ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 1.

УДК 517.956 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-194-202

# Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Пуанкаре для одного класса многомерных гиперболических уравнений

С. А. Алдашев

**Алдашев Серик Аймурзаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, ГНС, Институт математики и математического моделирования МОН РК (Казахстан, г. Алматы).
*e-mail: aldash51@mail.ru*

**Аннотация**

Двумерные спектральные задачи для гиперболических уравнений хорошо изучены, а их многомерные аналоги, насколько известно автору, исследованы мало. Это связано с тем, что в случае трех и более независимых переменных возникают трудности принципиального характера, так как весьма привлекательный и удобный метод сингулярноых интегральных уравнений, применяемый для двумерных задач, здесь не может быть использован из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. Теория многомерных сферических функций, напротив, досточно и полно изучена.Эти функции имеют важное приложение в математической и теоретической физике , и в теории многомерных сингулярных уравнений. В цилиндрической области евклидова пространства для одного класса многомерных гиперболических уравнений рассматривается спектральная задача Пуанкаре.Решение ищется в виде разложения по многомерным сферическим функциям. Доказаны теоремы существования и единственности решения. Получены условия однозначной разрешимости поставленной задачи, которые существенно зависят от высоты цилиндра.

*Ключевые слова:* многомерное гиперболическое уравнение, спектральная задача Пуанкаре, цилиндрическая область, разрешимость, критерия.

*Библиография:* 20 названий.

**Для цитирования:**
С. А. Алдашев. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Пуанкаре для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 194–202.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 1.

UDC 517.956 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-194-202

## A criterion for the unique solvability of the spectral Poincare problem for a class of multidimensional hyperbolic equations

S. A. Aldashev

**Aldashev Serik Aimurzaevich** — doctor of physics and mathematics, professor, MSW, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK (Kazakhstan, Almaty).
*e-mail: aldash51@mail.ru*

**Abstract**

Two-dimensional spectral problems for hyperbolic equations are well studied, and their multidimensional analogs, as far as the author knows, have been little studied. This is due to the fact that in the case of three or more independent variables there are difficulties of a fundamental nature, since the very attractive and convenient method of singular integral equations used for two-dimensional problems cannot be used here due to the absence of any complete theory of multidimensional singular integral equations. The theory of multidimensional spherical functions, on the contrary, has been adequately and fully studied. These functions have an important application in mathematical and theoretical physics, and in the theory of multidimensional singular equations. In the cylindrical domain of Euclidean space for a class of multidimensional hyperbolic equations, the Poincar? spectral problem is considered. The solution is sought as an expansion in multidimensional spherical functions. The existence and uniqueness theorems are proved. The conditions for the unique solvability of the problem, which significantly depend on the height of the cylinder, are obtained.

*Keywords:* multidimensional hyperbolic equation, Poincare spectral problem, cylindrical domain, solvability, criteria.

*Bibliography:* 20 titles.

**For citation:**
S. A. Aldashev, 2023, “A criterion for the unique solvability of the spectral Poincare problem for a class of multidimensional hyperbolic equations” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 194–202.

## 1. Постановка задачи и результат.

В теории уравнений в частных производных гиперболического типа краевые задачи с данными на всей границе области служат примером некорректности поставленных задач [1, 2].

Пусть $\Omega_\alpha$– цилиндрическая область евклидова пространства $E_{m+1}$ точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$– длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Части этих поверхностей, образующих границу $\partial\Omega_\alpha$ области $\Omega_\alpha$, обозначим через $\Gamma_\alpha, S_\alpha$, $S_0$ соответственно.

В области $\Omega_\alpha$ рассмотрим многомерные гиперболические уравнения со спектральным действительным параметром $\gamma$

$$Lu \equiv \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = \gamma u, \tag{1}$$

$$L^*\upsilon \equiv \Delta_x \upsilon - u_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i \upsilon_{x_i} - b\upsilon + d\upsilon = \gamma\upsilon, \tag{1*}$$

где $\Delta_x$– оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m$, $m \geqslant 2$, а $d(x,t) = c - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

В качестве многомерной спектральной задачи Пуанкаре рассмотрим следующую задачу

**Задача 1.** Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_\alpha$ из класса $C^1(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S_\alpha} = 0, \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = 0,\, u_t\big|_{S_0} = 0. \tag{2}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \dots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \dots, m-1$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$– система линейно независимых сферических функций порядка $n$, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1 \dots$ – пространства Соболева.

