть f – положительно-определенная квадратичная форма вида (1). Точная нижняя граница

$$m = m(f) = \inf_{x\in Z^n|\{0\}} f(x) \qquad (2)$$

взятая по всем целым точкам $x \neq 0$, называется арифметическим минимумом формы f. Эта точная нижняя граница достигается, ибо множество $f(x) \leqslant c$ ограничено для любого $c > 0$.

Пусть

$$\pm m_k = \pm(m_{1k},\dots,m_{nk}) \qquad (k = 1,\dots,s;\ \ s = s(f)) \qquad (3)$$

все представления минимума $m(f) = f(\pm m_1) = \ldots = f(\pm m_S)$. Отсюда, в частности, следует, что $m(f) > 0$. Так как тело $f(x) = m(f)$ строго выпукло, то $1 \leqslant s \leqslant 2^n - 1$.

Ввиду того, что $m(\lambda f) = \lambda m(f)$, $\lambda > 0$, естественно рассматривать нормированный арифметический минимум

$$\mu(f) = \frac{m(f)}{\sqrt[n]{d(f)}}.$$

Теперь $\mu(\lambda f) = \mu(f)$. Арифметический минимум $m(f)$ есть непрерывная функция от f, заданная на конусе положительности K^N. Нормированный арифметический минимум $\mu(f)$ есть непрерывная функция от f, заданная на эквидискриминантной поверхности $\{f : d(f) = 1\} \subset K^N$, то есть на множестве положительно-определенная квадратичная форма определителя, равного 1.

Две положительно-определенная квадратичная форма $f_1(x)$ и $f_2(y)$ называются целочисленно эквивалентными (эквивалентными, $f_1 \sim f_2$), если существует целочисленная унимодулярная подстановка $x = yU$, переводящая форму$f_1(x)$ в $f_2(y)$, то есть $f_1(yU) = f_2(y)$. В частности, в случае $f_1 = f_2 = f \quad U$ называется целочисленным автоморфмизмом формы f т.е. $fU = f$.

Говорят, что положительно-определенная квадратичная форма f – предельная (экстремальная) форма Коркина-Золотарева, если f есть точка локального максимума функции $\mu(f)$, то есть если существует такая окрестность $v_f \in \{f : d(f) = 1\}$ точки f, что $\mu(f') \leqslant \mu(f)$, если $f' \in v_f$.

Известно, что число различных классов предельных форм от n переменных конечно. Отсюда вытекает проблема отыскания неэквивалентных предельных форм для фиксированного n. Это и есть проблема Эрмита – арифметических минимумов положительных квадратичных форм.

3. Проблема Вороного отыскания совершенных форм.

Отметим одно важное свойство предельных форм: представления (3) арифметических минимума (2) предельной формы f определяют форму однозначно. На основе этого свойства Вороным создана теория совершенных форм.

Говорят, что положительно-определенная квадратичная форма f является совершенной формой Вороного, если системой линейных уравнений

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} m_{ik} m_{jk} = m \quad (k = 1, \ldots, s) \tag{4}$$

коэффициенты $a_{ij}(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ формы f определяются однозначно. Из этого определения следует, что для того, чтобы форма f была совершенной, необходимо чтобы $s \geqslant N$.

Таким образом, из вышеупомянутого свойства предельной формы и определения совершенной формы следует, что всякая предельная форма является совершенной. Обратное не верно. Начиная с $n = 6$, существуют совершенные, но не предельные формы.

Известно, что число различных классов совершенных форм от n

переменных для данного n конечно. Отсюда вытекает проблема отыскания неэквивалентных совершенных форм для фиксированного n. Это и есть проблема Вороного – отыскание совершенных форм. Теперь ясно, что из постановок этих проблем (Эрмита, Вороного) следует, что проблема Эрмита содержится в проблеме Вороного, другими словами, проблема Эрмита сводится к проблеме Вороного.

4. Окрестность Вороного.

Согласно теории Вороного, каждой совершенной форме f вида (1) ставится в соответствие область $V^N(f) \subset \bar{K}^N N$ - мерная бесконечная пирамида с конечным числом $N-1$ - мерных граней и с вершиной в начале координат (совершенный гоноэдр) – совокупность всех неотрицательных квадратичных форм, представимых в виде:

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{1\leqslant k\leqslant s} \rho_k\lambda_k^2\left(x_1\ldots,x_n\right) \quad,$$

где $\bar{K}^N$- замыкание конуса K^N,$\rho_k \geqslant 0$,$\lambda_k = \lambda_k\left(x\right) = \lambda_k\left(x_1,\ldots,x_n\right) = m_{1k}x_1+\ldots+m_{nk}x_n$,$k = 1,$ $,s$.

