ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 1.

УДК 511.48 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-139-181

О симметриях трехмерных алгебраических цепных дробей[1]

И. А. Тлюстангелов

Тлюстангелов Ибрагим Асланович — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: ibragim-tls@yandex.ru

Аннотация

В данной работе подробно доказывается критерий наличия у алгебраической цепной дроби собственной палиндромической симметрии в размерности 4. Также мы приводим новое доказательство критерия наличия собственной циклической палиндромической симметрии в размерности 4. В качестве многомерного обобщения цепных дробей рассматриваются полиэдры Клейна.

Ключевые слова: полиэдры Клейна, алгебраические решетки.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:
И. А. Тлюстангелов. О симметриях трехмерных алгебраических цепных дробей // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 139–181.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 1.

UDC 511.48 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-139-181

On symmetries of 3-dimensional algebraic continued fractions

I. A. Tlyustangelov

Tlyustangelov Ibragim Aslanovich — Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: ibragim-tls@yandex.ru

Abstract

In this paper we prove in detail a criterion for an algebraic continued fraction to have a proper palindromic symmetry in dimension 4. We also present a new proof of the criterion for an algebraic continued fraction to have a proper cyclic palindromic symmetry in dimension 4. As a multidimensional generalization of continued fractions, we consider Klein polyhedra.

Keywords: Klein polyhedra, algebraic lattices.

Bibliography: 12 titles.

For citation:
I. A. Tlyustangelov, 2023, “On symmetries of 3-dimensional algebraic continued fractions” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 139–181.

[1]Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-21-00079.

1. Введение

Обыкновенная цепная дробь действительного числа имеет весьма изящную геометрическую интерпретацию, позволяющую перейти от классического случая к многомерному (см. [1] и, например, [2], [3], [4], [5]). Для описания такого обобщения рассмотрим $l_1, \ldots, l_n$ — одномерные подпространства пространства $\mathbb{R}^n$, линейная оболочка которых совпадает со всем $\mathbb{R}^n$. Гиперпространства, натянутые на всевозможные $(n-1)$-наборы из этих подпространств, разбивают $\mathbb{R}^n$ на 2^n симплициальных конусов. Будем обозначать множество этих конусов через

$$\mathcal{C}(l_1, \ldots, l_n).$$

Симплициальный конус с вершиной в начале координат $\vec{0}$ будем называть *иррациональным*, если линейная оболочка любой его гиперграни не содержит целых точек, кроме начала координат $\vec{0}$.

Определение 1. *Пусть C — иррациональный конус, $C \in \mathcal{C}(l_1, \ldots, l_n)$. Выпуклая оболочка $\mathcal{K}(C) = \mathrm{conv}(C \cap \mathbb{Z}^n \setminus \{\vec{0}\})$ и его граница $\partial(\mathcal{K}(C))$ называются соответственно* полиэдром Клейна *и* парусом Клейна*, соответствующими конусу C. Объединение же всех 2^n парусов*

$$\mathcal{CF}(l_1, \ldots, l_n) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}(l_1, \ldots, l_n)} \partial(\mathcal{K}(C))$$

называется $(n-1)$-мерной цепной дробью.

Особенный интерес представляет так называемый алгебраический случай. Напомним, что оператор из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ с вещественными собственными значениями, характеристический многочлен которого неприводим над $\mathbb{Q}$, называется *гиперболическим*. Справедливо следующее утверждение о связи гиперболических операторов с алгебраическими числами в случае произвольного n (подробности см., например, в [6])

Предложение 1. *Числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ образуют базис некоторого вполне вещественного расширения K поля $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда вектор $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ является собственным для некоторого гиперболического оператора $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. При этом векторы $(1, \sigma_i(\alpha_1), \ldots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, $i = 1, \ldots, n$, где $\sigma_1(= \mathrm{id}), \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — все вложения K в $\mathbb{R}$, образуют собственный базис оператора A.*

В случае $n = 2$ предложение 1 позволяет геометрически проинтерпретировать классическую теорему Лагранжа о периодичности обыкновенной цепной дроби. Геометрически теорема Лагранжа означает, что последовательность целочисленных длин и углов паруса одномерной цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2)$ периодична тогда и только тогда, когда направления l_1 и l_2 являются собственными для некоторого $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ оператора с различными вещественными собственными значениями (см., например, [7]).

Определение 2. *Пусть $l_1, \ldots, l_n$ — собственные подпространства некоторого гиперболического оператора $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Тогда $(n-1)$-мерная цепная дробь $\mathcal{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ называется* алгебраической. *Мы будем также говорить, что эта дробь* ассоциирована *с оператором A и писать $\mathcal{CF}(A) = \mathcal{CF}(l_1, \ldots, l_n)$. Множество всех $(n-1)$-мерных алгебраических цепных дробей будем обозначать $\mathfrak{A}_{n-1}$.*

Будем называть *группой симметрий* алгебраической цепной дроби $\mathcal{CF}(A) = \mathcal{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ множество

$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathcal{CF}(A)\big) = \Big\{ G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \;\Big|\; G\big(\mathcal{CF}(A)\big) = \mathcal{CF}(A) \Big\}.$$

Из соображений непрерывности ясно, что для каждого $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathcal{CF}(A)\big)$ однозначно определена перестановка σ_G, такая что

$$G(l_i) = l_{\sigma_G(i)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

И обратно, если для $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ существует такая перестановка σ_G, что выполняются соотношения (1), то $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathcal{CF}(A)\big)$.

Благодаря теореме Дирихле об алгебраических единицах (см. [8]) существует изоморфная $\mathbb{Z}^{n-1}$ подгруппа группы $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathcal{CF}(A)\big)$ (см., например, [6]). Относительно действия этой подгруппы на любом из 2^n парусов возникает фундаментальная область, которую можно отождествить с $(n-1)$-мерным тором (см. [2]). Для каждого элемента G, принадлежащего этой подгруппе, $\sigma_G = \mathrm{id}$. Однако, в $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathcal{CF}(A)\big)$, вообще говоря, могут существовать такие элементы G, для которых $\sigma_G \neq \mathrm{id}$.

Определение 3. *Оператор $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathcal{CF}(A)\big)$ такой, что $\sigma_G = \mathrm{id}$, будем называть* симметрией Дирихле *дроби $\mathcal{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$.*

Определение 4. *Оператор $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathcal{CF}(A)\big)$, не являющийся симметрией Дирихле, будем называть* палиндромической симметрией *дроби $\mathcal{CF}(A)$. Если множество палиндромических симметрией цепной дроби непусто, то такую цепную дробь будем называть* палиндромичной.

Определение 5. *Симметрия $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathcal{CF}(A)\big)$ называется* циклической, *если σ_G — циклическая перестановка.*

Очевидно, что все циклические симметрии цепной дроби $\mathcal{CF}(A)$ являются палиндромическими симметриями этой цепной дроби.

Определение 6. *Палиндромическая симметрия $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathcal{CF}(A)\big)$ называется* собственной, *если у оператора G существует неподвижная точка на некотором парусе цепной дроби $\mathcal{CF}(A)$. Палиндромическая симметрия $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathcal{CF}(A)\big)$, не являющаяся собственной, называется* несобственной.

Для $n = 2$, то есть для одномерных цепных дробей, палиндромичность напрямую связана с симметричностью периодов обыкновенных цепных дробей квадратичных иррациональностей. Критерий симметричности периода цепной дроби квадратичной иррациональности восходит к результатам Галуа [9], Лежандра [10], Перрона [11] и Крайтчика [12]. В работе [7] дано геометрическое доказательство этого критерия. При этом приходится рассматривать как собственные, так и несобственные симметрии. Критерий палиндромичности цепной дроби для $n = 3$ был получен в работе [6]. Стоит отметить, что при $n = 3$ любая палиндромичная цепная дробь обладает собственной циклической симметрией. Для $n = 4$ существует критерий наличия собственной палиндромической симметрии у алгебраической цепной дроби, схема доказательства которого описана в работе [13]. Данная работа посвящена полному доказательству этого критерия. Основной результат работы [14] — доказательство критерия существования собственной циклической палиндромической симметрии у трехмерной алгебраической цепной дроби. В данной работе с помощью полученных результатов мы по-новому доказываем этот критерий.

2. Критерии палиндромичности

Здесь и далее обозначение $\vec{v}_1 \sim \vec{v}_2$ для векторов из $\mathbb{R}^n$ означает существование такого оператора $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ и такого ненулевого $\mu \in \mathbb{R}$, что $X\vec{v}_1 = \mu\vec{v}_2$. Упомянутый критерий палиндромичности для $n = 2$ выглядит следующим образом:

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2) \in \mathfrak{A}_1$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha)$. Тогда $\mathcal{CF}(l_1, l_2)$ имеет собственную симметрию (или, что тоже самое, собственную циклическую симметрию) в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число ω степени 2 со своим сопряжённым ω', что выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(а) $(1, \alpha) \sim (1, \omega)$: $\quad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' = 0$;
(б) $(1, \alpha) \sim (1, \omega)$: $\quad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' = 1$.

В размерности $n = 3$ критерий палиндромичности имеет следующую формулировку:

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha, \beta)$. Тогда $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3)$ имеет собственную симметрию (или, что тоже самое, собственную циклическую симметрию) в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число ω степени 3 со своими сопряжёнными ω' и ω'', что выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(а) $(1, \alpha, \beta) \sim (1, \omega, \omega')$: $\quad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' + \omega'' = 0$;
(б) $(1, \alpha, \beta) \sim (1, \omega, \omega')$: $\quad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' + \omega'' = 1$.

При выполнении утверждения (а) *или* (б) *кубическое расширение $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ будет нормальным.*

Критерий существования собственной палиндромической симметрии у алгебраической цепной дроби в размерности $n = 4$ формулируется следующим образом:

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha, \beta, \gamma)$. Пусть $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ и $\sigma_1 (= \mathrm{id}), \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ — все вложения поля K в $\mathbb{R}$ (см. предложение 1). Тогда $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ имеет собственную палиндромическую симметрию в том и только в том случае, если (с точностью до перестановки индексов) выполняется*

$$\sigma_3(K) = K, \quad \sigma_4(K) = \sigma_2(K), \quad \sigma_3^2 = \sigma_1 = \mathrm{id}, \quad \sigma_4 = \sigma_2\sigma_3$$

и существуют такие алгебраические числа ω и ψ степени 4, принадлежащие полю K, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

(1) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \omega')$: $\quad \psi + \psi' = -(\omega + \omega')$;
(2) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \omega')$: $\quad \psi + \psi' = 1 - (\omega + \omega')$;
(3) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \omega')$: $\quad \psi + \psi' = 2 - (\omega + \omega')$;
(4) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \frac{\omega+\omega'}{2})$: $\quad \psi + \psi' = -(\omega + \omega')$;
(5) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \frac{\omega+\omega'}{2})$: $\quad \psi + \psi' = 2 - (\omega + \omega')$;
(6) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \frac{\omega+\omega'+1}{2})$: $\quad \psi + \psi' = -(\omega + \omega')$;
(7) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \frac{\omega+\omega'+1}{2})$: $\quad \psi + \psi' = 2 - (\omega + \omega')$;
(8) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \frac{\omega+\omega'}{2})$: $\quad \psi + \psi' = 1 - \frac{\omega+\omega'}{2}$;
(9) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \frac{\omega+\omega'}{2})$: $\quad \psi + \psi' = 2 - \frac{\omega+\omega'}{2}$;
(10) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \frac{\omega'-\omega}{4})$: $\quad \psi + \psi' = 2 - \frac{\omega+\omega'}{2}$,

где $\omega' = \sigma_3(\omega), \psi' = \sigma_3(\psi)$.

Наконец, в размерности $n = 4$ критерий существования собственной циклической палиндромической симметрии у алгебраической цепной дроби имеет следующий вид:

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha, \beta, \gamma)$. Пусть $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$. Тогда $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ имеет собственную циклическую симметрию в том и только в том случае, если K — циклическое расширение Галуа степени 4, группа Галуа которого порождается вложением σ, и существует такое алгебраическое число $\omega \in K$ степени 4, что выполнено хотя бы одно из семи условий* (1) - (7) *теоремы 3 для $\psi = \sigma_2(\omega)$.*

Следующее утверждение, доказанное в работе [6], показывает, что, в отличии от случаев $n = 2$ и $n = 3$, не всякая цепная дробь, обладающая собственными симметриями, обладает собственными циклическими симметриями:

Предложение 2. *Существуют такие вещественные числа α, β, γ, что подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha, \beta, \gamma)$, вполне вещественное расширение $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ поля $\mathbb{Q}$ не является нормальным и $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ — цепная дробь, обладающая собственными симметриями, но не обладающая собственными циклическими симметриями.*

Любопытно, что теорема 4 не следует непосредственно из теоремы 3. В связи с этим возникает естественный вопрос.

