ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 1.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-182-193

О наилучшем полиномиальном приближении функций в пространстве Харди $H_{q,R}$, $(1 \leqslant q \leqslant \infty,\ R \geqslant 1)$

М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов

Шабозов Мирганд Шабозович — доктор физико-математических наук, профессор, Таджикский национальный университет (Таджикистан, г. Душанбе).
e-mail: shabozov@mail.ru
Юсупов Гулзорхон Амиршоевич — доктор физико-математических наук, доцент, Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни (Таджикистан, г. Душанбе).
e-mail: yusufzoda.gulzorkhon@gmail.com

Аннотация

В работе найдены точные неравенства между наилучшим полиномиальным приближением аналитических в круге $U_R := \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$, $R \geqslant 1$ функций и усредненным модулем непрерывности угловых граничных значений производных m-го порядка. Для класса $W_{q,R}^{(m)}$ $(m \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty,\ R \geqslant 1)$ функций $f \in H_{q,R}^{(m)}$, у которых производные m-го порядка $f^{(m)}$ принадлежат пространству Харди $H_{q,R}$ и удовлетворяют условию $\|f^{(m)}\|_{q,R} \leqslant 1$, вычислены точные значения верхних граней наилучших приближений. Кроме того, для класса $W_{q,R}^{(m)}(\Phi)$, состоящих из всех функций $f \in H_{q,R}^{(m)}$, для которых при любом $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $k > m$ усредненные модули непрерывности граничных значений производной m-го порядка $f^{(m)}$, мажорируемые в системе точек $\{\pi/k\}_{k\in\mathbb{N}}$ заданной функцией Φ, удовлетворяют условию

$$\int_0^{\pi/k} \omega\big(f^{(m)}, t\big)_{q,R} dt \leqslant \Phi(\pi/k),$$

вычислены точные значения колмогоровских и бернштейновских n-поперечников в норме пространства H_q $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$.

Полученные результаты обобщают некоторые результаты Л.В.Тайкова на классах аналитических функций в круге радиуса $R \geqslant 1$.

Ключевые слова: наилучшее приближение, пространство Харди, модуль непрерывности, мажорирующая функция, n-поперечники.

Библиография: 22 названий.

Для цитирования:
М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов. О наилучшем полиномиальном приближении функций в пространстве Харди $H_{q,R}$, $(1 \leqslant q \leqslant \infty,\ R \geqslant 1)$ // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 182–193.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 1.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-182-193

On the best polynomial approximation of functions in the Hardy space $H_{q,R}$, $(1 \leqslant q \leqslant \infty,\, R \geqslant 1)$

M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov

Shabozov Mirgand Shabozovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tajik National University (Tajikistan, Dushanbe).
e-mail: shabozov@mail.ru
Yusupov Gulzorkhon Amirshoevich — doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, Tajik State S.Aini Pedagogical University (Tajikistan, Dushanbe).
e-mail: yusufzoda.gulzorkhon@gmail.com

Abstract

Exact inequalities are found between the best polynomial approximation of functions analytics in the disk $U_R := \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$, $R \geqslant 1$ and the averaged modulus of continuity angular boundary values of the mth order derivatives. For the class $W_{q,R}^{(m)}$ $(m \in \mathbb{Z}_+,$ $1 \leqslant q \leqslant \infty,\, R \geqslant 1)$ of functions $f \in H_{q,R}^{(m)}$ whose m-order derivatives $f^{(m)}$ belong to the Hardy space $H_{q,R}$ and satisfy the condition $\|f^{(m)}\|_{q,R} \leqslant 1$, the exact values of the upper bounds of the best approximations are calculated. Moreover, for the class $W_{q,R}^{(m)}(\Phi)$, consisting of all functions $f \in H_{q,R}^{(m)}$, for which any $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $k > m$ the averaged moduli of continuity of the boundary values of the mth order derivative $f^{(m)}$, dominated in the system of points $\{\pi/k\}_{k\in\mathbb{N}}$ by the given function Φ, satisfy the condition

$$\int_0^{\pi/k} \omega\big(f^{(m)}, t\big)_{q,R} dt \leqslant \Phi(\pi/k),$$

the exact values of the Kolmogorov and Bernstein n-widths are calculated in the norm of the space H_q $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$.