В пространстве E^N область $V^N\left(f\right)$ есть множество решений некоторой системы однородных неравенств с неизвестными a_{ij}:

$$\Psi_k\left(a_{ij}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} P_{ij}^{(k)}a_{ij} \geqslant 0 \qquad (k = 1,\ldots,\sigma).$$

Тогда по алгоритму Вороного совершенные формы$f_k\left(x\right)$, смежные с совершенной формой f, строятся следующим образом:

$$f_k\left(x\right) = f\left(x\right) + r_k\Psi_k\left(x\right) \qquad\qquad (k = 1,\ldots,\sigma) \qquad\qquad (5)\,,$$

где

$$r_k = \min_{x\in Z^n|\{0\}:\Psi_k(x)<0}\left\{\frac{f(x)-m}{\left[-\Psi_k(x)\right]}\right\} \qquad\qquad (6)\,,$$

$$\Psi_k(x) = \Psi_k(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} P_{ij}^{(k)}x_ix_j \qquad\qquad (7)\,.$$

Выделив из совокупности $\{f, f_1,\ldots,f_\sigma\}$ неэквивалентные относительно группы $G\left(n;Z\right)$ (группа целочисленных унимодулярных подстановок переменных $x_1,\ldots,x_n$), мы получаем окрестность Вороного $\{f, f_1,\ldots,f_r\}$ совершенной формы f относительно $G\left(n;Z\right)$, или просто окрестность Вороного, которую обозначают $VN\left(f;G\right)$ или $VN\left(f\right)$.

Группа $Aut\left(\varphi_0^5\right)$ представляется в виде объединения смежных классов по симметрической группе 5- степени S_5: $Aut\left(\varphi_0^5\right) = \bigcup_{i=0}^5 g_iS_5$, где g_i- матрица, получающаяся из единичной матрицы заменой ее i- строки на строку $(-1,-1,-1,-1,-1)$.

Основным результатом этого работе является следующее предложение.

Теорема. *Окрестность Вороного совершенной формы*

$$\varphi_0^5 = \varphi_0^5\left(x\right) = \varphi_0^5\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right) = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+$$

$$+x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5.$$

состоит только из одной совершенной формы φ_1^5, т.е. $VN\left(\varphi_0^5\right) = \left\{\varphi_1^5\right\}$.

Доказательство. Арифметический минимум совершенной формы φ_0^5 равен 1. Представления минимума суть следующие:

$$(1,0,0,0,0)\,;\;(0,1,0,0,0)\,;\;(0,0,1,0,0)\,;\;(0,0,0,1,0)\,;\;(0,0,0,0,1)\,;$$

$$(1,-1,0,0,0)\,;\;(1,0,-1,0,0)\,;\;(1,0,0,-1,0)\,;\;(1,0,0,0,-1)\,;\;(0,1,-1,0,0)\,;$$

$$(0,1,0,-1,0)\,;\;(0,1,0,0,-1)\,;(0,0,1,-1,0)\,;\;(0,0,1,0,-1)\,;(0,0,0,1,-1)\,.$$

Область Вороного $V^{15}\left(\varphi_0^5\right)$совершенной формы φ_0^5 состоит из совокупности квадратичных форм представимых в виде:

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 5} a_{ij}x_ix_j = \rho_1x_1^2+\rho_2x_2^2+\rho_3x_3^2+\rho_4x_4^2+\rho_5x_5^2+\rho_6\left(x_1-x_2\right)^2+\rho_7\left(x_1-x_3\right)^2+$$

$$+\rho_8 (x_1 - x_4)^2 + \rho_9 (x_1 - x_5)^2 + \rho_{10} (x_2 - x_3)^2 + \rho_{11} (x_2 - x_4)^2 + \qquad (8)$$
$$+\rho_{12} (x_2 - x_5)^2 + \rho_{13} (x_3 - x_4)^2 + \rho_{14} (x_3 - x_5)^2 + \rho_{15} (x_4 - x_5)^2 .$$