Верно ли, что существует такая палиндромичная алгебраическая цепная дробь $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$, для которой поле K является циклическим расширением Галуа и у которой не существует собственных циклических палиндромических симметрий?

Оставшаяся часть статьи имеет следующую структуру: в параграфе 3 мы анализируем то, как у собственных симметрий трехмерных цепных дробей устроены собственные подпространства и перестановки из соотношения (1); в параграфе 4 мы изучаем геометрию трехмерных цепных дробей, обладающих собственными симметриями, в том числе циклическими; в параграфе 5 мы устанавливаем связь между определенными классами цепных дробей и матрицами их собственных симметрий; наконец, параграф 6 посвящен доказательству теорем 3 и 4.

3. Собственные симметрии и собственные подпространства

Если задана дробь $\mathcal{CF}(l_1, \ldots, l_n) = \mathcal{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$, будем считать, что подпространство l_1 порождается вектором $\vec{l_1} = (1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ (данное допущение корректно в силу предложения 1). Тогда из предложения 1 следует, что числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ над $\mathbb{Q}$ и каждое l_i порождается вектором $\vec{l_i} = (1, \sigma_i(\alpha_1), \ldots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, где $\sigma_1 (= \mathrm{id}), \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — все вложения K в $\mathbb{R}$. Заметим, что верна следующая

Лемма 1. *Пусть $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathcal{CF}(A)\big)$ и $\mathcal{CF}(A) = \mathcal{CF}(l_1, \ldots, l_n)$. Пусть $G \neq \pm I_n$ и $G(\vec{l_1}) = \lambda \vec{l_1}$. Тогда $\lambda \notin \mathbb{Q}$.*

Доказательство. Предположим, что $\lambda \in \mathbb{Q}$. Поскольку $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ и $G \neq \pm I_n$, то $\mathrm{rank}(G - \lambda I_n) > 0$. Так как $(G - \lambda I_n)(\vec{l_1}) = \vec{0}$, то какие-то числа из набора $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ выражаются через оставшиеся числа этого набора в виде некоторой линейной комбинации с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. В силу предложения 1 получаем противоречие. $\square$

Отныне будем считать, что $n = 4$, то есть будем рассматривать трехмерные цепные дроби. Напомним также, что для каждого $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathcal{CF}(A)\big)$ соотношением (1) определена перестановка σ_G.

Лемма 2. *Пусть G — палиндромическая симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$, ассоциированной с (гиперболическим) оператором A. Тогда существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, что $\sigma_G = (1, 2)(3, 4)$ или $\sigma_G = (1, 2, 3, 4)$.*

Доказательство. Случай $\sigma_G = \mathrm{id}$ невозможен в силу того, что оператор G не является симметрией Дирихле $\mathcal{CF}(A)$.

Предположим, существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, для которой $\sigma_G = (1)(2, 3, 4)$. Таким образом, существуют такие вещественные числа μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, что матрица оператора G в базисе $\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}, \vec{l_4}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристический многочлен оператора G имеет вид

$$\chi_G(x) = (x-\mu_1)(x^3-\mu_2\mu_3\mu_4) = x^4-\mu_1x^3-\mu_2\mu_3\mu_4x\pm 1\in\mathbb{Z}[x].$$

Следовательно, μ_1 — целое число, и при этом μ_1 — корень уравнения $\chi_G(x)=0$, то есть $\mu_1=\pm1$. Стало быть, l_1 — собственное подпространство оператора G, соответствующее собственному значению $\mu_1=\pm1$. То есть l_1 рационально, что противоречит гиперболичности оператора A.

Теперь предположим, существует такая нумерация подпространств l_1,l_2,l_3,l_4, что $\sigma_G = (1)(2)(3,4)$. Таким образом, существуют такие вещественные числа μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, что матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}\mu_1&0&0&0\\0&\mu_2&0&0\\0&0&0&\mu_3\\0&0&\mu_4&0\end{pmatrix}.$$

Тогда характеристический многочлен оператора G, коэффициенты которого целочисленны, имеет вид

$$(x-\mu_1)(x-\mu_2)(x^2-\mu_3\mu_4) =$$
$$= x^4-(\mu_1+\mu_2)x^3+(\mu_1\mu_2-\mu_3\mu_4)x^2+(\mu_1+\mu_2)\mu_3\mu_4x-\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4.$$

Так как $\mu_1+\mu_2\in\mathbb{Z}$, то $\mu_3\mu_4\in\mathbb{Q}$. Тогда существуют такие взаимно-простые целые числа $p\geqslant 1$ и $q\geqslant 1$, что $|\mu_3\mu_4|=\frac{p}{q}$, $|\mu_1\mu_2|=\frac{q}{p}$, а значит,

$$|\mu_1\mu_2-\mu_3\mu_4| = \frac{\pm p^2\pm q^2}{pq}.$$

Итак, p^2 делится на q и q^2 делится на p, то есть $p=q=1$ и $\mu_3\mu_4=\pm1$. Таким образом, матрица оператора G^2 в базисе $\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}\mu_1^2&0&0&0\\0&\mu_2^2&0&0\\0&0&\pm1&0\\0&0&0&\pm1\end{pmatrix}.$$

Из леммы 1 следует, что $G^2=I_4$, то есть $\mu_1=\pm1$. Вновь применяя лемму 1, получаем, что $G=\pm I_4$, чего не может быть.

Таким образом, существует такая нумерация подпространств l_1,l_2,l_3,l_4, что $\sigma_G=(1,2)(3,4)$ или $\sigma_G=(1,2,3,4)$. $\square$

Следствие 1. *Пусть G — палиндромическия симметрия $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathfrak{A}_3$. Пусть $G'=G^2$, если $\mathrm{ord}(\sigma_G)=4$, и $G'=G$, если $\mathrm{ord}(\sigma_G)=2$. Тогда G' — палиндромическия симметрия $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{G'})=2$.*

Пусть G — палиндромическия симметрия $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathfrak{A}_3$. Изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1,l_2,l_3,l_4, в силу леммы 2 можно рассмотреть такие вещественные числа μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, что матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}0&0&0&\mu_1\\\mu_2&0&0&0\\0&\mu_3&0&0\\0&0&\mu_4&0\end{pmatrix} \qquad (2)$$

или вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Пусть G — палиндромическая симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид (2). В работе [14] доказывается следующая

Лемма 3. *Пусть G — палиндромическая симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид* (2). *Тогда G является собственной симметрией дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ в том и только том случае, если $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$.*

Доказательство. Пусть G является собственной симметрией цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существуют такие числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 из множества $\{-1, 1\}$, что

$$G(\varepsilon_1\vec{l}_1, \varepsilon_2\vec{l}_2, \varepsilon_3\vec{l}_3, \varepsilon_4\vec{l}_4) = \big(\mu_2\varepsilon_1\vec{l}_2, \mu_3\varepsilon_2\vec{l}_3, \mu_4\varepsilon_3\vec{l}_4, \mu_1\varepsilon_4\vec{l}_1\big),$$

и выполняются неравенства

$$\mu_1\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_1} > 0,\ \mu_2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} > 0,\ \mu_3\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} > 0,\ \mu_4\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4} > 0.$$

Стало быть, $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 > 0$, а значит, $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$.

Если $\mu_1\mu_2\ldots\mu_n = 1$, то оператор G имеет собственное направление, которое соответствует собственному значению 1 и лежит внутри некоторого конуса $C \in \mathcal{C}(l_1, \ldots, l_n)$. $\square$

Для палиндромических симметрий вида (3) справедливо аналогичное утверждение:

Лемма 4. *Пусть G — палиндромическая симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид* (3). *Тогда G является собственной симметрией дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ в том и только том случае, если $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$.*

Доказательство. Пусть G является собственной симметрией цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существуют такие числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 из множества $\{-1, 1\}$, что

$$G(\varepsilon_1\vec{l}_1, \varepsilon_2\vec{l}_2, \varepsilon_3\vec{l}_3, \varepsilon_4\vec{l}_4) = \big(\mu_3\varepsilon_1\vec{l}_3, \mu_4\varepsilon_2\vec{l}_4, \mu_1\varepsilon_3\vec{l}_1, \mu_2\varepsilon_4\vec{l}_2\big),$$

и выполняются неравенства

$$\mu_1\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} > 0,\ \mu_2\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_2} > 0,\ \mu_3\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} > 0,\ \mu_4\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4} > 0.$$

Стало быть, $\mu_1\mu_3 > 0$ и $\mu_2\mu_4 > 0$. Так как у оператора G существует неподвижная точка на некотором парусе, то у оператора G существует одномерное собственное подпространство, соответствующее собственному значению 1. Теперь, поскольку характеристический многочлен оператора G имеет вид $(x^2 - \mu_1\mu_3)(x^2 - \mu_2\mu_4)$, то $\mu_1\mu_3 = 1$ или $\mu_2\mu_4 = 1$. Тогда $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$.

Если $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$, то, опять же, характеристический многочлен оператора G имеет вид $x^4 - 2x^2 + 1$. Стало быть, у оператора G существует целочисленный собственный вектор, соответствующий собственному значению 1. Этот вектор лежит внутри некоторого конуса $C \in \mathcal{C}(l_1, l_2, l_3, l_4)$, поскольку цепная дробь $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ является алгебраической. $\square$

Следствие 2. *Пусть G — палиндромическия симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Тогда G является собственной симметрией в том и только том случае, если G' (см. следствие* 1) *является собственной симметрией.*

Доказательство. Если G является собственной симметрией $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$, то, очевидно, оператор G' также является собственной симметрией цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$.

Обратно, предположим, что G' — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Случай $\mathrm{ord}(\sigma_G) = 2$, то есть $G' = G$, очевиден. Если $\mathrm{ord}(\sigma_G) = 4$, то, изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, можно считать, что матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид (3). Тогда матрица оператора $G' = G^2$ в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_1\mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2\mu_1 \\ \mu_3\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_4\mu_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стало быть, $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$ в силу леммы 4, а значит, G — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ в силу леммы 3. □

Лемма 5. *Пусть G — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и $\mathrm{ord}(\sigma_G) = 2$. Тогда существуют такие одномерные рациональные подпространства l_+^1, l_+^2, l_-^1 и l_-^2, что $Gl_+^1 = l_+^1$, $Gl_+^2 = l_+^2$, $Gl_-^1 = l_-^1$, $Gl_-^2 = l_-^2$ и $l_+^1 + l_+^2 + l_-^1 + l_-^2 = \mathbb{R}^4$. При этом подпространства l_+^1 и l_+^2 соответствуют собственному значению 1, а подпространства l_-^1 и l_-^2 соответствуют собственному значению -1.*

Доказательство. Изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, в силу леммы 4 можно считать, что существуют такие вещественные числа μ_1 и μ_2, что матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ \frac{1}{\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\chi_G(x) = (x-1)^2(x+1)^2$, то у оператора G есть двумерное инвариантное подпространство L_+, соответствующее собственному значению 1 и двумерное инвариантное подпространство L_-, соответствующее собственному значению -1. Покажем рациональность подпространств L_+ и L_-, из чего будет следовать утверждение леммы.