The results obtained generalize some results of L.V.Taikov on classes of analytic functions in a circle of radius $R \geqslant 1$.

Keywords: the best approximation, Hardy space, modulus of continuity, majorizing function, n-widths.

Bibliography: 22 titles.

For citation:
M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov, 2023, “On the best polynomial approximation of functions in the Hardy space $H_{q,R}$, $(1 \leqslant q \leqslant \infty,\, R \geqslant 1)$”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 182–193.

1. Введение

Вычислению точных значений различных n-поперечников классов аналитических в круге функций в различных нормированных пространств посвящено достаточно много работ (см, например, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]). Следует отметить, что первые результаты, связанные с вычислением колмогоровских n-поперечников в пространстве Харди $H_q\,(1 \leqslant q \leqslant \infty)$, принадлежат В.М.Тихомирову [1] ($q = \infty$) и Л.В.Тайкову [2] ($1 \leqslant q < \infty$). Ранее в работе К.И.Бабенко [3] был получен линейный метод аппроксимации одного класса функций, аналитических в единичном круге, пригодный для оценок поперечников сверху и использованный в [1] и [2], а также во многих других работах. В дальнейшем эта тематика развивалась как в работах Л.В.Тайкова [4, 5, 6], так и, например, в работах [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19].

Целью данной работы является получение новых результатов, связанных с вычислением точных значений колмогоровских и бернштейновских n-поперечников классов функций, аналитических в круге радиуса $R \geqslant 1$.

Введем нужные нам для дальнейшего обозначения и определения.

Пусть $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ — круг радиуса $R \geqslant 1$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $A(U_R)$ – множество аналитических в U_R функций. Для произвольной функции $f \in A(U_R)$ при $0 < \rho < R$ положим

$$M_q(f,\rho) := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|f(\rho e^{(it)})\right|^q dt\right)^{1/q}, & \text{если } 1 \leqslant q < \infty; \\ \max\limits_{0 \leqslant t < 2\pi} \left|f(\rho e^{it})\right|, & \text{если } q = \infty, \end{cases}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Символом $H_{q,R}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $R \geqslant 1$ обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U_R)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{q,R} := \|f\|_{H_{q,R}} = \lim_{\rho \to R-0} M_q(f,\rho).$$

Норма реализуется на угловых граничных значениях функций $f \in H_{q,R}$, где

$$\|f\|_{q,R} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|f\left(Re^{it}\right)\right|^q dt\right)^{1/q}, & 1 \leqslant q < \infty; \\ ess\sup\left\{\left|f\left(Re^{it}\right)\right| : \, 0 \leqslant t < 2\pi\right\}, & q = \infty. \end{cases} \tag{1}$$

В случае $R = 1$ полагаем $U := U_1$, $H_q = H_{q,1}$ и $\|f\|_q := \|f\|_{q,1}$.

Пусть $\mathscr{P}_n$ — множество алгебраических комплексных полиномов степени не выше n. Равенством

$$E_{n-1}(f)_{q,R} := \inf\left\{\left\|f - p_{n-1}\right\|_{q,R} : p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\right\}$$

определим наилучшее приближение функций $f \in H_{q,R}$ элементами множества $\mathscr{P}_{n-1}$ в пространстве $H_{q,R}$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty, R \geqslant 1)$.

Производную m-го порядка функций $f \in A(U_R)$ определим как обычно

$$f^{(m)}(z) := d^m f(z)/dz^m = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m} z^{k-m}, \tag{2}$$

где

$$\alpha_{k,m} := k(k-1)\ldots(k-m+1), \; k \geqslant m, \; k,m \in \mathbb{N}, \; \alpha_{k,0} = 1, \; \alpha_{k,1} = k.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+, R \geqslant 1$ при любом $1 \leqslant q \leqslant +\infty$ справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f)_q \leqslant \frac{R^{-(n-m)}}{\alpha_{n,m}} \cdot E_{n-m-1}\big(f^{(m)}\big)_{q,R}, \tag{3}$$

и знак равенства в (3) *достигается для функции* $f_0(z) = z^n$.