Из равенства (5) приравнивая коэффициенты при одинаковых степениях $x_i x_j$ получаем следующую систему уравнений с неизвестными $\rho_1, \ldots, \rho_{15}$:

$$\begin{gathered}
\rho_1 + \rho_6 + \rho_7 + \rho_8 + \rho_9 = a_{11}, \\
\rho_2 + \rho_6 + \rho_{10} + \rho_{11} + \rho_{12} = a_{22}, \\
\rho_3 + \rho_7 + \rho_{10} + \rho_{13} + \rho_{14} = a_{33}, \\
\rho_4 + \rho_8 + \rho_{11} + \rho_{13} + \rho_{15} = a_{44}, \\
\rho_5 + \rho_9 + \rho_{12} + \rho_{14} + \rho_{15} = a_{55}, \\
\rho_6 = -a_{12}, \\
\rho_7 = -a_{13}, \\
\rho_8 = -a_{14}, \\
\rho_9 = -a_{15}, \\
\rho_{10} = -a_{23}, \\
\rho_{11} = -a_{24}, \\
\rho_{12} = -a_{25}, \\
\rho_{13} = -a_{34}, \\
\rho_{14} = -a_{35}, \\
\rho_{15} = -a_{45},
\end{gathered} \qquad (9)$$

Система (9) имеет единственное решение $s = N = 15$:

$$\begin{gathered}
\rho_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}, \\
\rho_2 = a_{22} + a_{12} + a_{23} + a_{24} + a_{25}, \\
\rho_3 = a_{33} + a_{13} + a_{23} + a_{34} + a_{35}, \\
\rho_4 = a_{44} + a_{14} + a_{24} + a_{34} + a_{45}, \\
\rho_5 = a_{55} + a_{15} + a_{25} + a_{35} + a_{45}, \\
\rho_6 = -a_{12}, \\
\rho_7 = -a_{13}, \\
\rho_8 = -a_{14}, \\
\rho_9 = -a_{15}, \\
\rho_{10} = -a_{23}, \\
\rho_{11} = -a_{24}, \\
\rho_{12} = -a_{25}, \\
\rho_{13} = -a_{34}, \\
\rho_{14} = -a_{35},
\end{gathered} \qquad (10)$$

$$\rho_{15} = -a_{45},$$

15 равнеств в (10) полностью определяют все 14- мерные грани области $V^{15}\left(\varphi_0^5\right)$. Следовательно, здесь формы $\Psi_l\left(x\right)$ из равенства (7) будут имееть вид

$$\Psi_1 = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5,$$

$$\Psi_2 = x_2^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5,$$

$$\Psi_3 = x_3^2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_3x_5,$$

$$\Psi_4 = x_4^2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_4x_5,$$

$$\Psi_5 = x_5^2 + x_1x_5 + x_2x_5 + x_3x_5 + x_4x_5,$$

$$\Psi_6 = -x_1x_2,$$

$$\Psi_7 = -x_1x_3,$$

$$\Psi_8 = -x_1x_4,$$

$$\Psi_9 = -x_1x_5,$$

$$\Psi_{10} = -x_2x_3,$$

$$\Psi_{11} = -x_2x_4,$$

$$\Psi_{12} = -x_2x_5,$$

$$\Psi_{13} = -x_3x_4,$$

$$\Psi_{14} = -x_3x_5,$$

$$\Psi_{15} = -x_4x_5.$$

Используя группу $Aut\left(\varphi_0^5\right)$ непосредственными вычислениями устанавливаем, что

$$\Psi_6 \sim \Psi_7 \sim \Psi_8 \sim \Psi_9 \;\left(x_2 \to x_3, x_3 \to x_2; x_2 \to x_4, x_4 \to x_2;\; x_2 \to x_5, x_5 \to x_2;\;\right),$$

$$\Psi_{10} \sim \Psi_{11} \;\left(x_3 \to x_4, x_4 \to x_3\right), \Psi_{10} \sim \Psi_{12} \;\left(x_3 \to x_5, x_5 \to x_3\right),$$

$$\Psi_{10} \sim \Psi_{13} \;\left(x_2 \to x_4, x_4 \to x_2\right), \Psi_{10} \sim \Psi_{14} \;\left(x_2 \to x_5, x_5 \to x_2\right),$$

$$\Psi_{10} \sim \Psi_{15} \;\left(x_2 \to x_4, x_4 \to x_2,\; x_3 \to x_5, x_5 \to x_3\right),$$

$$\Psi_{10} \sim \Psi_{11} \sim \Psi_{12} \sim \Psi_{13} \sim \Psi_{14} \sim \Psi_{15}, \Psi_6 \sim \Psi_{10} \;\left(x_1 \to x_3, x_3 \to x_1\right).$$

