

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 511.32

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-213-218

О разрешимости проблемы вхождения в некотором классе групп Артина¹

В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя

Безверхний Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Российская таможенная академия (г. Москва).

e-mail: vnbezu@rambler.ru

Безверхняя Наталия Борисовна — кандидат физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).

e-mail: vnbezu@rambler.ru

Аннотация

В работе решена проблема вхождения в группе Артина с древесной структурой.

Ключевые слова: группы Артина, проблема равенства слов, проблема сопряженности слов, проблема вхождения.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:

В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя. О разрешимости проблемы вхождения в некотором классе групп Артина // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 213–218.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 511.32

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-213-218

**On the solvability of the occurrence problem
in a certain class of Artin groups**

V.N. Bezverkhniy, N. B. Bezverkhnyaya

Bezverkhniy Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Russian Customs Academy (Moscow).

e-mail: vnbezu@rambler.ru

Bezverkhnyaya Natalia Borisovna — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Technical University of Communication and Informatics (Moscow).

e-mail: vnbezu@rambler.ru

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 19-41-710002 p-a

Abstract

The paper solves the problem of entering into the Artin group with a woody structure.

Keywords: Artin groups.

Bibliography: 14 titles.

For citation:

V.N. Bezverkhniy, N. B. Bezverkhnyaya, 2023, "On the solvability of the occurrence problem in a certain class of Artin groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 213–218.

Основными алгоритмическими проблемами в теории групп являются проблемы равенства и сопряженности слов, неразрешимость которых в классе конечноопределенных групп была доказана П.С. Новиковым [1].

Поэтому возникла задача изучения основных проблем теории групп в определенных классах групп. При решении этих проблем возникают более общие проблемы, одной из которых является проблема вхождения.

Впервые проблему вхождения рассмотрел и доказал ее разрешимость в классе свободных групп Нильсен. [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для любой ее конечноопределенной подгруппы H , $H < G$, и любого элемента g , $g \in G$, установить принадлежит ли g подгруппе H .

Очевидно, что из разрешимости проблемы вхождения в группе G следует разрешимость проблемы равенства слов, а из неразрешимости проблемы равенства слов следует неразрешимость проблемы вхождения.

Целью данной статьи является рассмотрение разрешимости проблемы вхождения в группах Артина.

Группа Артина имеет следующее копредставление:

$$G = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n; \langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma_i \rangle^{m_{ji}}; i \neq j; i, j \in \overline{1, n} \rangle \quad (1)$$

где m_{ij} - элементы симметрической матрицы Кокстера M , $m_{ij} \in M$, $m_{ij} \in \{2, 3, \dots, n, \dots, \infty\}$, $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}}$ - слово длины m_{ij} состоящее из чередующихся букв σ_i, σ_j : $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \sigma_i \sigma_j \sigma_i \dots$

Каждой конечноопределенной группе Артина G можно поставить в соответствие конечный граф Γ , между вершинами v_i которого и множеством образующих группы σ_i ; $i, j \in \overline{1, n}$ установлено взаимно-однозначное соответствие, то есть каждой вершине v_i графа Γ соответствует образующий σ_i группы G . Причем, если вершины v_i, v_j соединены ребром, то данному ребру соответствует число Кокстера m_{ij} , если вершины v_i, v_j не соединены ребром, то паре (v_i, v_j) соответствует ∞ .

Построенный граф называется графом Кокстера группы Артина G , имеющей копредставление (1).

Каждой группе Артина соответствует группа Кокстера, имеющая копредставление:

$$\overline{G} = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n; \langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma_i \rangle^{m_{ji}}, \sigma_i^2; i \neq j; i, j \in \overline{1, n} \rangle \quad (2)$$

Если группа $\overline{G}$ конечна, то группа G называется группой Артина конечного типа.

Заметим, что группы Артина конечного типа содержат группы кос.

В классе групп Артина конечного типа в [10] и [11] была доказана неразрешимость проблемы вхождения.

Представляет интерес определить класс групп Артина, в котором разрешима проблема вхождения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Группа G называется группой Артина с древесной структурой, если граф Γ , соответствующий G , есть дерево-граф. [5].*

Отметим, что в группах Артина с древесной структурой элементы матрицы Кокстера m_{ij} принимают значения: $m_{ij} \in \{2, 3, \dots, n, \dots, \infty\}$.