Имеет место [(3)]

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geqslant m-1$, то ряд

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1,\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2,\ \ c_1,\, c_2 = const.$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\tilde{d}_n^k(r,t)$, $\rho_n^k$, обозначим коэффициенты ряда (3), соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i \frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, \dots, m$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, $H$– единичная сфера в $E_m$.

Пусть $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega_\alpha) \subset C(\overline{\Omega}_\alpha)$, $b(r,\theta,0) = 0$, $\forall (r,\theta) \in S_0$, $l \geq m+1$, $i = 1, \dots, m$.

Тогда справедлива

**Теорема 1.** 1) Если $\gamma \leq -\mu_{s,n}^2$, то задача 1 имеет только нулевое решение; 2) При $\gamma > -\mu_{s,n}^2$, задача 1 имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\cos \alpha \sqrt{\gamma + \mu_{s,n}^2} \neq 0,\ \ s = 1, 2, \dots,$$

где $\mu_{s,n}$– положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$.

Отметим, что при $a_i(x,t) = b(x,t) = c(x,t) = 0$, $i = 1, \dots, m$ эта теорема получена в [4].

## 2. Разрешимость задачи 1.

В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$Lu \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t) u_{x_i} + b(r,\theta,t) u_t + c(r,\theta,t) u = \gamma u, \tag{5}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1=1,\ g_j=(\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{j-1})^2,\ j>1.$$

Известно ([3]), что спектр оператора $\delta$ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0,1,\ldots$, каждому из которых соответствует $k_n$ ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_n(r,t)Y^k_{n,m}(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}^k_n(r,t)-$ функции, подлежащие определению.

Подставив (6) в (5), умножив полученное выражение на $\rho(\theta)\neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере $H$ для $\overline{u}^k_n$ получим ([5, 6])

$$\rho^1_0\bar{u}^1_{0rr} - \rho^1_0\bar{u}^1_{0tt} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^1_0 + \sum_{i=1}^{m} a^1_{i0}\right)\bar{u}^1_{0r} + \tilde{b}^1_0\bar{u}^1_{0t} + \tilde{c}^1_0\bar{u}^1_0 - \gamma\rho^1_0\bar{u}^1_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho^k_n\bar{u}^k_{nrr} - \rho^k_n\bar{u}^k_{ntt} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{m-1}{r}\rho^k_n + \sum_{i=1}^{m} a^k_{in}\right)\bar{u}^k_{nr} + \tilde{b}^k_n\bar{u}^k_{nt} + \left[\tilde{c}^k_n - \lambda_n\frac{\rho^k_n}{r^2} + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{a}^k_{in-1} - na^k_{in})\right]\bar{u}^k_n - \gamma\rho^k_n\bar{u}^k_n\right\} = 0. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho^1_0\bar{u}^1_{0rr} - \rho^1_0\bar{u}^1_{0tt} + \frac{m-1}{r}\rho^1_0\bar{u}^1_{0r} = \gamma\rho^1_0\bar{u}^1_0, \tag{8}$$

$$\rho^k_1\bar{u}^k_{1rr} - \rho^k_1\bar{u}^k_{1tt} + \tfrac{m-1}{r}\rho^k_1\bar{u}^k_{1r} - \frac{\lambda_1}{r^2}\rho^k_1\bar{u}^k_1 = \gamma\rho^k_1\bar{u}^k_1 - \frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} a^1_{i0}\bar{u}^1_{0r} + \tilde{b}^1_0\bar{u}^1_{0t} + \tilde{c}^1_0\bar{u}^1_0\right),$$
$$n=1,\ k=\overline{1,k_1}, \tag{9}$$