Следовательно, $\Psi_6 \sim \Psi_7 \sim \Psi_8 \sim \Psi_9 \sim \Psi_{10} \sim \Psi_{11} \sim \Psi_{12} \sim \Psi_{13} \sim \Psi_{14} \sim \Psi_{15}$. Далее $\Psi_1 \sim \Psi_2 \sim \Psi_3 \sim \Psi_4 \sim \Psi_5 \;\left(x_1 \to x_2, x_2 \to x_1; x_1 \to x_3, x_3 \to x_1;\;\right)\left(x_1 \to x_4, x_4 \to x_1, x_1 \to x_5,\right.$ $\left.x_5 \to x_1\right)$.

Поэтому, достаточно рассмотреть $\Psi_1 = x_1\left(x_1 + \ldots + x_5\right),\; \Psi_6 = -x_1x_2$. Сравнивая Ψ_1и Ψ_6 убеждаемся в том, что подстановка $x_1 \to x_1, x_2 \to -x_1 - \ldots - x_5, x_i \to x_i \;(i = 3, 4, 5)$ преобразует Ψ_6 в Ψ_1, т.е. $\Psi_1 \sim \Psi_6$.

Таким образом, $\Psi_1 \sim \Psi_2 \sim \Psi_3 \sim \Psi_4 \sim \Psi_5 \sim \Psi_6 \sim \Psi_7 \sim \Psi_8 \sim \Psi_9 \sim \Psi_{10} \sim$

$\sim \Psi_{11} \sim \Psi_{12} \sim \Psi_{13} \sim \Psi_{14} \sim \Psi_{15}$. Следовательно, совершенной форма φ_0^5 имеет только одну смежную форму $f_6 = \varphi_0^5 + r_6\left(-x_1x_2\right)$, где

$r_6 = \min\limits_{(x_1,\ldots,x_5)\in Z^5/\{0\};x_1x_2<0} \frac{\varphi_0^5-1}{(-x_1x_2)}$ и этот min достигается в точке $x^0 = (1, -1, -1, 0, 0)$, т.е. $r_6 = \frac{\varphi_0^5(1,-1,-1,0,0)-1}{1} = 2 - 1 = 1$. Отсюда имеем $f_6 = \varphi_0^5 - x_1x_2 = \varphi_1^5$, поэтому $VN\left(\varphi_0^5\right) = \left\{\varphi_1^5\right\}$. Теорема полностью доказана.

Результаты, приведенные известны из работ [1,2,3,4,5]. Здесь они получены другим путем, но с меньшим объемом вычислений.

5. Заключение

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. G.F. Voronoi. Some properties of positive quadratic forms. Own. cit., Vol. 2. Publishing house of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Kiev-1952, p. 171-238.
2. E.S. Barnes. The complete enumeration of perfect snare forms. Phil. Trans. Rog. Soc. London, A-249,-1957, pp. 461–506.
3. Gulomov O.Kh., Shodiev S.Yu. Calculation of perfect forms in four variables using the advanced Voronoi algorithm. Chebyshevskii sbornik, Math-Net.Ru. 2012.-№ 2-2, pp. 59–63.
4. Ryshkov S.S. Basic extremal problems of the geometry of positive quadratic forms. Doctoral dissertation. M. 1970.171 p.
5. Anzin M.M. The density of a lattice covering for n = 11 and n = 14, Uspekhi Mat. Nauk, 2002, Volume 57, Issue 2, 187–188
6. Gulomov O.Kh. Algorithms for constructing a perfect gonohedron based on the duality principle from the theory of linear inequalities. Uzbek mathematical journal. 2001. No. 2. p.31-36.
7. Gulomov O.Kh., Shodiev S.Yu. Calculation of perfect forms from four variables using the improved Voronoi algorithm.//Chebyshevskii sbornik, 2014.-№ 2-2,59-63 Math-Net.Ru
8. Gulomov O., Shodiyev S. About necessary and sufficient condition for strong stationarity of the positive quadratic form. In.Math. Forum, 2014.T9, № 6, pp. 267-272
9. Gulomov O., Shodiyev S. On an Algorithm for Finding Integer Points on Perfect Ellipsoids. AIP Conference Proceedings 2365, 050001(2021). 050001-1-050001-6.
10. Gulomov, O.Kh., Khudayarov, B.A., Ruzmetov, K.Sh., Turaev, F.Zh.