Доказательство. Не ограничивая общности, рассмотрим только те функции $f \in A(U_R)$, у которых m-я производная $f^{(m)} \in H_{q,R}$. Пусть $P_{n-m-1}\big(f^{(m)}, z\big)$ — полином наилучшего приближения производной $f^{(m)}$ в метрике $H_{q,R}$.

$$E_{n-m-1}\big(f^{(m)}\big)_{q,R} = \Big\|f^{(m)}(z) - P_{n-m-1}\big(f^{(m)}, z\big)\Big\|_{q,R}.$$

Угловые граничные значения

$$Q(z) := Q\big(f^{(m)}, z\big) = f^{(m)}(z) - P_{n-m-1}\big(f^{(m)}, z\big), \quad |z| \leqslant R$$

будем обозначать через $Q\big(Re^{it}\big)$. Для произвольной функции $f \in H_{q,R}^{(m)}$, повторив схему рассуждений работы [2], легко доказать равенство

$$f(z) - P_{n-1}(z) =$$

$$= \frac{z^m}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-m} Q(\zeta) \left\{\frac{1}{\alpha_{n,m}} + 2Re \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n+k,m}} \Big(\frac{z}{\zeta}\Big)^k\right\} \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{4}$$

где $P_{n-1}(z) := P_{n-1}(f, z)$ — некоторый полином из $\mathscr{P}_{n-1}$, линейно зависящий от функций $f \in H_{q,R}^{(m)}$. Полагая в (1) $z = e^{it}, \zeta = Re^{i\theta}$, запишем его в виде

$$f\big(e^{it}\big) - P_{n-1}\big(e^{it}\big) =$$

$$= \frac{e^{imt}}{2\pi R^{n-m}} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-m)(t-\theta)} Q\big(Re^{i\theta}\big) \left\{\frac{1}{\alpha_{n,m}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(t-\theta)}{R^k \alpha_{n+k,m}}\right\} d\theta =$$

$$= \frac{e^{imt}}{2\pi R^{n-m}} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-m)\tau} Q\big(Re^{i(t-\tau)}\big) \left\{\frac{1}{\alpha_{n,m}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\tau}{R^k \alpha_{n+k,m}}\right\} d\tau. \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что числовая последовательность $\left\{\dfrac{1}{R^k \alpha_{n+k,m}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ является выпуклой вниз и её общий член стремится к нулю (см., например,[12, гл. VIII, с.252-253]). Но тогда в силу теоремы 1.5 [20, с.294] функция

$$\Phi_R(\tau) := \frac{1}{\alpha_{n,m}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\tau}{R^k \alpha_{n+k,m}}$$

является неотрицательной и интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]$, причём

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Phi_R(t) dt = \frac{1}{\alpha_{n,m}}. \tag{6}$$

Из (5) сразу следует, что

$$E_{n-1}(f)_q \leqslant \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big|f(e^{it})-P_{n-1}(e^{it})\Big|^q dt\right\}^{1/q} =$$

$$=\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big|\frac{e^{imt}}{2\pi R^{m-n}}\int\limits_0^{2\pi}e^{i(n-m)\tau}Q\big(Re^{i(t-\tau)}\big)\Phi_R(\tau)d\tau\Big|^q dt\right\}^{1/q}. \tag{7}$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского к правой части неравенства (7), с учётом (6), имеем

$$E_{n-1}(f)_q \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{2\pi R^{n-m}}\int\limits_0^{2\pi}\Big|Q\big(Re^{i(t-\tau)}\big)\Big|\cdot\big|\Phi_R(\tau)\big|d\tau\Big)^q dt\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{R^{n-m}}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big|\Phi_R(\tau)\big|d\tau\right)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big|Q(Re^{it})\big|^q dt\right)^{1/q} =$$

$$=\frac{1}{R^{n-m}\cdot\alpha_{n,m}}\|Q(R\cdot)\|_q = \frac{1}{R^{n-m}\alpha_{n,m}}\|Q\|_{q,R}. \tag{8}$$

Поскольку $\|Q\|_{q,R}=E_{n-m-1}\big(f^{(m)}\big)_{q,R}$, то из (8) окончательно получаем

$$E_{n-1}(f)_q \leqslant \frac{R^{-(n-m)}}{\alpha_{n,m}}E_{n-m-1}\big(f^{(m)}\big)_{q,R}$$