ТЕОРЕМА 1. [6]. *В группе Артина с древесной структурой разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.*

ТЕОРЕМА 2. *В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения.*

При доказательстве используются следующие понятия:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечнопорожденных подгрупп H_1, H_2 группы G выписать образующие пересечения этих подгрупп.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения смежных классов подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечнопорожденных подгрупп H_1, H_2 группы G и произвольного слова $w \in G$, установить, пусто или не пусто пересечение $wH_1 \cap H_2$.*

Из определения группы Артина с древесной структурой следует, что данная группа является древесным произведением двупорожденных групп Артина, объединенных по циклическим подгруппам, порожденных образующими объединяемых групп.

Основным понятием при решении проблемы вхождения в данном классе групп, является понятие специального множества, определенного в [12] и [14] для свободных конструкций групп и являющееся аналогом нильсеновского множества в свободных группах.

ТЕОРЕМА 3. [12]. *Пусть группа*

$$G = \left\langle \prod_{i=1}^n *G_i; ; \text{rel}G_1, \text{rel}G_2, \dots, \text{rel}G_n, \varphi_{ij}(U_{ij}) = U_{ji}, i \in I_1, j \in I_2 \right\rangle \quad (3)$$

является древесным произведением групп $G_s, s = \overline{1, n}$, объединенных по изоморфным ассоциированным подгруппам $U_{ij} < G_i, U_{ji} < G_j$ с помощью конструктивного изоморфизма $\varphi_{ij} : \varphi_{ij}(U_{ij}) = U_{ji}$, где $i \in I_1, j \in I_2, |I_1| < \infty, |I_2| < \infty$. Тогда если объединяемые подгруппы $U_{ij}, U_{ji}, i \in I_1, j \in I_2$, обладают свойством максимальности, и в сомножителях G_i разрешимы:

1. *Проблема вхождения;*
2. *Проблема пересечения любой конечнопорожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой U_{ij} ;*
3. *Проблема пересечения класса смежности любой конечнопорожденной подгруппы $H < G_i$ с объединяемой подгруппой U_{ij} ;*

то в группе разрешима проблема вхождения.

ТЕОРЕМА 4. *В любой двупорожденной группе Артина*

$$G_{ab} = \langle a, b; ; \langle ab \rangle^{m_{ab}} = \langle ba \rangle^{m_{ba}} \rangle \quad (4)$$

где $m_{ab} \in \{2, 3, \dots, n, \dots, \infty\}$ разрешимы:

1. Проблема вхождения;
2. Проблема пересечения любой конечнопорожденной подгруппы $H < G_{ab}$ с любой циклической подгруппой $\langle w \rangle < G_{ab}$;
3. Проблема пересечения смежного класса любой конечнопорожденной подгруппы $H < G_{ab}$ с любой циклической подгруппой $\langle w \rangle < G_{ab}$.

При доказательстве данной теоремы 2 и 4, используются следующие утверждения:

ЛЕММА 1. [4], [10]. Группа Артина (4) при $m_{ab} = 2k + 1$ изоморфна группе

$$\langle x, y; ; x^{2k+1} = y^2 \rangle \quad (5)$$

Доказательство теоремы вхождения в группе с копредставлением (5) следует

ТЕОРЕМА 5. [14]. В группе $G = F_m *_C F_n$, являющейся свободным произведением конечнопорожденных свободных групп F_m, F_n , с циклическим объединением, алгоритмически разрешима проблема вхождения.

ЛЕММА 2. [4], [10]. Группа Артина $G_{ab} = \langle a, b; ; \langle ab \rangle^{m_{ab}} = \langle ba \rangle^{m_{ba}} \rangle$ при $m_{ab} = 2k$ изоморфна группе

$$\langle x, t; ; t^{-1}x^k t = t^k \rangle \quad (6)$$

Разрешимость проблемы вхождения в группе (6) непосредственно следует из

ТЕОРЕМА 6. [13]. Пусть группа

$$G^* = \langle G, t; ; \text{rel } G, t^{-1}U_1 t = \varphi(U_1) \rangle \quad (7)$$

есть HNN-расширение группы G с помощью изоморфных подгрупп U_1, U_{-1} группы G и конструктивного изоморфизма $\varphi : \varphi(U_1) = U_{-1}$; причем U_1, U_{-1} обладают свойством максимальности. Тогда если в группе G разрешимы:

1. Проблема вхождения;
2. Проблема пересечения любой конечнопорожденной подгруппы $H < G$ с подгруппой $U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$;
3. Проблема пересечения смежного класса любой конечнопорожденной подгруппы $H < G$ с подгруппой $U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$.