    Quadratic forms related to the voronoi⇔s domain faces of the second perfect form in seven variables. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithmsthis link is disabled, 2021, 28, C. 15–23
11. J. Martinet. Perfect lattices in Euclidean spaces. Springer, 2003 MR1957723 (2003m:11099).
12. C. Soule. Perfect forms and the Vandiver conjecture. J. Reine Angew. Math. 517 (1999) 209-221. MR1728540 (200d:11102).
13. Dutour Sikiric M., Vallentin F., Sch?urmann A. Classification of eight-dimensional perfect forms. Electronic Research Inducement's of the AMS. 2007. 13, pp. 21–32.
14. Dutour Sikiric M., Sch?urmann A., Vallentin F. Complexity and algorithms for computing Voronoi cells of lattices, Math. Comp. 2009. 78, pp. 1713–1731.
15. Sobolev S.L. Introduction to the theory of cubature formulas. Moscow: Nauka, 1974.808 p.

REFERENCES

1. G. F. Voronoi, 1952, "Some properties of positive quadratic forms" // Own. cit., Vol. 2. Publishing house of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Kiev, pp. 171–238.

2. E. S. Barnes, 1957, The complete enumeration of perfect snare forms. Phil. Trans. Rog. Soc. London, A-249, 1957, pp. 461–506.

3. O. Kh. Gulomov, S. Yu. Shodiev, 2012, "Calculation of perfect forms in four variables using the advanced Voronoi algorithm". Chebyshevskii sbornik, Math-Net.Ru.-№ 2-2, p.. 59–63.

4. S. S. Ryshkov, 1970, Basic extremal problems of the geometry of positive quadratic forms. Doctoral dissertation. M. 1970.171 p.

5. M. M. Anzin, 2002, "The density of a lattice covering for n = 11 and n = 14", Uspekhi Mat. Nauk, Volume 57, Issue 2, pp. 187–188.

6. O. Kh. Gulomov, "Algorithms for constructing a perfect gonohedron based on the duality principle from the theory of linear inequalities". Uzbek mathematical journal. 2001. No. 2. pp. 31–36.

7. O. Kh. Gulomov, S. Yu. Shodiev, "Calculation of perfect forms from four variables using the improved Voronoi algorithm" // Chebyshevskii sbornik, 2014.-№ 2-2, pp. 59–63 Math-Net.Ru.

8. O. Kh. Gulomov, S. Yu. Shodiev, "About necessary and sufficient condition for strong stationarity of the positive quadratic form" In.Math. Forum, 2014.T9, № 6, pp. 267–272.

9. O. Kh. Gulomov, S. Yu. Shodiev, "On an Algorithm for Finding Integer Points on Perfect Ellipsoids". AIP Conference Proceedings 2365, 050001(2021). 050001-1-050001-6.

10. O. Kh. Gulomov, B. A.Khudayarov, K. Sh. Ruzmetov, F. Zh. Turaev, 2021, Quadratic forms related to the voronoi⇔s domain faces of the second perfect form in seven variables. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithmsthis link is disabled, 28, pp. 15–23.

11. J. Martinet. Perfect lattices in Euclidean spaces. Springer, 2003, MR1957723 (2003m:11099).

12. C. Soule. Perfect forms and the Vandiver conjecture. J. Reine Angew. Math. 517 (1999) pp. 209-221. MR1728540 (200d:11102).

13. Dutour Sikiric M., Vallentin F., Sch?urmann A. Classification of eight-dimensional perfect forms. Electronic Research Inducement's of the AMS. 2007. 13, pp. 21–32.

14. Dutour Sikiric M., Sch?urmann A., Vallentin F. Complexity and algorithms for computing Voronoi cells of lattices, Math. Comp. 2009. 78, pp. 1713–1731.

15. Sobolev S.L. Introduction to the theory of cubature formulas. Moscow: Nauka, 1974. 808 p.

Получено: 15.03.2022
Принято в печать: 24.04.2023