и неравенство (3) доказано. Для функции $f_0(z)=z^n\in H_{q,R}$ простые вычисления дают

$$E_{n-m-1}\big(f_0^{(m)}\big)_{q,R}=R^{n-m}\alpha_{n,m},\quad E_{n-1}\big(f_0\big)_q=1,$$

пользуясь которыми имеем

$$\frac{R^{-(n-m)}}{\alpha_{n,m}}E_{n-m-1}\big(f_0^{(m)}\big)_{q,R}=1=E_{n-1}\big(f_0\big)_q,$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in H_{q,R}^{(m)}}\frac{E_{n-1}(f)_q}{E_{n-m-1}\big(f^{(m)}\big)_{q,R}}=\frac{1}{R^{n-m}\alpha_{n,m}}.$$

Через $W^{(m)}H_{q,R}$ $\big(m\in\mathbb{Z}_+,\ W^{(0)}H_{q,R}\equiv H_{q,R},\ 1\leqslant q\leqslant\infty, R\geqslant 1\big)$ обозначим множество функций $f\in H_{q,R}^{(m)}$, у которых $\|f^{(m)}\|_{q,R}\leqslant 1$.

Теорема 2. *Для любых чисел $n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{Z}_+, n>m$ при любых $1\leqslant q\leqslant\infty$, $R\geqslant 1$ справедливо равенство*

$$E_{n-1}\big(W^{(m)}H_{q,R}\big)=\sup\Big\{E_{n-1}(f)_q:\ f\in W^{(m)}H_{q,R}\Big\}=\frac{R^{-(n-m)}}{\alpha_{n,m}}. \tag{9}$$

Доказательство. Так как для любых функций $f \in W^{(m)}H_{q,R}$ величина наилучшего приближения производной $f^{(m)}$

$$E_{n-m-1}\big(f^{(m)}\big)_{q,R} \leqslant \big\|f^{(m)}\big\|_{q,R} \leqslant 1,$$

то из неравенства (3) сразу следует оценка сверху величины, стоящей в левой части (9)

$$E_{n-1}\big(W^{(m)}H_{q,R}\big) \leqslant \frac{R^{-(n-m)}}{\alpha_{n,m}}. \tag{10}$$

С другой стороны, например, для функции

$$g(z) = \frac{z^n}{R^{n-m}\alpha_{n,m}},\ n > m,\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}_+,$$

имеем

$$g^{(m)}(z) = \frac{z^{n-m}}{R^{n-m}},\ \|g^{(m)}\|_{q,R} = 1,$$

т.е. функция $g \in W^{(m)}H_{q,R}$, и так как

$$E_{n-1}(g)_q = \frac{R^{-(n-m)}}{\alpha_{n,m}},$$

то запишем оценку снизу указанной величины

$$E_{n-1}\big(W^{(m)}H_{q,R}\big) \geqslant E_{n-1}(g)_q = \frac{R^{-(n-m)}}{\alpha_{n,m}}. \tag{11}$$

Требуемое равенство (9) является следствием сопоставления неравенств (10) и (11). Теорема 2 доказана.

2. Основной результат

Для произвольной функции $f \in H_{q,R}^{(m)}$ модуль непрерывности первого порядка производной $f^{(m)}$ определим равенством

$$\omega\big(f^{(m)}, t\big)_{q,R} := \sup_{|h| \leqslant t} \Big\| f^{(m)}\big(Re^{i(\tau+h)}\big) - f^{(m)}\big(Re^{i\tau}\big)\Big\|_q.$$

Имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+, n > m$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $R \geqslant 1$. Тогда для произвольной функции $f \in H_{q,R}^{(m)}$ справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f)_q \leqslant \frac{n-m}{4R^{n-m}\alpha_{n,m}} \int\limits_0^{\pi/(n-m)} \omega\big(f^{(m)}, t\big)_{q,R} dt, \tag{12}$$

которое обращается в равенство для функции $f_0(z) = z^n \in H_{q,R}^{(m)}$.