Поскольку подпространство L_+ совпадает с решением системы линейных уравнений

$$(G - I_4)\vec{x}^\top = \vec{0},$$

то фундаментальная система решений данной системы линейных уравнений имеет размерность 2. Рассмотрев в качестве значений свободных переменных наборы $(0,1)$ и $(1,0)$, мы определим два линейно-независимых рациональных решения данной системы, из чего следует рациональность L_+. Рациональность подпространства L_- доказывается аналогичным способом. □

Лемма 6. *Пусть G — собственная циклическая симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Тогда собственные значения оператора G равны 1, -1, i и $-i$. Более того, собственные подпространства l_+ (соответствующее собственному значению 1), l_- (соответствующее собственному значению -1) и L (соответствующее собственным значениям i и $-i$) являются рациональными. В частности, подпространство L не содержит собственных для G одномерных подпространств и для любого $\vec{v} \in L$ верно, что $G^2(\vec{v}) = -\vec{v}$.*

Доказательство. Изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, можно считать, что в силу леммы 3 существуют такие вещественные числа μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, что $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$ и матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид (2). Так как $\chi_G(x) = x^4 - \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$, то собственные значения оператора G равны 1, -1, i и $-i$, а значит, у G есть ровно два одномерных собственных подпространства и двумерное инвариантное подпространство, которое не содержит собственных для G одномерных подпространств. Обозначим через l_+ рациональное одномерное собственное подпространство оператора G, соответствующее собственному значению 1, через l_- — рациональное одномерное собственное подпространство оператора G, соответствующее собственному значению -1, а через L — двумерное инвариантное подпространство, соответствующее собственным значениям i и $-i$. Покажем рациональность подпространства L.

Поскольку $l_- + l_+ + L = \mathbb{R}^4$, то для любого вектора $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ существуют такие единственные векторы $\vec{p}(\vec{v}, l_-) \in l_-$, $\vec{p}(\vec{v}, l_+) \in l_+$ и $\vec{p}(\vec{v}, L) \in L$, что выполняется равенство

$$\vec{v} = \vec{p}(\vec{v}, l_-) + \vec{p}(\vec{v}, l_+) + \vec{p}(\vec{v}, L).$$

Заметим, что $\vec{p}\big(G^2(\vec{v}), L\big) = \vec{p}(-\vec{v}, L)$, $\vec{p}\big(G^2(\vec{v}), l_-\big) = \vec{p}(\vec{v}, l_-)$ и $\vec{p}\big(G^2(\vec{v}), l_+\big) = \vec{p}(\vec{v}, l_+)$ для любого вектора $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$. Таким образом, для любой точки $\vec{z} \in \mathbb{Z}^4 \backslash (l_+ + l_-)$ ненулевые целочисленные векторы $\vec{z} - G^2(\vec{z})$ и $G(\vec{z}) - G^3(\vec{z})$ лежат в двумерном подпространстве L. Эти два целочисленных вектора неколлинеарны, поскольку $G(\vec{z}) - G^3(\vec{z}) = G\big(\vec{z} - G^2(\vec{z})\big)$ и подпространство L не содержит собственных для оператора G одномерных подпространств. Итак, мы показали, что подпространство L рационально. $\square$

4. Геометрия собственных симметрий

Лемма 7. *Пусть G — собственная симметрия дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Пусть $F = G'$ (см. следствие 1) — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ (см. следствие 2). Тогда существуют $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\vec{z}_4 \in \mathbb{Z}^4$, такие что*

$$F(\vec{z}_1) = \vec{z}_3,\ F(\vec{z}_2) = \vec{z}_4,\ F(\vec{z}_3) = \vec{z}_1,\ F(\vec{z}_4) = \vec{z}_2$$

и выполняется хотя бы одно из следующих одиннадцати утверждений:

(1) *векторы $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;*
(2) *векторы $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\vec{z}_4$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;*
(3) *векторы $\vec{z}_1$, $\frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2)$, $\frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3)$, $\frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;*
(4) *векторы $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3)$, $\frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;*
(5) *векторы $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3)$, $\frac{1}{2}(\vec{z}_2 + \vec{z}_4)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;*
(6) *векторы $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 - \vec{z}_2)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;*
(7) *векторы $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) + \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4 - \vec{z}_3 - \vec{z}_2)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;*
(8) *векторы $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\frac{1}{2}(\vec{z}_2 + \vec{z}_4)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;*
(9) *векторы $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3)$, $\frac{1}{4}\vec{z}_1 + \frac{1}{2}\vec{z}_2 - \frac{1}{4}\vec{z}_3 + \frac{1}{2}\vec{z}_4$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;*
(10) *векторы $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3)$, $\frac{1}{2}\vec{z}_1 + \frac{1}{4}\vec{z}_2 + \frac{1}{2}\vec{z}_4$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;*
(11) *векторы $\vec{z}_1$, $\frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2)$, $\vec{z}_3$, $\frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 - \vec{z}_2)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$.*

Доказательство. Будем называть плоскость *рациональной*, если множество содержащихся в нем целых точек является (аффинной) решеткой ранга, равного размерности этой плоскости.

Рассмотрим для собственной симметрии F подпространства l_+^1, l_+^2, l_-^1 и l_-^2 из леммы 5 и положим $S = l_+^2 + l_-^1 + l_-^2$. Обозначим через S_1 ближайшую к S рациональную гиперплоскость, параллельную S и не совпадающую с S (любую из двух). Тогда $G(S_1) = S_1$. Также обозначим через $\vec{p}$ точку пересечения гиперплоскости S_1 и l_+^1, а через l и π прямую и плоскость, проходящие через точку $\vec{p}$ и параллельные l_+^2 и $L_- = l_-^1 + l_-^2$ соответственно. При этом $F(l) = l$, $F(\pi) = \pi$ и $F(\vec{p}) = \vec{p}$.

Плоскость π разделяет гиперплоскость S_1 на два множества S_1^+ и S_1^-. Пусть Q и R — рациональные плоскости ближайшие к π, параллельные π и не совпадающие с π, принадлежащие множествам S_1^+ и S_1^- соответственно. Отметим, что, вообще говоря, расстояния от π до Q и от π до R не обязательно равны. Положим $\vec{p}^Q = Q \cap l$ и $\vec{p}^R = R \cap l$. Построим точки $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\vec{z}_4$ при помощи следующей итерационной процедуры.

Для начала предположим, $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ — такая пара точек решетки $\mathbb{Z}^4$, что $\vec{v}_1 \in Q, \vec{v}_2 \in R$, векторы $\vec{v}_1 - \vec{p}^Q$ и $\vec{v}_2 - \vec{p}^R$ неколлинеарны. Тогда можно построить точки

$$\begin{aligned}
\vec{v}_3 &= F(\vec{v}_1) \in \mathbb{Z}^4 \cap Q, & \vec{v}_4 &= F(\vec{v}_2) \in \mathbb{Z}^4 \cap R,\\
\vec{v}_1^R &= \vec{v}_1 + (\vec{p}^R - \vec{p}^Q), & \vec{v}_3^R &= \vec{v}_3 + (\vec{p}^R - \vec{p}^Q),\\
\vec{v}_2^Q &= \vec{v}_2 + (\vec{p}^Q - \vec{p}^R), & \vec{v}_4^Q &= \vec{v}_4 + (\vec{p}^Q - \vec{p}^R),\\
\vec{v}_1^\pi &= \vec{v}_1 + (\vec{p} - \vec{p}^Q), & \vec{v}_3^\pi &= \vec{v}_3 + (\vec{p} - \vec{p}^Q),\\
\vec{v}_2^\pi &= \vec{v}_2 + (\vec{p} - \vec{p}^R), & \vec{v}_4^\pi &= \vec{v}_4 + (\vec{p} - \vec{p}^R).
\end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотренные точки определяют тройку параллелограммов $(\Delta^\pi, \Delta^Q, \Delta^R)$, где

$$\begin{gathered}
\Delta^\pi = \operatorname{conv}(\vec{v}_1^\pi, \vec{v}_2^\pi, \vec{v}_3^\pi, \vec{v}_4^\pi) \subset \pi,\\
\Delta^Q = \operatorname{conv}(\vec{v}_1, \vec{v}_2^Q, \vec{v}_3, \vec{v}_4^Q) \subset Q, \quad \Delta^R = \operatorname{conv}(\vec{v}_1^R, \vec{v}_2, \vec{v}_3^R, \vec{v}_4) \subset R.
\end{gathered} \tag{5}$$

Возьмем произвольную целочисленную точку $\vec{v}_{1,1} \in Q \setminus l$. Тогда существует такая целочисленная точка $\vec{v}_{1,2} \in R \setminus l$, что вектор $\vec{v}_{1,1} - \vec{p}^Q$ неколлинеарен вектору $\vec{v}_{1,2} - \vec{p}^R$.

Теперь предположим, мы построили такую пару точек $(\vec{v}_{j,1}, \vec{v}_{j,2})$ решетки $\mathbb{Z}^4$, что $\vec{v}_{j,1} \in Q, \vec{v}_{j,2} \in R$, векторы $\vec{v}_{j,1} - \vec{p}^Q$ и $\vec{v}_{j,2} - \vec{p}^R$ неколлинеарны. Положив $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\vec{v}_{j,1}, \vec{v}_{j,2})$, определим с помощью 4 точки $\vec{v}_{j,3} = \vec{v}_3$, $\vec{v}_{j,4} = \vec{v}_4$, $\vec{v}_{j,1}^R = \vec{v}_1^R$, $\vec{v}_{j,3}^R = \vec{v}_3^R$, $\vec{v}_{j,2}^Q = \vec{v}_2^Q$, $\vec{v}_{j,4}^Q = \vec{v}_4^Q$, $\vec{v}_{j,1}^\pi = \vec{v}_1^\pi$, $\vec{v}_{j,2}^\pi = \vec{v}_2^\pi$, $\vec{v}_{j,3}^\pi = \vec{v}_3^\pi$, $\vec{v}_{j,4}^\pi = \vec{v}_4^\pi$. Также, с помощью 5 определим параллелограммы $\Delta_j^\pi = \Delta^\pi, \Delta_j^Q = \Delta^Q, \Delta_j^R = \Delta^R$. Кроме того, положим $\vec{p}_{j,1}^R = \frac{1}{2}(\vec{v}_{j,1}^R + \vec{p}^R)$, $\vec{p}_{j,3}^R = \frac{1}{2}(\vec{v}_{j,3}^R + \vec{p}^R)$, $\vec{p}_{j,2}^Q = \frac{1}{2}(\vec{v}_{j,2}^Q + \vec{p}^Q)$ и $\vec{p}_{j,4}^Q = \frac{1}{2}(\vec{v}_{j,4}^R + \vec{p}^Q)$.

Если на плоскостях Q и R существует целая точка, не совпадающая с точками $\vec{p}^Q$, $\vec{p}^R$, $\vec{p}_{j,1}^R$, $\vec{p}_{j,3}^R$, $\vec{p}_{j,2}^Q$, $\vec{p}_{j,4}^Q$ и не с какой из вершин параллелограммов Δ_j^Q и Δ_j^R, при этом лежащая в одном из этих параллелограммов (без ограничения общности, в Δ_j^Q), то обозначим ее через $\vec{v}$. Иначе будем называть пару точек $(\vec{v}_{j,1}, \vec{v}_{j,2})$ *допустимой парой для оператора G и цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$*.

Предположим, что вектор $\vec{v} - \vec{p}^Q$ неколлинеарен вектору $\vec{v}_{j,2} - \vec{p}^R$. Тогда положим $\vec{v}_{j+1,1} = \vec{v}$, $\vec{v}_{j+1,2} = \vec{v}_{j,2}$.

Теперь предположим, что вектор $\vec{v} - \vec{p}^Q$ коллинеарен вектору $\vec{v}_{j,2} - \vec{p}^R$. Заметим, что $\vec{v} - F(\vec{v}) = 2(\vec{v} - \vec{p}^Q)$, а значит, $|\vec{v} - F(\vec{v})| < |\vec{v}_{j,4} - \vec{v}_{j,2}|$ и векторы $\pm\big(\vec{v} - F(\vec{v})\big)$ не совпадают ни с каким из векторов $\vec{v}_{j,4} - \vec{v}_{j,2}$ и $\vec{p}^R - \vec{v}_{j,2} = \vec{p}_{j,4}^Q - \vec{p}_{j,2}^Q$. Таким образом, либо точка $\vec{v}_{j,2} + \big(\vec{v} - F(\vec{v})\big)$, либо точка $\vec{v}_{j,2} - (\vec{v} - F(\vec{v}))$ лежит в параллелограмме Δ_j^R и не совпадает с точками $\vec{p}^R$, $\vec{p}_{j,1}^R$, $\vec{p}_{j,3}^R$ и не с какой из вершин параллелограмма Δ_j^R. Обозначим эту точку через $\vec{v}_{j+1,2}$ и положим $\vec{v}_{j+1,1} = \vec{v}_{j,1}$. Заметим, что вектор $\vec{v}_{j+1,1} - \vec{p}^Q$ неколлинеарен вектору $\vec{v}_{j+1,2} - \vec{p}^R$.