$$\rho^k_n\bar{u}^k_{nrr} - \rho^k_n\bar{u}^k_{ntt} + \frac{m-1}{r}\rho^k_n\bar{u}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\rho^k_n\bar{u}^k_n = \gamma\rho^k_n\bar{u}^k_n - \frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m} a^k_{in-1}\bar{u}^k_{n-1r} + \right.$$
$$\left. + \tilde{b}^k_{n-1}\bar{u}^k_{n-1t} + \left[\tilde{c}^k_{n-1} - \sum_{i=1}^{m}(\tilde{a}^k_{in-2} - (n-1)a^k_{n-1})\right]\bar{u}^k_{n-1}\right\},\ k=\overline{1,k_n},\ n=2,3\ldots. \tag{10}$$

Суммируя уравнение (9) от 1 до $k_1$, а уравнение (10) - от 1 до $k_n$, а затем сложив полученные выражения с (8), приходим у уравнению (7).

Отсюда следует, что если $\left\{\bar{u}^k_n\right\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots .-$ решение системы (8) - (10), то оно является и решением уравнения (7).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)-(10) можно представить в виде

$$\bar{u}^k_{nrr} - \bar{u}^k_{ntt} + \frac{m-1}{r}\bar{u}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}^k_n = \gamma\bar{u}^k_n + \bar{f}^k_n(r,t), \tag{11}$$

где $\bar{f}^k_n(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, причем $\bar{f}^1_0(r,t)\equiv\equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2) в силу (6),будем иметь

$$\bar{u}^k_n(r,\alpha)=0,\ \bar{u}^k_n(1,t)=0,\ \bar{u}^k_{nt}(r,0)=0,\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots. \tag{12}$$

В (11), (12) произведя замену $\bar{u}^k_n(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}u^k_n(r,t)$, получим

$$Lu^k_n \equiv \bar{u}^k_{nrr} - u^k_{ntt} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}u^k_n = \gamma u^k_n + f^k_n(r,t), \tag{13}$$

$$u^k_n(r,\alpha)=0,\ u^k_n(1,t)=0,\ u^k_{nt}(r,0)=0,\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots, \tag{14}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m)-4\lambda_n}{4},\ f_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}_n^k(r,t).$$

Решение задачи (13), (14) будем искать в виде

$$u_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \tag{15}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t)R_s(r). \tag{16}$$

Подставляя (15) в (13), (14), с учетом (16), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s + (\mu-\gamma)R_s = 0,\ 0<r<1, \tag{17}$$

$$R_s(1) = 0,\ \left|R_s(0)\right| < \infty, \tag{18}$$

$$T_{stt} + \mu T_s(t) = -a_{ns}^k(t),\ 0<t<\alpha, \tag{19}$$

$$T_s(\alpha) = 0,\ T_{st}(0) = 0. \tag{20}$$

Ограниченным решением задачи (17), (18) является ([7])

$$R_s(r) = \sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r),\ 0<r<1, \tag{21}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2},\ \mu = \gamma + \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (19) представимо в виде ([7])

$$T_{s,n}(t) = \begin{cases} c_{1s}\operatorname{ch}\sqrt{|\mu|}t + c_{2s}\operatorname{sh}\sqrt{|\mu|}t + \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{|\mu|}t}{\sqrt{|\mu|}}\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)\operatorname{sh}\sqrt{|\mu|}\xi d\xi - \\ -\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{|\mu|}t}{\sqrt{|\mu|}}\int\limits_0^t a_{ns}^k \operatorname{ch}\xi\sqrt{|\mu|}\xi d\xi,\ \mu<0, \\ c_{1s} + c_{2s}t - \int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)(t-\xi)d\xi,\ \mu=0, \\ c_{1s}\cos\sqrt{\mu t} + c_{2s}\sin\sqrt{\mu}t + \dfrac{\cos\sqrt{\mu}t}{\sqrt{\mu}}\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)\sin\sqrt{\mu}\xi d\xi - \\ -\dfrac{\sin\sqrt{\mu}t}{\sqrt{\mu}}\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)\cos\sqrt{\mu}\xi d\xi,\ \mu>0, \end{cases} \tag{22}$$