тогда в G^* разрешима проблема вхождения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков П.С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп. // Труды МИАН СССР, 1955, 44. С.1-144.
2. Appel K., Schupp P. Artin groups and infinite Coxeter groups // Invent. Math. 1983, Vd 72, p. 201-220.
3. Appel K. One Artin groups and Coxeter groups of large type/Contemp. Math. 1984, V.33, P.50-78.

4. Безверхний. В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа. Алгоритмич. проблемы теории групп и полугрупп. Меж. вузов. сб. науч. тр. Тула, 1986, С. 26-61.
5. Безверхний. В. Н. О группах Артина и Кокстера с древесной структурой. Алгебра и теория чисел. Тезисы V международ. конф. Тула, 2003, С. 33-34.
6. Безверхний В. Н. Карпова О. Ю. Проблема равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой. // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006, Т.12, Вып.1, С. 67-82.
7. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некотором классе групп Артина. // Фундаментальная и прикладная математика 2019 г. Т. 22, № 4, С. 9-27.
8. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М. Мир, 1980.
9. Безверхний. В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа. // Фундаментальная и прикладная математика 1999 г. Т. 5, Вып. 1, С. 1-38.
10. Безверхний В. Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа // Сиб. Мат. жур. ТХХVI. № 5, 1985, С. 27-42.
11. Маканина Т. А. Проблема вхождения для групп кос $B(n+1)$ при $n+1 \geq 5$. //Мат. заметки, 1981. Т.29, № 1. С. 31-33.
12. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением. //Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. Тула, 1986. С. 3-21.
13. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN- групп. //Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. Тула, 1981. С. 20-62.
14. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп. //Вопросы теории групп и полугрупп. Тула, ТГПИ. 1972. С. 3-86.

REFERENCES

1. Novikov P. S., 1955, "On algorithmic unsolvability of the word identity problem in group theory". // *Proceedings of the MIAN USSR*, 44. pp. 1–144.
2. Appel K., Schupp P., 1983, "Artin groups and infinite Coxeter groups" // *Invent. Math.*, Vd 72, pp. 201–220.
3. Appel K., 1984, "One Artin groups and Coxeter groups of large type" // *Contemp. Math.*, V.33, pp. 50–78.
4. Bezverkhny. V. N., 1986, "Solution of the word conjugacy problem in Artin and Coxeter groups of large type" // *Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups. Inter. universities. collection of scientific tr.* Tula, pp. 26–61.
5. Bezverkhny. V. N., 2003, "On Artin and Coxeter groups with a woody structure" // *Algebra and number theory. Theses V international. conf.* Tula, pp. 33–34.

6. Bezverkhny V. N., Karpova O. Yu., 2006, "The problem of equality and conjugacy of words in Artin groups with a tree structure" // *News of TulSU. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science.*, Vol.12, Iss. 1, pp. 67–82.
7. Bezverkhny V. N., Bezverkhny N. B., 2019, Solving the problem of equality and conjugacy of words in a certain class of Artin groups. // *Fundamental and Applied Mathematics*, vol. 22, No. 4, pp. 9–27.
8. Lyndon R., Shupp P., 1980, "Combinatorial theory of groups" // M. Mir.
9. Bezverkhny V.N., 1999, "Solution of the problem of generalized conjugacy of words in Artin groups of large type" // *Fundamental and Applied Mathematics*, Vol. 5, Iss. 1, pp. 1–38.
10. Bezverkhny V.N., 1985, "The unsolvability of the problem of occurrence in Artin groups of finite type" // *Sib. Mat. zhur.* TXXVI. № 5, pp. 27–42.
11. Makanina T.A., 1981, "The problem of occurrence for groups of braids $B(n+1)$ at $n+1 \geq 5$ " // *Math. notes*, Vol. 29, № 1. pp. 31–33.
12. Bezverkhny V.N., 1986 "Solution of the problem of occurrence in some classes of groups with one defining relation" // *Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups. Intercollegiate collection of scientific papers*. Tula, pp. 3–21.
13. Bezverkhny V.N., 1981, "Solution of the problem of occurrence in the class of HNN-groups" // *Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups. Intercollegiate collection of scientific papers*. Tula, pp. 20–62.
14. Bezverkhny V.N., 1972, "The solution of the problem of occurrence for one class of groups" // *Questions of the theory of groups and semigroups*. Tula, TSPI. pp. 3–86.

Получено: 15.04.2022

Принято в печать: 24.04.2023