Доказательство. Из теоремы 1 работы [6] следует, что для произвольной функции $f \in H_{q,R}^{(m)}$ имеет место неравенство

$$E_{n-m-1}(f)_{q,R} \leqslant \frac{n-m}{4\alpha_{n,m}} \int\limits_0^{\pi/(n-m)} \omega\big(f^{(m)}, t\big)_{q,R} dt. \tag{13}$$

Полагая в (13) $m=0$, $f^{(0)}=f$ и учитывая, что $\alpha_{n,0}=1$, имеем

$$E_{n-1}(f)_{q,R}\leqslant\frac{n}{4}\int\limits_{0}^{\pi/n}\omega(f,t)_{q,R}dt.$$

Заменив в полученном неравенстве число n на $n-m$ и функцию f на производную $f^{(m)}$, запишем

$$E_{n-m-1}\big(f^{(m)}\big)_{q,R}\leqslant\frac{n-m}{4}\int\limits_{0}^{\pi/(n-m)}\omega\big(f^{(m)},t\big)_{q,R}dt. \tag{14}$$

Учитывая неравенство (14), из (3) окончательно получаем

$$E_{n-1}(f)_{q}\leqslant\frac{n-m}{4R^{n-m}\alpha_{n,m}}\int\limits_{0}^{\pi/(n-m)}\omega\big(f^{(m)},t\big)_{q,R}dt,$$

и неравенство (12) доказано. Точность неравенства (12) на функцию $f_0(z)=z^n$ проверяется непосредственным вычислением. Теорема 3 доказана.

3.Точные значения n-поперечников классов функций $W_{q,R}^{(m)}(\Phi)$ $(m\in\mathbb{Z}_+, W_{q,R}^{(0)}(\Phi)\equiv W_{q,R}(\Phi), 1\leqslant q\leqslant\infty, R\geqslant 1)$ в пространстве H_q

Прежде чем излагать другие результаты, напомним нужные нам далее необходимые понятия и определения. Пусть S — единичный шар в H_q; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество из H_q; $\mathscr{L}_n\subset H_q$ — n-мерное подпространство. Величины

$$b_n\big(\mathfrak{M};H_q\big)=\sup\Big\{\sup\Big\{\varepsilon>0:\ \varepsilon S\cap\mathscr{L}_{n+1}\subset\mathfrak{M}\Big\}:\mathscr{L}_{n+1}\subset H_q\Big\},$$

$$d_n\big(\mathfrak{M};H_q\big)=\inf\Big\{\sup\Big\{\inf\Big\{\|f-\varphi\|:\ \varphi\in\mathscr{L}_n\Big\}:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}:\ \mathscr{L}_n\subset H_q\Big\}$$

называют соответственно *бернштейнтовским и колмогоровским n-поперечниками* множества $\mathfrak{M}$ в H_q. Указанные n-поперечники монотонны по n и связаны неравенством (см., напр., [21]):

$$b_n(\mathfrak{m},H_q)\leqslant d_n(\mathfrak{m},H_q). \tag{15}$$

Пусть функция $\Phi(u)$ определена, неотрицательна, выпукла вниз на отрезке $[0,\pi]$, $\lim\limits_{u\to0+}\Phi(u)=\Phi(0)=0$ и для любых $\lambda\in[0,1]$ и $t\in(0,\pi]$ удовлетворяет неравенству

$$2\sin^2\frac{\pi}{4}\lambda\leqslant\frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}\leqslant\frac{\lambda}{\pi/2-(\pi/2-1)\lambda}. \tag{16}$$

Класс $W_{q,R}^{(m)}(\Phi)$ состоит из всех функций $f\in H_{q,R}^{(m)}$, для которых при любых $k\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}_+$, $k>m$ выполняется условие

$$\int\limits_{0}^{\pi/k}\omega\big(f^{(m)},t\big)_{q,R}dt\leqslant\Phi(\pi/k).$$

Отметим, что в работе [22] показано, что среди всех функций $\Phi(t):=t^{1+\alpha}$, где $0\leqslant\alpha\leqslant1$, только одна функция со значением $\alpha=\pi/2-1$ удовлетворяет ограничению (16).