$c_{1s}$, $c_{2s}$– произвольные постоянные, удовлетворив которого условию (20) будем иметь

$$0 = \begin{cases} c_{1s}\operatorname{ch}\alpha\sqrt{|\mu|} + \dfrac{\operatorname{ch}\alpha\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}}\int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\operatorname{sh}\sqrt{|\mu|}\xi d\xi - \dfrac{\operatorname{sh}\alpha\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}}\int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\operatorname{ch}\sqrt{|\mu|}\xi d\xi,\ \mu<0, \\ c_{1s} - \int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)(\alpha-\xi)d\xi,\ \mu=0, \\ c_{1s}\cos\alpha\sqrt{\mu} + \dfrac{\cos\alpha\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}\int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\sin\sqrt{\mu}\xi d\xi - \dfrac{\sin\alpha\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}\int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\cos\sqrt{\mu}\xi d\xi,\ \mu>0. \end{cases} \tag{23}$$

Подставляя (21) в (16) получим

$$r^{-\frac{1}{2}}f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t)J_\nu(\mu_{s,n}r). \tag{24}$$

Ряд (24)- разложения в ряд Фурье-Бесселя ([8]),если

$$a_{ns}^k(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{25}$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1,2,\ldots -$ положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$ расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (21),(22), (23) найдем решение задачи (13), (14)

$$u_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{26}$$

где $a_{ns}^k(t)$ находится из (25).

Следовательно, сначала решив задачу (8), (12) $(n = 0)$, а затем (9), (12)$(n = 1)$ и т.д. найдем последовательно все $u_n^k(r,t)$ из (26),$k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\ldots$ .

Итак, в области $\Omega_\alpha$, имеет место

$$\int\limits_H \rho(\theta)(L-\gamma)u dH = 0. \tag{27}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0,\ V_0-$ плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)-$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1,\ V_1-$ плотна в $L_2((0,\alpha))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in \in V,\ V = V_0 \otimes H \otimes V_1-$ плотна в $L_2(\Omega_\alpha)$ ([9]).

Отсюда и из (27), следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} f(r,\theta,t)(L-\gamma)u d\Omega_\alpha = 0$$

и

$$Lu = \gamma u,\ \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\alpha.$$

Таким образом, решением задачи 1 является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{s=1}^\infty r^{\frac{(2-m)}{2}} T_{s,n}(t) J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{28}$$

где $T_{s,n}(t)$ определяется из (22).

Из (4), (23) следует, что $c_{1s} = 0$, при $\mu \le 0$ и для $\mu > 0$ $c_{1s} = 0$, если выполняется условие (4). Следовательно, из (25),(22), (26) следует, что $T_{s,n}(t) = 0$ и $u_n^k(r,t) = a_{ns}^k(t) = = 0,\ s = 1,2,\ldots,\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\ldots$ .

Далее, из (28) в свою очередь получим $u = 0$ в $\Omega_\alpha$.

Пусть теперь условие (4) нарушено, хотя бы для одного $s = l$.

Тогда, если решение задачи 1 будем искать в виде (6), то приходим к краевой задаче (13), (14).

В силу (22), (23) ее решением является функция

$$u_n^k(r,t) = \sqrt{r}\left[\cos t\sqrt{\gamma+\mu_{l,n}^2} + \frac{\cos t\sqrt{\gamma+\mu_{l,n}^2}}{\sqrt{\gamma+\mu_{l,n}^2}} \int\limits_0^t a_{nl}(\xi)\sin\xi\sqrt{\gamma+\mu_{l,n}^2} d\xi - \right.$$
$$\left. - \frac{\sin t\sqrt{\gamma+\mu_{l,n}^2}}{\sqrt{\gamma+\mu_{l,n}^2}} \int\limits_0^t a_{nl}(\xi)\cos\xi\sqrt{\gamma+\mu_{l,n}^2} d\xi \right] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n} r).$$

Следовательно, нетривиальные решения задачи 1 записываются в виде ряда

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}n^{-p}r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta). \tag{29}$$

Учитывая формулу ([8]) $2J'_\nu(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$, а также оценки ([10, 3])

$$|k_n|\le c_1n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\le c_2n^{\frac{m}{2}-1+q},\ c_1,\,c_2=const,\ j=\overline{1,m-1},\ q=0,1,\dots, \tag{30}$$

а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1), как в [11], можно доказать, что если $p>\frac{3m}{2}$, то функция (29) принадлежит искомому классу $C^1(\bar\Omega_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$.