Последовательность пар $(\vec{v}_{j,1}, \vec{v}_{j,2})$ конечна, так как, по построению

$$\Delta_j^\pi \subset \Delta_{j+1}^\pi, \quad \Delta_j^Q \subset \Delta_{j+1}^Q, \quad \Delta_j^R \subset \Delta_{j+1}^R.$$

Пусть $(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = (\vec{v}_{k,1}, \vec{v}_{k,2})$ — последний элемент такой последовательности, то есть $(\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ — допустимая пара для оператора G и цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Положив $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$, определим с помощью 4 точки $\vec{z}_3 = \vec{v}_3$, $\vec{z}_4 = \vec{v}_4$, $\vec{z}_1^R = \vec{v}_1^R$, $\vec{z}_3^R = \vec{v}_3^R$, $\vec{z}_2^Q = \vec{v}_2^Q$, $\vec{z}_4^Q = \vec{v}_4^Q$,

$\vec{z}_1^\pi = \vec{v}_1^\pi$, $\vec{z}_2^\pi = \vec{v}_2^\pi$, $\vec{z}_3^\pi = \vec{v}_3^\pi$, $\vec{z}_4^\pi = \vec{v}_4^\pi$. Также, с помощью 5 определим параллелограммы $\Delta_k^\pi = \Delta^\pi, \Delta_k^Q = \Delta^Q, \Delta_k^R = \Delta^R$. Кроме того, положим $\vec{p}_1^R = \frac{1}{2}(\vec{z}_1^R + \vec{p}^R)$, $\vec{p}_3^R = \frac{1}{2}(\vec{z}_3^R + \vec{p}^R)$, $\vec{p}_2^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_2^Q + \vec{p}^Q)$ и $\vec{p}_4^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_4^R + \vec{p}^Q)$.

Покажем, что множество $(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4$ совпадает с одним из множеств (с точностью до перенумерации точек $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4$)

$$\{\vec{z}_1,\, \vec{z}_2^Q,\, \vec{z}_3,\, \vec{z}_4^Q,\, \vec{z}_1^R,\, \vec{z}_2,\, \vec{z}_3^R,\, \vec{z}_4,\, \vec{p}\},$$

$$\{\vec{z}_1,\, \vec{z}_3,\, \vec{z}_2,\, \vec{z}_4\},$$

$$\{\vec{z}_1,\, \vec{z}_3,\, \vec{p}^Q,\, \vec{z}_2,\, \vec{z}_4,\, \vec{p}_1^R,\, \vec{p}_3^R\},$$

$$\{\vec{z}_1,\, \vec{z}_2^Q,\, \vec{z}_3,\, \vec{z}_4^Q,\, \vec{z}_1^R,\, \vec{z}_2,\, \vec{z}_3^R,\, \vec{z}_4,\, \vec{p}^Q,\, \vec{p}^R,\, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2},\, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2},\, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2},\, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\},$$

$$\{\vec{z}_1,\, \vec{z}_2^Q,\, \vec{z}_3,\, \vec{z}_4^Q,\, \vec{z}_1^R,\, \vec{z}_2,\, \vec{z}_3^R,\, \vec{z}_4,\, \vec{p}^Q,\, \vec{p}^R,\, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2},\, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{p}}{2}\},$$

$$\{\vec{z}_1,\, \vec{z}_2^Q,\, \vec{z}_3,\, \vec{z}_4^Q,\, \vec{z}_1^R,\, \vec{z}_2,\, \vec{z}_3^R,\, \vec{z}_4,\, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2},\, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}\},$$

$$\{\vec{z}_1,\, \vec{z}_2^Q,\, \vec{z}_3,\, \vec{z}_4^Q,\, \vec{z}_1^R,\, \vec{z}_2,\, \vec{z}_3^R,\, \vec{z}_4,\, \vec{z}_1^\pi,\, \vec{z}_2^\pi,\, \vec{z}_3^\pi,\, \vec{z}_4^\pi\},$$

$$\{\vec{z}_1,\, \vec{z}_3,\, \vec{z}_2,\, \vec{z}_4, \vec{p}^R\},$$

$$\{\vec{z}_1,\, \vec{z}_2^Q,\, \vec{z}_3,\, \vec{z}_4^Q,\, \vec{z}_1^R,\, \vec{z}_2,\, \vec{z}_3^R,\, \vec{z}_4\},$$

$$\{\vec{p},\, \vec{z}_1,\, \vec{z}_2^Q,\, \vec{z}_3,\, \vec{z}_4^Q,\, \vec{z}_1^R,\, \vec{z}_2,\, \vec{z}_3^R,\, \vec{z}_4,\, \vec{p}^Q,\, \vec{p}^R,\, \vec{z}_1^\pi,\, \vec{z}_2^\pi,\, \vec{z}_3^\pi,\, \vec{z}_4^\pi\},$$

$$\{\vec{z}_1,\, \vec{z}_2^Q,\, \vec{z}_3,\, \vec{z}_4^Q,\, \vec{z}_1^R,\, \vec{z}_2,\, \vec{z}_3^R,\, \vec{z}_4,\, \vec{p}^Q,\, \vec{p}^R\}.$$

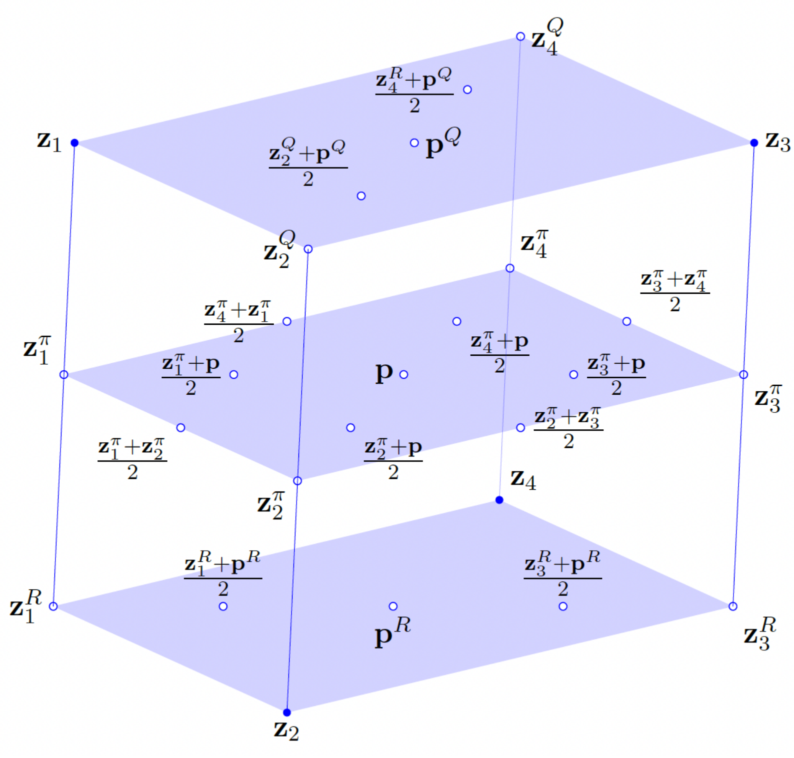

Рис. 1: Возможное расположение точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в параллелограммах из построенной тройки $(\Delta_k^\pi, \Delta_k^Q, \Delta_k^R)$

Рассмотрим параллелограмм Δ_k^Q. Поскольку $F(\vec{p}_2^Q) = \vec{p}_4^Q$, $F(\vec{p}_4^Q) = \vec{p}_2^Q$, $F(\vec{z}_2^Q) = \vec{z}_4^Q$ и $F(\vec{z}_4^Q) = \vec{z}_2^Q$, то $\vec{p}_2^Q \in \mathbb{Z}^4 \Leftrightarrow \vec{p}_4^Q \in \mathbb{Z}^4$ и $\vec{z}_2^Q \in \mathbb{Z}^4 \Leftrightarrow \vec{z}_4^Q \in \mathbb{Z}^4$. Заметим, что если $\vec{p}_2^Q \in \mathbb{Z}^4$ и $\vec{p}_4^Q \in \mathbb{Z}^4$, то точки $\vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q, \vec{p}^Q$ не принадлежат решетке $\mathbb{Z}^4$ в силу способа построения параллелограмма Δ_k^R. Таким образом, множество $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4$ совпадает с одним из множеств

$$\{\vec{z}_1, \vec{z}_3\}, \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q\}, \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{p}^Q\}, \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q, \vec{p}^Q\}, \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{p}_2^Q, \vec{p}_4^Q\}.$$

Аналогично, множество $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ совпадает с одним из множеств

$$\{\vec{z}_2, \vec{z}_4\}, \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_1^R, \vec{z}_3^R\}, \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{p}^R\}, \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_1^R, \vec{z}_3^R, \vec{p}^R\}, \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{p}_1^R, \vec{p}_3^R\}.$$

Рассмотрим следующие случаи:

A) $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3\}$. Если $\vec{z}_1^R \in \mathbb{Z}^4$ и $\vec{z}_3^R \in \mathbb{Z}^4$, то $\vec{z}_2^Q = \vec{z}_1 + (\vec{z}_2 - \vec{z}_1^R) \in \mathbb{Z}^4$ и $\vec{z}_4^Q \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит рассматриваемому случаю. Если $\vec{p}_1^R \in \mathbb{Z}^4$ и $\vec{p}_3^R \in \mathbb{Z}^4$, то $\vec{p}^Q = \vec{z}_1 + (\vec{p}_3^R - \vec{p}_1^R) \in \mathbb{Z}^4$, что также противоречит рассматриваемому случаю. Таким образом, существует ровно два подслучая:

A.1) $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4\}$. Этот случай, в свою очередь, разбивается на два подсулчая:

A.1.a) Плоскость π рациональная. Тогда, плоскости Q и R равноудалены от π. Покажем, что параллелограмм Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. Пусть это не так. Будем считать, без ограничения общности, что существует точка $\vec{w} \in \mathbb{Z}^4$, лежащая в параллелограмме $\mathrm{conv}(\vec{z}_1^\pi, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2})$. Если $\vec{w} \notin \{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}$, то $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_1) \in \Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ и $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_1) \notin \{\vec{z}_2, \vec{z}_4\}$, чего не может быть. Если $\vec{w} = \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}$, то $\frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2} = F(\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, а значит, $\vec{z}_4^Q = \vec{z}_1 + (\frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2} - \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, чего также не может быть. Аналогично показывается, что случай $\vec{w} = \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}$ невозможен, а значит, Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. Поскольку $\mathrm{conv}\big(\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_3 + (\vec{z}_4 - \vec{z}_2)\big) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_3 + (\vec{z}_4 - \vec{z}_2)\}$, то в параллелограмме $\mathrm{conv}\big(\vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{z}_1^\pi + (\vec{z}_1^\pi - \vec{z}_4^\pi), \vec{z}_2^\pi + (\vec{z}_2^\pi - \vec{z}_3^\pi)\big)$ должна существовать точка $\vec{y} \in \mathbb{Z}^4$, а значит, по доказанному выше, точка $\vec{y}$ лежит в параллелограмме $\mathrm{conv}\big(\vec{z}_2^\pi, \vec{z}_1^\pi, \vec{z}_1^\pi + (\vec{z}_1^\pi - \vec{z}_4^\pi), \vec{z}_2^\pi + (\vec{z}_2^\pi - \vec{z}_3^\pi)\big)$. Но тогда $\vec{z}_3 + (\vec{z}_3 - \vec{y}) \in \mathbb{Z}^4$ и $\vec{z}_3 + (\vec{z}_3 - \vec{y}) \in \Delta_k^\pi$, чего, как мы показали, не может быть.

A.1.б) (будет соответствовать утверждению (2)) Плоскость π не является рациональной плоскостью. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1,\ \vec{z}_3,\ \vec{z}_2,\ \vec{z}_4\},$$

набор векторов $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\vec{z}_4$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (2).