Сформулируем наш основной результат в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть $R \geqslant 1, 1 \leqslant q \leqslant \infty, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+, n > m$ и мажоранта Φ удовлетворяет ограничению* (16). *Тогда справедливы равенства*

$$b_n\big(W_{q,R}^{(m)}(\Phi); H_q\big) = d_n\big(W_{q,R}^{(m)}(\Phi); H_q\big) = \frac{n-m}{4R^{n-m}\alpha_{n,m}}\Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Согласно определению класса $W^{(m)}H_{q,R}$, из неравенства (12) имеем

$$d_n\big(W_{q,R}^{(m)}(\Phi); H_q\big) \leqslant \sup\Big\{E_{n-1}(f)_q : f \in W^{(m)}H_{q,R}\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n-m}{4R^{n-m}\alpha_{n,m}}\Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right), \tag{18}$$

и оценка сверху колмогоровского n-поперечника в пространстве H_q получена.

Докажем оценку снизу бернштейновского n-поперечника, записанного в левой части неравенства (15). Для этого воспользуемся подпространством $\mathscr{P}_n$ алгебраических полиномов степени не выше n. Известно (см.[12, гл.VIII, §2]), что для произвольного полинома $p_n \in \mathscr{P}_n$ выполнено неравенство

$$\big\|p_n^{(m)}\big\|_{q,R} \leqslant R^{n-m}\alpha_{n,m}\|p_n\|_q, \tag{19}$$

где $n \geqslant m$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $R \geqslant 1$. Рассмотрим следующий шар

$$S_{n+1} := \left\{p_n \in \mathscr{P}_n : \ \|p_n\|_q \leqslant \frac{n-m}{4R^{n-m}\alpha_{n,m}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right)\right\}.$$

Обозначим

$$\delta_n(x) := \begin{cases} 2\sin\dfrac{nx}{2}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \pi/n, \\ 2, & \text{если } x > \pi/n. \end{cases}$$

Из неравенства

$$\big\|p_n(ze^{ix}) - p_n(z)\big\|_{q,R} \leqslant \delta_n(x) \cdot \|p_n\|_{q,R},$$

которое следует из одного результата работы [5], для произвольного полинома $p_n \in \mathscr{P}_n$ с учетом (19) имеем

$$\omega\big(p_n^{(m)}, x\big)_{q,R} \leqslant \delta_{n-m}(x)\big\|p_n^{(m)}\big\|_{q,R} \leqslant \delta_{n-m}(x)R^{n-m}\alpha_{n,m}\big\|p_n\big\|_{q,}, \quad x \geqslant 0. \tag{20}$$

Покажем теперь, что шар $S_{n+1} \subset W_{q,R}^{(m)}(\Phi)$. Для этого рассмотрим два случая: $k \geqslant n-m$ и $k < n-m$. Пусть, сначала, $k \geqslant n-m$. Тогда для произвольного полинома $p_n \in S_{n+1}$, в силу (20) можно записать следующую цепочку неравенств:

$$\int\limits_0^{\pi/k} \omega\big(p_n^{(m)}, t\big)_{q,R} dt \leqslant R^{n-m}\alpha_{n,m}\big\|p_n\big\|_q \int\limits_0^{\pi/k} \delta_{n-m}(t)dt \leqslant$$
$$\leqslant \left\{4R^{n-m}\alpha_{n,m}(n-m)^{-1}\right\}\left\{1 - \cos\frac{\pi}{2}\frac{n-m}{k}\right\}\big\|p_n\big\|_q \leqslant$$
$$\leqslant 2\sin^2\frac{\pi}{4} \cdot \frac{n-m}{k}\,\Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right). \tag{21}$$

В правой части (18), полагая

$$t = \frac{\pi}{n-m}, \ \lambda = \frac{n-m}{k}, \ \lambda t = \frac{\pi}{k}$$

и учитывая левую часть неравенства (16), получаем

$$\int\limits_0^{\pi/k} \omega\big(p_n^{(m)}, t\big)_{q,R} dt \leqslant 2\sin^2\frac{\pi}{4}\lambda\Phi(t) \leqslant \Phi(\lambda t) = \Phi\left(\frac{\pi}{k}\right). \tag{22}$$