Разрешимость задачи 1 установлено.

## 3. Единственность решения задачи 1.

Сначала построим решение краевой задачи для уравнения $1^*$ с данными

$$\upsilon\big|_{S_\alpha\cup\Gamma_\alpha}=0,\ \upsilon_t\big|_{S_0}=\nu(r,\theta)=\bar\nu_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\quad k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots., \tag{31}$$

где $\bar\nu_n^k(r)\in G$, $G-$ множество функций $\nu(r)$ из класса $C([0,1])\cap C^1((0,1))$. Множество $G$ плотно всюду в $L_2((0,1))$ [9]. Решение задачи $(1^*),(31)$ будем искать в виде (6), где функции $\bar\upsilon_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, аналогично п.2, функции $\bar\upsilon_n^k(r,t)$ удовлетворяют систему уравнений (8)-(10), где $\tilde a_{in}^k$, $a_{in}^k$, $\tilde b_n^k$, заменены на $-\tilde a_{in}^k$, $-a_{in}^k$, $-\tilde b_n^k$, а $\tilde c_n^k$ на $\tilde d_n^k$, $i=1,\dots,m$, $k=\overline{1,k_n}$, $\quad n=0,1,\dots$ .

Далее, из краевого условия (31), в силу (6), получим

$$\bar\upsilon_n^k(r,\beta)=\bar\upsilon_n^k(1,t)=0,\ \bar\upsilon_{nt}^k(r,0)=\bar\nu_n^k(r),\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\dots. \tag{32}$$

Как ранее замечено, что каждое уравнение системы (8)-(10) представимо в виде (11).

Далее, задача (11),(32), решается, аналогично, как решалась задача (13), (14) из п.2.

Таким образом, решение $(1^*)$, (31) в виде ряда (28) построено, которая в силу (30), как показано в [11], принадлежит классу $C^1(\bar\Omega_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$.

Из определения сопряженных операторов $L,\ L^*$([12])

$$\upsilon Lu-uL^*\upsilon=-\upsilon P(u)+uP(\upsilon)-u\upsilon Q,$$

где

$$P(u)=\sum_{i=1}^{m}u_{x_i}\cos\left(N^\perp,x_i\right)-u_t\cos\left(N^\perp,t\right),Q=\sum_{i=1}^{m}a_i\cos\left(N^\perp,x_i\right)-b\cos\left(N^\perp,t\right),$$

а $N^\perp-$ внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$, по формуле Грина имеем

$$\int\limits_{\Omega_\alpha}(\upsilon Lu-uL^*\upsilon)d\Omega_\alpha=\int\limits_{\partial\Omega_\alpha}\left[\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial N}-u\frac{\partial\upsilon}{\partial N}M+u\upsilon Q\right)\right]ds, \tag{33}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N}=\sum_{i=1}^{m}\cos\left(N^\perp,x_i\right)\frac{\partial}{\partial x_i}-\cos\left(N^\perp,t\right)\frac{\partial}{\partial t},M^2=\sum_{i=1}^{m}\cos^2\left(N^\perp,x_i\right)+\cos^2\left(N^\perp,t\right).$$

Из (33), принимая во внимание граничные условия (2) и условия (31) получим

$$\int_{S_0} \nu(r,\theta)u(r,\theta,0)ds = 0. \tag{34}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{\nu}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна в $L_2(S_0)$([9]), то из (34) получаем, что $u(r,\theta,0) = 0$, $\forall(r,\theta) \in S_0$.

Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши: $u(x,t) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ для уравнения (1)([12]) будем иметь $u(x,t) = 0$, $\forall(x,t) \in \Omega_\alpha$.

Таким образом, единственность решения задачи 1 показана.

Теорема 1 доказана полностью.

В заключении отметим, что при $\gamma = 0$ теорема 1 согласуется с результатами работ [11, 13, 14].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа,М.: Изд. АН СССР, 1959 - 164с.
2. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных, М.: Наука, 2006 - 287 с.
3. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М.: Физматгиз, 1962 - 254 с.
4. Алдашев С.А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения//Материалы I Международной конференции молодых ученых("Матем. моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики"), Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2011-с.35-39.
5. Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994 - 170с.
6. Алдашев С.А. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения, 1998, т.34, N.1 - с.64-68.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.: Наука, 1965 - 703 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2, М.: Наука, 1974 - 295 с.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1976 - 543 с.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, М.:Наука, 1966 - 724с.
11. Алдашев С.А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором//Журнал "Вычислительной и прикладной математик КНУ им. Т.Шевченко, Киев, 2013,№ 4(14)-с.68-76.
12. Смирнов В.И. Курс высшей математики, Т.4, г.2, М.: Наука, 1981-550с.
13. Алдашев С.А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения // Современная математика и ее приложения. Уравнения с частными производными, 2010, т.67-с. 28-32.

14. Aldashev S.A. The well-posedness of the Poincare problem in a cylindrical domain for the higher - dimensional wave equation// Journal of Mathematical sciences, 2011, vol.173, № 2-p.150-154.

## REFERENCES

1. Bitsadze A. V.,1959, "Equations of mixed type" // *Academy of Sciences USSR*, M .: Pub. 164 p.
2. Nakhushev A. M., 2006, "Tasks with an offset for an equation in private derivatives" // *Moscow: Science* 287 p.
3. Mikhlin S. G., 1962, "Multidimensional singular integrals and integral equations" *Moscow: Fizmatgiz*, 254 p.
4. Aldashev S. A., 2011, "Criterion for unique solvability the Poincar? spectral problem in a cylindrical domain for of the multidimensional wave equation" // *Proceedings of the I International Conference of Mol. Scientists* ("Mat. Simulation of fractal processes, related problems of analysis and informatics "), Nalchik: Scientific Research Institute PMA KBNC RAS, pp.35–39.
5. Aldashev S. A., 1994, "Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations" // Almaty: Gylym, 170 p.
6. Aldashev S. A., 1998, "On Darboux problems for one class multidimensional hyperbolic equations" // *Differ. the equations*, Vol. 34, № 1 - pp. 64–68.
7. Kamke E., 1965, *Handbook of ordinary differential equations*, M .: Science, 703 p.
8. Bateman G., Erdei A., 1974, *Higher Transcendental Functions*, V. 2, M .: Science, 295 p.
9. Kolmogorov A. N., Fomin S. V., 1976, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, M .: Science, 543 p.
10. Tikhonov A. N., Samara A. A., 1966, *Equations mathematical physics*, M.: Science, 724 p.
11. Aldashev S. A., 2013, "The correctness of the Poincare problem in cylindrical domain for many -dimensional hyperbolic equations with the wave operator" // *Journal "Computational and Applied Mathematician"*, KNU. T. Shevchenko, Kiev, № . 4 (14), pp.68–76.
12. Smirnov V. I.,1981, *The course of higher mathematics*, Vol.4, r.2, M .: Science, 550 p.
13. Aldashev S. A., 2010, "The correctness of the Poincar problem in cylindrical domain for a multi-dimensional wave equation" // *Modern mathematics and its applications. Equations with quotients Derivatives*, Vol.67, pp. 28–32.
14. Aldashev S. A., 2011, "The well-posedness of the Poincare problem in a cylindrical domain for the higher - dimensional wave equation" // *Journal of Mathematical sciences*, Vol.173, № 2, pp. 150–154.

Получено: 23.12.2022
Принято в печать: 24.04.2023