A.2) $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{p}^R\}$. Этот случай, в свою очередь, разбивается на два подсулчая:

A.2.a) Плоскость π рациональная. Тогда, плоскости Q и R равноудалены от π. Покажем, что параллелограмм Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. Пусть это не так. Можно считать, что существует точка $\vec{w} \in \mathbb{Z}^4$, лежащая либо в параллелограмме $\mathrm{conv}(\vec{z}_1^\pi, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2})$, либо в параллелограмме $\mathrm{conv}(\vec{z}_2^\pi, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2})$. Рассмотрим случай $\vec{w} \in \mathrm{conv}(\vec{z}_1^\pi, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2})$. Если $\vec{w} \notin \{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}\}$, то $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_1) \in \Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ и $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_1) \notin \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{p}^R\}$, чего не может быть. Если $\vec{w} = \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}$, то $\frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{p}}{2} = F(\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, а значит, $\vec{p}^Q = \vec{z}_1 + (\frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{p}}{2} - \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, чего не может быть. Если $\vec{w} = \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}$, то $\frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2} = F(\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, а значит, $\vec{z}_4^Q = \vec{z}_1 + (\frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2} - \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, чего также не может быть. Аналогично показывается, что случай $\vec{w} = \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}$ невозможен, а значит, случай $\vec{w} \in \mathrm{conv}(\vec{z}_1^\pi, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2})$ невозможен. Теперь рассмотрим случай $\vec{w} \in \mathrm{conv}(\vec{z}_2^\pi, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2})$. Если $\vec{w} \notin \{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}\}$, то $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_2) \in \Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4$ и $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_2) \notin \{\vec{z}_1, \vec{z}_3\}$, чего не может быть. По доказанному выше, случаи $\vec{w} = \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}$ и $\vec{w} = \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}$ также невозможны, а значит, Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. Поскольку $\mathrm{conv}\big(\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_3 + (\vec{z}_4 - \vec{p}^R)\big) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_3 + (\vec{z}_4 - \vec{p}^R)\}$, то в параллелограмме

$\mathrm{conv}\big(\vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{z}_1^\pi + (\vec{z}_1^\pi - \vec{z}_4^\pi), \vec{z}_2^\pi + (\vec{z}_2^\pi - \vec{z}_3^\pi)\big)$ должна существовать точка $\vec{y} \in \mathbb{Z}^4$, а значит, по доказанному выше, точка $\vec{y}$ лежит в параллелограмме $\mathrm{conv}\big(\vec{z}_2^\pi, \vec{z}_1^\pi, \vec{z}_1^\pi + (\vec{z}_1^\pi - \vec{z}_4^\pi), \vec{z}_2^\pi + (\vec{z}_2^\pi - \vec{z}_3^\pi)\big)$. Но тогда $\vec{z}_3 + (\vec{z}_3 - \vec{y}) \in \mathbb{Z}^4$ и $\vec{z}_3 + (\vec{z}_3 - \vec{y}) \in \Delta_k^\pi$, чего, как мы показали, не может быть.

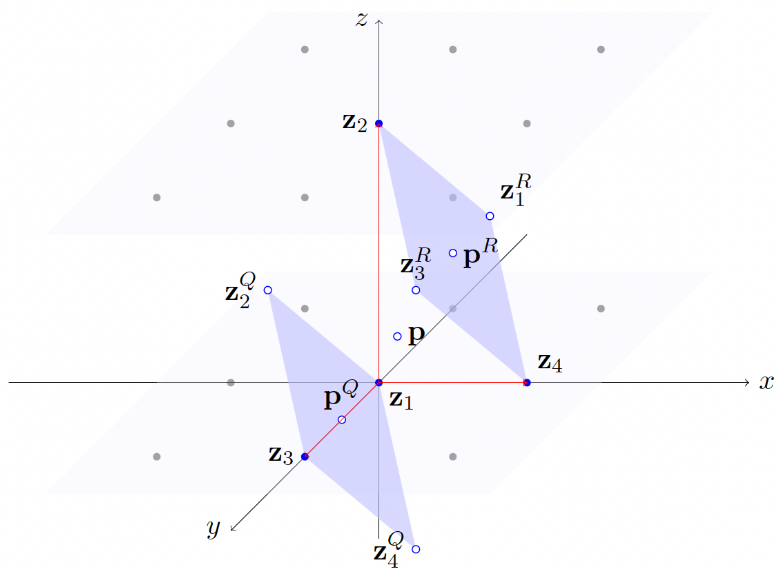

Рис. 2: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **А.1.б** леммы 7

А.2.б) (будет соответствовать утверждению (8)) Плоскость π не является рациональной плоскостью. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1,\, \vec{z}_3,\, \vec{z}_2,\, \vec{z}_4, \vec{p}^R\},$$

набор векторов $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\vec{p}^R = \frac{1}{2}(\vec{z}_2 + \vec{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (8).

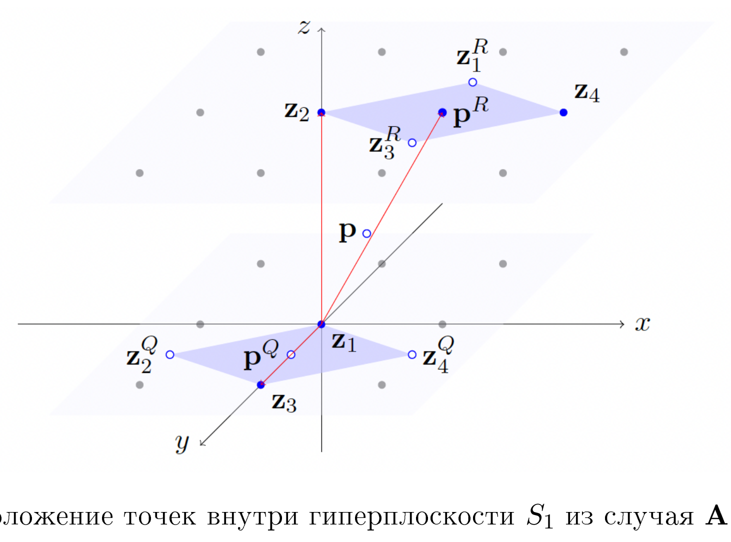

Рис. 3: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **А.2.б** леммы 7

Б) $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q\}$. Заметим, что случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **А**. Если $\vec{p}^R \in \mathbb{Z}^4$, то $\vec{p}^Q = \vec{z}_2^Q + (\vec{p}^R - \vec{z}_2) \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит рассматриваемому случаю. Если $\vec{p}_1^R \in \mathbb{Z}^4$ и $\vec{p}_3^R \in \mathbb{Z}^4$, то $\vec{p}^Q = \vec{z}_1 + (\vec{p}_3^R - \vec{p}_1^R) \in \mathbb{Z}^4$, что также противоречит рассматриваемому случаю. Таким образом, существует ровно один подслучай:

Б.1) $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_1^R, \vec{z}_3^R\}$. Этот случай, в свою очередь, разбивается на два подслучая:

Б.1.а) Плоскость π рациональная. Тогда, плоскости Q и R равноудалены от π. Поскольку $\operatorname{conv}\big(\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_3 + (\vec{z}_4 - \vec{z}_3^R)\big) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_3 + (\vec{z}_4 - \vec{z}_3^R)\}$, то в параллелограмме Δ_k^π должна существовать хотя бы одна точка решетки $\mathbb{Z}^4$. Пусть $\vec{w} \in \Delta_k^\pi \cap \mathbb{Z}^4$. Покажем, что $\vec{w} \in \{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}$. Предположим, что это не так. Можно считать, что либо

$$\vec{w} \in \operatorname{conv}(\vec{z}_1^\pi, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}),$$

либо

$$\vec{w} \in \operatorname{conv}(\vec{z}_2^\pi, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}).$$

Если $\vec{w} \in \operatorname{conv}(\vec{z}_1^\pi, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2})$, то $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_1) \in \Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ и $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_1) \notin \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_1^R, \vec{z}_3^R\}$, чего не может быть. Если $\vec{w} \in \operatorname{conv}(\vec{z}_2^\pi, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2})$, то $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_2) \in \Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4$ и $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_2) \notin \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q\}$, чего не может быть. Далее рассмотрим подслучаи:

Б.1.а.1) (будет соответствовать утверждению (7)) Пусть $\vec{w} \in \{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi\}$. В этом случае каждая из точек множества $\{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi\}$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. При этом, так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q\}$, то никакая из точек множества $\{\vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1,\ \vec{z}_2^Q,\ \vec{z}_3,\ \vec{z}_4^Q,\ \vec{z}_1^R,\ \vec{z}_2,\ \vec{z}_3^R,\ \vec{z}_4,\ \vec{z}_1^\pi,\ \vec{z}_2^\pi,\ \vec{z}_3^\pi,\ \vec{z}_4^\pi\}$$

и, так как плоскости Q и R равноудалены от π, набор векторов $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\vec{z}_1^\pi = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) + \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4 - \vec{z}_3 - \vec{z}_2)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (7).

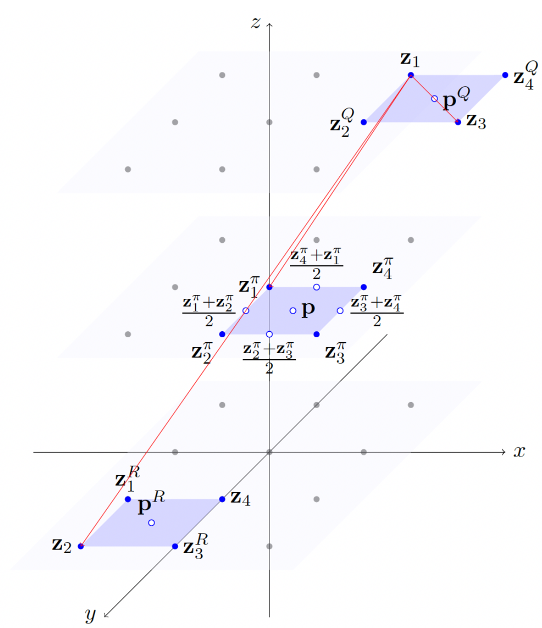

Рис. 4: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Б.1.а.1** леммы 7

Б.1.а.2) (будет соответствовать утверждению (1)) Пусть $\vec{w} = \vec{p}$. В силу доказательства случая **Б.1.а.1** никакая из точек множества $\{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Кроме того, так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q\}$, то никакая из точек множества $\{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1,\ \vec{z}_2^Q,\ \vec{z}_3,\ \vec{z}_4^Q,\ \vec{z}_1^R,\ \vec{z}_2,\ \vec{z}_3^R,\ \vec{z}_4,\ \vec{p}\}$$

и, так как плоскости Q и R равноудалены от π, набор векторов $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\vec{p} = \frac{1}{4}(\vec{z}_1+\vec{z}_2+\vec{z}_3+\vec{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (1).

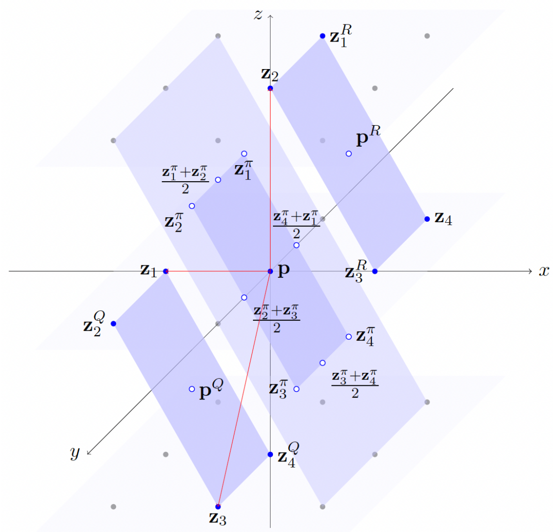

Рис. 5: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Б.1.а.2** леммы 7

Б.1.а.3) (будет соответствовать утверждению (11)) Пусть $\vec{w} \in \{\frac{\vec{z}_1^\pi+\vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi+\vec{z}_4^\pi}{2}\}$. В этом случае каждая из точек множества $\{\frac{\vec{z}_1^\pi+\vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi+\vec{z}_4^\pi}{2}\}$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. В силу доказательства случаев **Б.1.а.1** и **Б.1.а.2** никакая из точек множества $\{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{p}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Кроме того, так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q\}$, то никакая из точек множества $\{\frac{\vec{z}_2^\pi+\vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi+\vec{z}_1^\pi}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1,\, \vec{z}_2^Q,\, \vec{z}_3,\, \vec{z}_4^Q,\, \vec{z}_1^R,\, \vec{z}_2,\, \vec{z}_3^R,\, \vec{z}_4,\, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2},\, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}\}$$

и, так как плоскости Q и R равноудалены от π, набор векторов $\vec{z}_1$, $\frac{1}{2}(\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi) = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2)$, $\vec{z}_3$, $\vec{z}_4^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 - \vec{z}_2)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (11).