Пусть теперь $k < n-m$. Снова воспользовавшись неравенством (20) для любого $p_n \in S_{n+1}$, имеем

$$\int\limits_0^{\pi/k} \omega\big(p_n^{(m)}, t\big)_{q,R} dt \leqslant R^{n-m}\alpha_{n,m}\big\|p_n\big\|_q \int\limits_0^{\pi/k} \delta_{n-m}(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n-m}{4}\Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right)\left\{\int\limits_0^{\pi/(n-m)}\left(2\sin\frac{(n-m)t}{2}\right)dt + \int\limits_{\pi/(n-m)}^{\pi/k} 2dt\right\} =$$

$$= \frac{n-m}{4}\Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right)\left\{\frac{4}{n-m} + 2\left(\frac{\pi}{k} - \frac{\pi}{n-m}\right)\right\} =$$

$$= \left\{1 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{n-m}{k} - 1\right)\right\}\Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right).$$

Если положить теперь $\pi(n-m)^{-1} = \lambda t$, $\dfrac{k}{n-m} = \lambda$, $\pi k^{-1} = t$, то опять, согласно правой части условия (16), имеем

$$\int\limits_0^{\pi/k} \omega\big(p_n^{(m)}, t\big)_{q,R} dt \leqslant \left\{1 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{n-m}{k} - 1\right)\right\}\Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right) =$$

$$= \left\{1 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\right\}\Phi(\lambda t) \leqslant \Phi(t) = \Phi(\pi/k). \tag{23}$$

Включение шара $S_{n+1} \subset W_{q,R}^{(m)}(\Phi)$ следует из неравенств (22) и (23). Но тогда, согласно определению бернштейновского n-поперечника, запишем

$$b_n\big(W_{q,R}^{(m)}(\Phi), H_q\big) \geqslant b_n\big(S_{n+1}, H_q\big) = \frac{n-m}{4R^{n-m}\alpha_{n,m}}\Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right). \tag{24}$$

Сопоставив неравенств (3) и (24), получим требуемые равенства (17), чем и завершаем доказательство теоремы 4.

4. Заключение

В пространстве Харди найдено точное неравенство между наилучшим приближением $E_{n-1}(f)_q$ аналитических в единичном круге функций $f \in H_q$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$ и наилучшим приближением $E_{n-m-1}(f^{(m)})_{q,R}$ производной m-го порядка $f^{(m)} \in H_{q,R}$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty,\ R \geqslant 1)$ аналитических в круге радиуса $R \geqslant 1$. Вычислены значения бернштейновского и колмогоровского n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых усреднённым значением модулей непрерывности первого порядка.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // УМН. 1960. Т. 15. № 3. С. 81–120.

2. Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 2. С. 155–162.

3. Бабенко К.И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. № 5. С. 631–640.

4. Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 2. С. 285–295.

5. Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшее приближение в смысле А.Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. 1986. Т. 40. № 3. С. 341–351.

6. Тайков Л.В. Некоторые точные неравенства в теории приближения функций // Analysis Mathematica. 1976. № 2. С. 77–85.

7. Двейрин М.З. Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1975. Т. 23. С. 32–46.

8. Двейрин М.З., Чебаненко И.В. О полиномиальной аппроксимации в бановых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. Наукова думка. Киев. 1983. С. 63–73.

9. Фарков Ю.А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // УМН. 1990. Т. 45. № 5. С. 197–198.

10. Farkov Yu.A. n-Widths, Faber expansion, and computation of analytic functions // Journal of complexity. 1996. Vol. 12. № 1. PP. 58–79.

11. Fisher S.D., Stessin M.I. The n-width of the unit ball of H^q // Journal of Approx. Theory. 1991. Vol. 67. № 3. PP. 347–356.

12. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 1985. 252 p.

13. Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. I // Укр. матем. журнал. 1990. Т. 42. № 7. С. 873–881.

14. Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. II // Укр. матем. журнал. 1990. Т. 42. № 8. С. 1019–1026.

15. Вакарчук С.Б. Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения // Матем. заметки. 2002. Т.72. № 5. С. 665–669.

16. Вакарчук С.Б. О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости // Укр. матем. журнал. 2004. Т. 56. № 9. С. 1155–1171.

17. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 5. С. 796–800.

18. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 6. С.747–749.

19. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сборник. 2010. Т. 201. № 8. С. 3–22.

20. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир. 1965. Т.1. 615 с.

21. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М. Изд-во МГУ. 1976. 325 с.

22. Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 4. С. 535–542.

REFERENCES

1. Tikhomirov V.M. 1960, “Widths of sets in function spaces and the theory of best approximations”, *Ukr. Matem. Journal*, vol. 15. no 3. pp. 81–120.

2. Taikov L.V. 1967, “On the best average approximation of some classes of analytic functions”, *Math. Notes*, vol. 1, no 2, pp. 155–162.

3. Babenko K.I. 1958, “On the best approximations of a class of analytic functions”, *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. math.*, vol. 22, no 5, pp. 631–640.

4. Taikov L.V. 1977, “Widths of some classes of analytic functions”, *Math. Notes*, vol. 22, no 2, pp. 285–295.

5. Ainulloev N., Taikov L.V. 1986, “Best approximation in the sense of Kolmogorov of classes of functions analytic in the unit disc”, *Math. Notes*, vol. 40, no 3, pp. 699–705.

6. Taikov L.V. 1976, “Some exact inequalities in the theory of approximation of functions”, *Analysis Mathematica.*, no 2, pp. 77–85.

7. Dveyrin M.Z. 1975, “Widths and ε-entropy of classes of functions that are analytic in the unit circle of functions”, *Function theory, functional analysis and their applications*, no 23, pp. 32–46.

8. Dveyrin M.Z., Chebanencko I.V. 1983, “On polynomial approximation in the weighted Banach spaces of analytic functions”, *Mapping theory and approximation of functions.* Kiev: Nukova dumka, pp. 62–73.

9. Farkov Yu.A. 1990, “Widths of Hardy classes and Bergman classes on the ball in $\mathbb{C}^n$”, *Uspekhi Mat. Nauk,* vol. 45, no 5(275), pp. 197–198.

10. Farkov Yu.A. 1996, “n-Widths, Faber expansion, and computation of analytic functions”, *Journal of complexity.*, vol. 12, no 1, pp. 58–79.

11. Fisher S.D., Stessin M.I. 1991, “The n-width of the unit ball of H^q”, *Journal of Approx. Theory.*, vol. 67, no 3, pp. 347–356.

12. Pinkus A. 1985, “n-Widths in Approximation Theory”, Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo, 252 p.

13. Vakarchuk S.B. 1990, “On the widths of certain classes of functions analytic in the unit disc. I”, *Ukr. Matem. Journal*, vol. 42. no 7. pp. 873–881.

14. Vakarchuk S.B. 1990, “On the widths of certain classes of functions analytic in the unit disc. II”, *Ukr. Matem. Journal*, vol. 42. no 8. pp. 1019–1026.

15. Vakarchuk S.B. 2002, “Exact values of the widths of classes of functions analytic in the circle and the best linear methods of approximation”, *Math. Notes*, vol. 72, no 5, pp. 665–669.

16. Vakarchuk S.B. 2004, “On some extremal problems in the theory of approximations in the complex plane”, *Ukr. Matem. Journal*, vol. 56. no 9. pp. 1155–1171.

17. Shabozov M.Sh., Shabozov O.Sh. 2000, “Widths of some classes of analytic functions in the Hardy space H_2”, *Math. Notes*, vol. 68, no 5, pp. 796–800.

18. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. 2002, “Best approximation and values of widths of some classes of analytic functions”, *Dokl. RAN*, vol. 383, no 2, pp. 171–174.

19. Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh. “2010, “The widths of classes of analytic functions in a disc”, *Mat. Sbornik*, vol. 201, no 8, pp. 3–22.

20. Sigmund A. 1965, “Trigonometric series”, *Moscow: Mir*, vol. 1, 615 p.

21. Tikhomirov V. M. 1976, “Some problems of theory of approximation”, *Moscow: MSU*, 304 p.

22. Taikov L.V. 1977, “Best approximations of differentiable functions in the metric of the space L_2”, *Math. Notes*, vol. 22, no 4, pp. 535–542.

Получено: 23.11.2022
Принято в печать: 24.04.2023