Б.1.б) (будет соответствовать утверждению (6)) Плоскость π не является рациональной плоскостью. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1,\, \vec{z}_2^Q,\, \vec{z}_3,\, \vec{z}_4^Q,\, \vec{z}_1^R,\, \vec{z}_2,\, \vec{z}_3^R,\, \vec{z}_4\},$$

набор векторов $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\vec{z}_4^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 - \vec{z}_2)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (6).

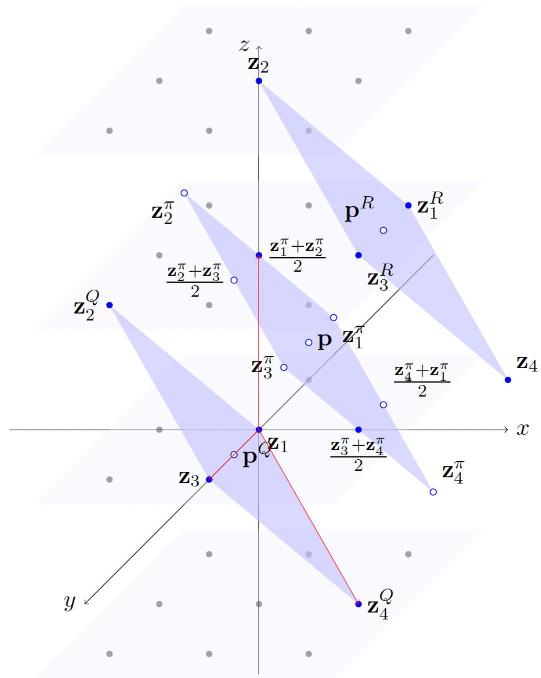

Рис. 6: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Б.1.а.3** леммы 7

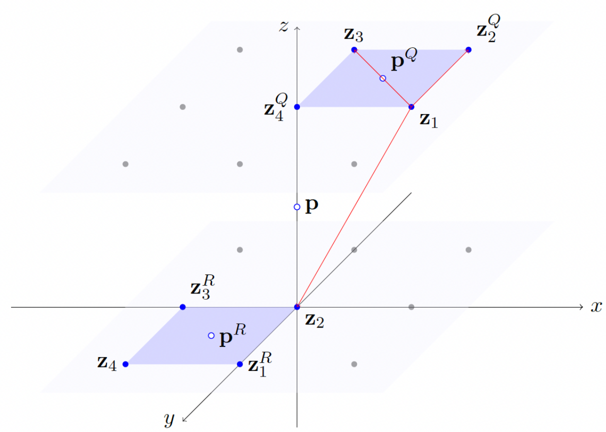

Рис. 7: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Б.1.б** леммы 7

В) $\Delta_k^Q\cap\mathbb{Z}^4=\{\vec z_1,\vec z_3,\vec p^Q\}$. Заметим, что случай $\Delta_k^R\cap\mathbb{Z}^4=\{\vec z_2,\vec z_4\}$ с точностью до перестановки индексов полностью эквивалентен пункту **А.2**. Кроме того, случай $\Delta_k^R\cap\mathbb{Z}^4=\{\vec z_2,\vec z_4,\vec z_1^R,\vec z_3^R\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **Б**. Если $\vec p^R\in\mathbb{Z}^4$, то $\vec z_2^Q=\vec p^Q+(\vec z_2-\vec p^R)\in\mathbb{Z}^4$, что противоречит рассматриваемому случаю. Таким образом, существует ровно один подслучай:

В.1) $\Delta_k^R\cap\mathbb{Z}^4=\{\vec z_2,\vec z_4,\vec p_1^R,\vec p_3^R\}$. Этот случай, в свою очередь, разбивается на два подслучая:

В.1.а) Плоскость π рациональная. Тогда, плоскости Q и R равноудалены от π. Покажем, что параллелограмм Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. Пусть это не так. Можно считать, что существует точка $\vec w\in\mathbb{Z}^4$, лежащая либо в параллелограмме $\operatorname{conv}(\vec z_1^\pi,\frac{\vec z_1^\pi+\vec z_2^\pi}{2},\vec p,\frac{\vec z_4^\pi+\vec z_1^\pi}{2})$, либо в параллелограмме $\operatorname{conv}(\vec z_2^\pi,\frac{\vec z_2^\pi+\vec z_3^\pi}{2},\vec p,\frac{\vec z_1^\pi+\vec z_2^\pi}{2})$. Рассмотрим случай $\vec w\in\operatorname{conv}(\vec z_1^\pi,\frac{\vec z_1^\pi+\vec z_2^\pi}{2},\vec p,\frac{\vec z_4^\pi+\vec z_1^\pi}{2})$. Если $\vec w\notin\{\frac{\vec z_1^\pi+\vec z_2^\pi}{2},\frac{\vec z_4^\pi+\vec z_1^\pi}{2},\frac{3\vec z_1^\pi+\vec p}{4},\frac{\vec z_1^\pi+3\vec p}{4}\}$, то $\vec w+(\vec w-\vec z_1)\in\Delta_k^R\cap\mathbb{Z}^4$ и $\vec w+(\vec w-\vec z_1)\notin$

$\notin \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{p}_1^R, \vec{p}_3^R\}$, чего не может быть. Если $\vec{w} = \frac{\vec{z}_1^\pi+\vec{z}_2^\pi}{2}$, то $\frac{\vec{z}_3^\pi+\vec{z}_4^\pi}{2} = F(\frac{\vec{z}_1^\pi+\vec{z}_2^\pi}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, а значит, $\vec{z}_4^Q = \vec{z}_1 + (\frac{\vec{z}_3^\pi+\vec{z}_4^\pi}{2} - \frac{\vec{z}_1^\pi+\vec{z}_2^\pi}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, чего также не может быть. Аналогично показывается, что случай $\vec{w} = \frac{\vec{z}_1^\pi+\vec{z}_4^\pi}{2}$ невозможен. Если $\vec{w} = \frac{3\vec{z}_1^\pi+\vec{p}}{4}$, то $\frac{\vec{z}_3^\pi+3\vec{p}}{4} = \frac{3\vec{z}_1^\pi+\vec{p}}{4} + (\vec{p}_3^R - \vec{p}_3^R) \in \mathbb{Z}^4$, а значит, $\frac{\vec{z}_1^\pi+3\vec{p}}{4} = F(\vec{w}) \in \mathbb{Z}^4$. Тогда $\vec{p}^R = \vec{p}_1^R + (\frac{\vec{z}_3^\pi+3\vec{p}}{4} - \frac{\vec{z}_1^\pi+3\vec{p}}{4}) \in \mathbb{Z}^4$, чего не может быть. Если $\vec{w} = \frac{\vec{z}_1^\pi+3\vec{p}}{4}$, то $\frac{\vec{z}_3^\pi+3\vec{p}}{4} = F(\vec{w}) \in \mathbb{Z}^4$, и вновь получаем $\vec{p}^R = \vec{p}_1^R + (\frac{\vec{z}_3^\pi+3\vec{p}}{4} - \frac{\vec{z}_1^\pi+3\vec{p}}{4}) \in \mathbb{Z}^4$, чего не может быть. Теперь рассмотрим случай $\vec{w} \in \operatorname{conv}(\vec{z}_2^\pi, \frac{\vec{z}_2^\pi+\vec{z}_3^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi+\vec{z}_2^\pi}{2})$. Если $\vec{w} \notin \{\frac{\vec{z}_1^\pi+\vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi+\vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi+\vec{p}}{2}\}$, то $\vec{w}+(\vec{w}-\vec{z}_2) \in \Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4$ и $\vec{w}+(\vec{w}-\vec{z}_2) \notin \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{p}^Q\}$, чего не может быть. По доказанному выше, случаи $\vec{w} = \frac{\vec{z}_1^\pi+\vec{z}_2^\pi}{2}$ и $\vec{w} = \frac{\vec{z}_2^\pi+\vec{z}_3^\pi}{2}$ невозможны. Если $\vec{w} = \frac{\vec{z}_2^\pi+\vec{p}}{2}$, то $\frac{\vec{z}_4^\pi+\vec{p}}{2} = F(\vec{w}) \in \mathbb{Z}^4$, а значит, $\vec{p}^R = \vec{z}_2 + (\frac{\vec{z}_4^\pi+\vec{p}}{2} - \frac{\vec{z}_2^\pi+\vec{p}}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, чего не может быть. И так, параллелограмм Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. С другой стороны, параллелограмм $\operatorname{conv}(\vec{z}_2^\pi, \frac{\vec{z}_1^\pi+\vec{p}}{2}, \vec{z}_4^\pi, \frac{\vec{z}_1^\pi+\vec{p}}{2}) \subset \Delta_k^\pi$ должен содержать хотя бы одну точку решетки $\mathbb{Z}^4$, поскольку $\operatorname{conv}(\vec{z}_2, \vec{p}_1^R, \vec{z}_4, \vec{p}_3^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{p}_1^R, \vec{z}_4, \vec{p}_3^R)\}$. Таким образом, данный случай невозможен.

В.1.б) (будет соответствовать утверждению (9)) Плоскость π не является рациональной плоскостью. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1,\, \vec{z}_3,\, \vec{p}^Q,\, \vec{z}_2,\, \vec{z}_4,\, \vec{p}_1^R,\, \vec{p}_3^R\},$$

набор векторов $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{p}^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_3)$, $\vec{p}_1^R = \vec{p}^R + (\frac{1}{2}(\vec{p}^Q+\vec{z}_3)-\vec{z}_3) = \frac{1}{2}(\vec{z}_2+\vec{z}_4)+(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_3)+\vec{z}_3)- - \vec{z}_3) = \frac{1}{4}\vec{z}_1 + \frac{1}{2}\vec{z}_2 - \frac{1}{4}\vec{z}_3 + \frac{1}{2}\vec{z}_4$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (9).

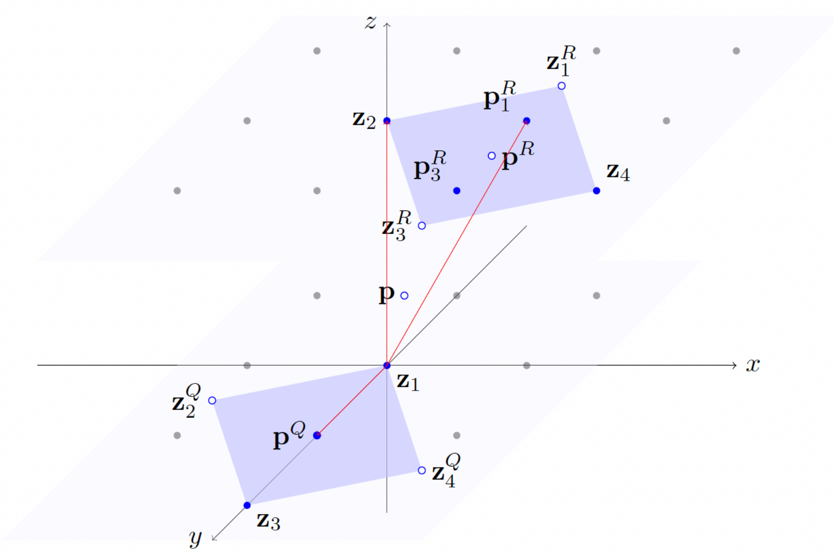

Рис. 8: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **В.1.б** леммы 7

Г) $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q, \vec{p}^Q\}$. Заметим, что случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **А**. Также случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_1^R, \vec{z}_3^R\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **Б**. Кроме того, случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{p}^R\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **В**. При этом $\vec{z}_1^R = \vec{z}_2 + (\vec{z}_1 - \vec{z}_2^Q) \in \mathbb{Z}^4$. Таким образом, существует ровно один подслучай:

Г.1) $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_1^R, \vec{z}_3^R, \vec{p}^R\}$. Этот случай, в свою очередь, разбивается на два подслучая:

Г.1.а) Плоскость π рациональная. Тогда, плоскости Q и R равноудалены от π. Поскольку $\{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q\} \subset \Delta_k^Q$, то в параллелограмме Δ_k^π должна существовать хотя бы одна точка решетки $\mathbb{Z}^4$. Пусть $\vec{w} \in \Delta_k^\pi \cap \mathbb{Z}^4$. Покажем, что

$$\vec{w} \in \{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{p}}{2}\}.$$

Предположим, что это не так. Можно считать, что $\vec{w} \in \operatorname{conv}(\vec{z}_1^\pi, \frac{\vec{z}_1^\pi+\vec{z}_2^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_4^\pi+\vec{z}_1^\pi}{2})$. Тогда $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_1) \in \Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ и $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_1) \notin \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_1^R, \vec{z}_3^R, \vec{p}^R\}$, чего не может быть. Далее рассмотрим подслучаи:

Г.1.а.1) (будет соответствовать утверждению (3)) Предположим, что

$$\vec{w} \in \{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}.$$

В этом случае каждая из точек множества

$$\{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}$$

принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. При этом, так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q, \vec{p}^Q\}$, то никакая из точек множества

$$\{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{p}}{2}\}$$

не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 =$$

$$\{\vec{z}_1,\ \vec{z}_2^Q,\ \vec{z}_3,\ \vec{z}_4^Q,\ \vec{z}_1^R,\ \vec{z}_2,\ \vec{z}_3^R,\ \vec{z}_4,\ \vec{p}^Q,\ \vec{p}^R,\ \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2},\ \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2},\ \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2},\ \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}$$

и, так как плоскости Q и R равноудалены от π, набор векторов $\vec{z}_1$, $\frac{\vec{z}_1^\pi+\vec{z}_2^\pi}{2} = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2)$, $\vec{p}^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3)$, $\frac{\vec{z}_4^\pi+\vec{z}_1^\pi}{2} = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (3).

Г.1.а.2) (будет соответствовать утверждению (4)) Предположим, что

$$\vec{w} \in \{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{p}\}.$$

В этом случае каждая из точек множества $\{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{p}\}$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. В силу доказательства случая **Г.1.а.1** никакая из точек множества $\{\frac{\vec{z}_1^\pi+\vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi+\vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi+\vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi+\vec{z}_1^\pi}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Кроме того, так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q, \vec{p}^Q\}$, то никакая из точек множества $\{\frac{\vec{z}_1^\pi+\vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi+\vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi+\vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi+\vec{p}}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{p},\ \vec{z}_1,\ \vec{z}_2^Q,\ \vec{z}_3,\ \vec{z}_4^Q,\ \vec{z}_1^R,\ \vec{z}_2,\ \vec{z}_3^R,\ \vec{z}_4,\ \vec{p}^Q,\ \vec{p}^R,\ \vec{z}_1^\pi,\ \vec{z}_2^\pi,\ \vec{z}_3^\pi,\ \vec{z}_4^\pi\}$$

и, так как плоскости Q и R равноудалены от π, набор векторов $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{p}^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3)$, $\vec{p} = \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (4).

Г.1.а.3) (будет соответствовать утверждению (10)) Предположим, что $\vec{w} \in \{\frac{\vec{z}_1^\pi+\vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi+\vec{p}}{2}\}$. В силу доказательства случаев **Г.1.а.1** и **Г.1.а.2** никакая из точек множества

$$\{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}, \vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{p}\}$$

не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Кроме того, так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q, \vec{p}^Q\}$, то никакая из точек множества $\{\frac{\vec{z}_2^\pi+\vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi+\vec{p}}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1,\ \vec{z}_2^Q,\ \vec{z}_3,\ \vec{z}_4^Q,\ \vec{z}_1^R,\ \vec{z}_2,\ \vec{z}_3^R,\ \vec{z}_4,\ \vec{p}^Q,\ \vec{p}^R,\ \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2},\ \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{p}}{2}\}$$

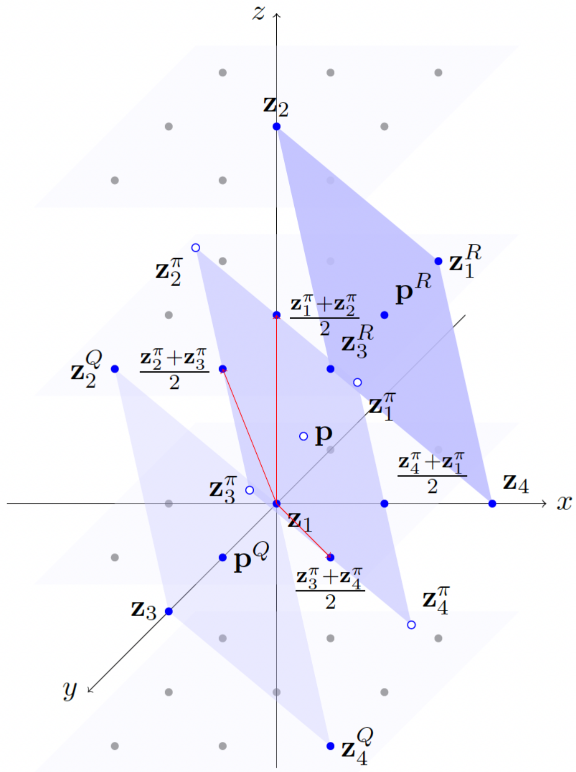

Рис. 9: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Г.1.а.1** леммы 7

и, так как плоскости Q и R равноудалены от π, набор векторов $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{p}^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3)$, $\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2} = \frac{1}{2}\vec{z}_1 + \frac{1}{4}\vec{z}_2 + \frac{1}{4}\vec{z}_4$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (10).

Г.1.а.4) Пусть $\vec{w} \in \{\frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{p}}{2}\}$. Заметим, что этот случай с точностью до перестановки индексов полностью эквивалентен пункту **Г.1.а.3**.

Г.1.б) (будет соответствовать утверждению (5)) Плоскость π не является рациональной плоскостью. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1,\ \vec{z}_2^Q,\ \vec{z}_3,\ \vec{z}_4^Q,\ \vec{z}_1^R,\ \vec{z}_2,\ \vec{z}_3^R,\ \vec{z}_4,\ \vec{p}^Q,\ \vec{p}^R\},$$

набор векторов $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{p}^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3)$, $\vec{p}^R = \frac{1}{2}(\vec{z}_2 + \vec{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (5).

Д) $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{p}_2^Q, \vec{p}_4^Q\}$. Заметим, что случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **А**. Также случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_1^R, \vec{z}_3^R\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **Б**. Случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{p}^R\}$ с точностью до перестановки индексов полностью эквивалентен пункту **В.1**. Кроме того, случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_1^R, \vec{z}_3^R, \vec{p}^R\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **Г**. Осталось заметить, что если точки $\vec{p}_1^R$ и $\vec{p}_3^R$ принадлежат решетке $\mathbb{Z}^4$, то $\vec{p}^Q \in \mathbb{Z}^4$, чего не может быть. Значит случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{p}_1^R, \vec{p}_3^R\}$ также невозможен, что завершает доказательство леммы.

□

Лемма 8. *Пусть G — собственная циклическая симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Тогда существуют $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\vec{z}_4 \in \mathbb{Z}^4$, такие что*

$$G(\vec{z}_1) = \vec{z}_2,\ G(\vec{z}_2) = \vec{z}_3,\ G(\vec{z}_3) = \vec{z}_4,\ G(\vec{z}_4) = \vec{z}_1$$

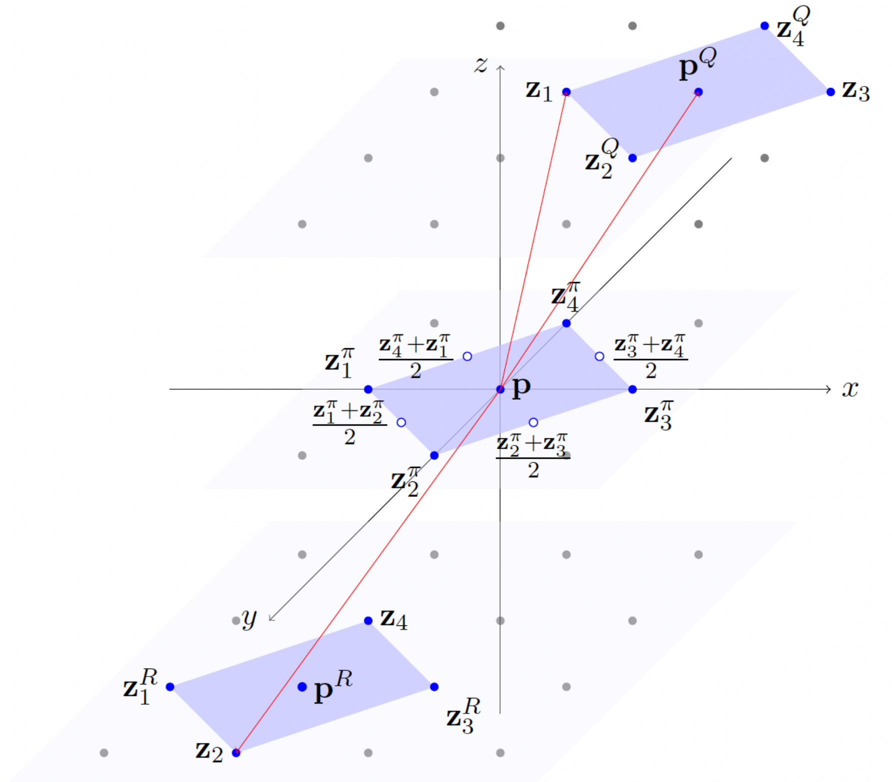

Рис. 10: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Г.1.а.2** леммы 7

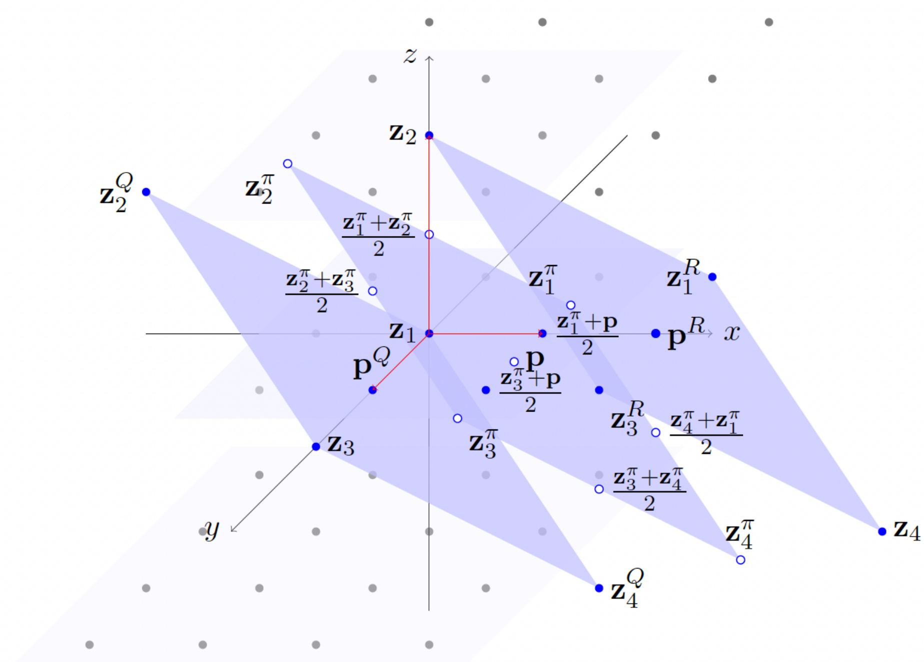

Рис. 11: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Г.1.а.3** леммы 7

и выполняется хотя бы одно из семи утверждений:

(1) *утверждение* (4) *леммы 7;*

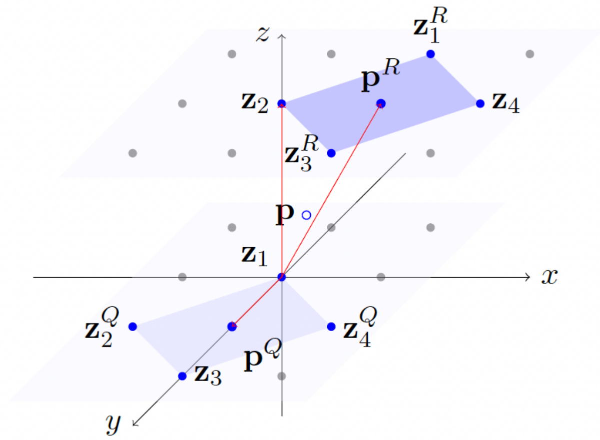

Рис. 12: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Г.1.б** леммы 7

(2) *утверждение* (8) *леммы 7;*
(3) *утверждение* (7) *леммы 7;*
(4) *утверждение* (3) *леммы 7;*
(5) *утверждение* (10) *леммы 7;*
(6) *утверждение* (5) *леммы 7;*
(7) *утверждение* (1) *леммы 7.*

Доказательство. Рассмотрим подпространства l_+, l_- и L из леммы 6 и положим $S = l_- + L$. Обозначим через S_1 ближайшую к S рациональную гиперплоскость, параллельную S и не совпадающую с S (любую из двух). Тогда $G(S_1) = S_1$. Также обозначим через $\vec{p}$ точку пересечения гиперплоскости S_1 и l_+, а через l и π прямую и плоскость, проходящие через точку $\vec{p}$ и параллельные l_- и L соответственно. Тогда, $G(\vec{p}) = \vec{p}$, $G(\vec{v} - \vec{p}) = \vec{p} - \vec{v}$ для любого вектора $\vec{v} \in l$ и $G^2(\vec{v} - \vec{p}) = \vec{p} - \vec{v}$ для любого вектора $\vec{v} \in \pi$ в силу леммы 6.

Поскольку подпространство L не содержит собственных для G одномерных подпространств, то для произвольной точки $\vec{v} \in \pi \setminus l$ четырехугольник $\mathrm{conv}\big(\vec{v}, G(\vec{v}), G^2(\vec{v}), G^3(\vec{v})\big)$ является параллелограммом, диагонали которого пересекаются в точке $\vec{p} = \frac{1}{2}\big(\vec{v} + G^2(\vec{v})\big) = \frac{1}{2}\big(G(\vec{v}) + G^3(\vec{v})\big)$.

Обозначим через Q рациональную плоскость ближайшую к π, лежащую в гиперплоскости S_1, параллельную π и не совпадающую с π. Поскольку $G(\vec{v} - \vec{p}) = \vec{p} - \vec{v}$ для любого вектора $\vec{v} \in l$, то $R = G(Q)$ и Q — рациональные плоскости ближайшие к π и равноудаленные от нее, лежащие в гиперплоскости S_1 по разные стороны от π, параллельные π и не совпадающие с π. Положим $\vec{p}^Q = Q \cap l$ и $\vec{p}^R = R \cap l$. Построим точки $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\vec{z}_4$ при помощи следующей итерационной процедуры. Возьмем произвольную целочисленную точку $\vec{v}_{1,1} \in Q \setminus l$. Введем обозначения $\vec{v}_{1,2} = G(\vec{v}_{1,1})$, $\vec{v}_{1,3} = G^2(\vec{v}_{1,1})$, $\vec{v}_{1,4} = G^3(\vec{v}_{1,1})$. Пусть точки $\vec{v}^{\pi}_{1,1}$, $\vec{v}^{\pi}_{1,2}$, $\vec{v}^{\pi}_{1,3}$, $\vec{v}^{\pi}_{1,4}$ — проекции параллельные l на плоскость π точек $\vec{v}_{1,1}$, $\vec{v}_{1,2}$, $\vec{v}_{1,3}$, $\vec{v}_{1,4}$ соответственно. Также обозначим через $\vec{v}^{R}_{1,1}$ и $\vec{v}^{R}_{1,3}$ — проекции параллельные l на плоскость R точек $\vec{v}_{1,1}$ и $\vec{v}_{1,3}$, а через $\vec{v}^{Q}_{1,2}$ и $\vec{v}^{Q}_{1,4}$ — проекции параллельные l на плоскость Q точек $\vec{v}_{1,2}$ и $\vec{v}_{1,4}$. По доказанному выше множество $\Delta^{\pi}_1 = \mathrm{conv}(\vec{v}^{\pi}_{1,1}, \vec{v}^{\pi}_{1,2}, \vec{v}^{\pi}_{1,3}, \vec{v}^{\pi}_{1,4})$ является параллелограммом, диагонали которого пересекаются в точке $\vec{p} = \frac{1}{4}(\vec{v}_{1,1} + \vec{v}_{1,2} + \vec{v}_{1,3} + \vec{v}_{1,4})$. Таким образом, множества $\Delta^{Q}_1 = \mathrm{conv}(\vec{v}_{1,1}, \vec{v}^{Q}_{1,2}, \vec{v}_{1,3}, \vec{v}^{Q}_{1,4})$ и $\Delta^{R}_1 = \mathrm{conv}(\vec{v}^{R}_{1,1}, \vec{v}_{1,2}, \vec{v}^{R}_{1,3}, \vec{v}_{1,4})$ также являются параллелограммами. Заметим, что $\vec{p}^Q = \frac{1}{2}(\vec{v}_{1,1} + \vec{v}_{1,3})$ и $\vec{p}^R = \frac{1}{2}(\vec{v}_{1,2} + \vec{v}_{1,4})$.

Предположим, мы построили параллелограммы Δ^{π}_j, Δ^{Q}_j и Δ^{R}_j. Если на плоскостях Q и R существует целая точка, не совпадающая с точками $\vec{p}^Q$, $\vec{p}^R$ и ни с какой из вершин параллелограммов Δ^{Q}_j и Δ^{R}_j, при этом лежащая в одном из этих параллелограммов (без ограничения общности, внутри Δ_j^Q), то обозначим её через $\vec{v}_{j+1,1}$. Введем обозначения $\vec{v}_{j+1,2} = G(\vec{v}_{j+1,1})$, $\vec{v}_{j+1,3} = G^2(\vec{v}_{j+1,1})$, $\vec{v}_{j+1,4} = G^3(\vec{v}_{j+1,1})$. Пусть точки $\vec{v}^{\pi}_{j+1,1}$, $\vec{v}^{\pi}_{j+1,2}$, $\vec{v}^{\pi}_{j+1,3}$, $\vec{v}^{\pi}_{j+1,4}$ — проекции параллельные l на плоскость π точек $\vec{v}_{j+1,1}$, $\vec{v}_{j+1,2}$, $\vec{v}_{j+1,3}$, $\vec{v}_{j+1,4}$ соответственно. Также обозначим через $\vec{v}^{R}_{j+1,1}$ и $\vec{v}^{R}_{j+1,3}$ — проекции параллельные l на плоскость R точек $\vec{v}_{j+1,1}$ и $\vec{v}_{j+1,3}$, а через $\vec{v}^{Q}_{j+1,2}$ и $\vec{v}^{Q}_{j+1,4}$ — проекции параллельные l на плоскость Q точек $\vec{v}_{j+1,2}$ и $\vec{v}_{j+1,4}$. Определим параллелограммы

$$\Delta^{\pi}_{j+1} = \mathrm{conv}(\vec{v}^{\pi}_{j+1,1}, \vec{v}^{\pi}_{j+1,2}, \vec{v}^{\pi}_{j+1,3}, \vec{v}^{\pi}_{j+1,4}),$$

$$\Delta^{Q}_{j+1} = \mathrm{conv}(\vec{v}_{j+1,1}, \vec{v}^{Q}_{j+1,2}, \vec{v}_{j+1,3}, \vec{v}^{Q}_{j+1,4}),$$

$$\Delta^{R}_{j+1} = \mathrm{conv}(\vec{v}^{R}_{j+1,1}, \vec{v}_{j+1,2}, \vec{v}^{R}_{j+1,3}, \vec{v}_{j+1,4}).$$

При этом $\vec{p} = \frac{1}{4}(\vec{v}_{j+1,1} + \vec{v}_{j+1,2} + \vec{v}_{j+1,3} + \vec{v}_{j+1,4})$, $\vec{p}^{Q} = \frac{1}{2}(\vec{v}_{j+1,1} + \vec{v}_{j+1,3})$ и $\vec{p}^{R} = \frac{1}{2}(\vec{v}_{j+1,2} + \vec{v}_{j+1,4})$.

Последовательность троек $(\Delta_j^{\pi}, \Delta_j^{Q}, \Delta_j^{R})$ конечна. Пусть $(\Delta_k^{\pi}, \Delta_k^{Q}, \Delta_k^{R})$ — последний её элемент. Положим $\vec{z}_1 = \vec{v}_{k,1}$, $\vec{z}_2 = \vec{v}_{k,2}$, $\vec{z}_3 = \vec{v}_{k,3}$, $\vec{z}_4 = \vec{v}_{k,4}$, $\vec{z}^{\pi}_1 = \vec{v}^{\pi}_{k,1}$, $\vec{z}^{\pi}_2 = \vec{v}^{\pi}_{k,2}$, $\vec{z}^{\pi}_3 = \vec{v}^{\pi}_{k,3}$, $\vec{z}^{\pi}_4 = \vec{v}^{\pi}_{k,4}$, $\vec{z}^{R}_1 = \vec{v}^{R}_{k,1}$, $\vec{z}^{R}_3 = \vec{v}^{R}_{k,3}$, $\vec{z}^{Q}_2 = \vec{v}^{Q}_{k,2}$, $\vec{z}^{Q}_4 = \vec{v}^{Q}_{k,4}$.

Обозначим через $\hat{l}^1$ и $\hat{l}^2$ такие одномерные рациональные подпространства, что $\hat{l}^1 + \hat{l}^2 = L$. Заметим, что подпространства $l^1_+ = l_+$, $l^2_+ = l_-$, $l^1_- = \hat{l}^1$, $l^2_- = \hat{l}^2$ удовлетворяют условиям леммы 5 для оператора G^2. Таким образом, пара точек $(\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ является допустимой (см. доказательство леммы 7) для оператора G^2 и цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$, поскольку

$$(\Delta^{Q}_{k} \cup \Delta^{R}_{k}) \cap \mathbb{Z}^4 \subset \{\vec{z}_1, \vec{z}^{Q}_2, \vec{z}_3, \vec{z}^{Q}_4, \vec{z}^{R}_1, \vec{z}_2, \vec{z}^{R}_3, \vec{z}_4, \vec{p}_Q, \vec{p}_R\}.$$

Из этого следует, что должно выполняться хотя бы одно из одиннадцати утверждений (1) - (11) леммы 7.

Заметим, что случай **А.2.б** из доказательства леммы 7 невозможен, поскольку, в этом случае, $G(\vec{p}^R) = \vec{p}^Q$, а значит, $\vec{p}^Q \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит расположению точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в этом случае. Случай **Б.1.а.3** из доказательства леммы 7 невозможен, поскольку, в этом случае, $G(\frac{\vec{z}^{\pi}_1 + \vec{z}^{\pi}_2}{2}) = \frac{\vec{z}^{\pi}_2 + \vec{z}^{\pi}_3}{2}$, а значит, $\frac{\vec{z}^{\pi}_2 + \vec{z}^{\pi}_3}{2} \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит расположению точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в этом случае. Случай **В.1.б** из доказательства леммы 7 невозможен, поскольку, в этом случае, $G(\frac{\vec{z}^{R}_1 + \vec{p}_R}{2}) = \frac{\vec{z}^{Q}_2 + \vec{p}_Q}{2}$, а значит, $\frac{\vec{z}^{Q}_2 + \vec{p}_Q}{2} \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит расположению точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в этом случае. Случай **Г.1.а.3** из доказательства леммы 7 невозможен, поскольку, в этом случае, $G(\frac{\vec{z}^{\pi}_1 + \vec{p}}{2}) = \frac{\vec{z}^{\pi}_2 + \vec{p}}{2}$, а значит, $\frac{\vec{z}^{\pi}_2 + \vec{p}}{2} \in \mathbb{Z}^4$ и $\frac{\vec{z}_1 + \vec{z}^{Q}_2}{2} = \vec{z}_1 + (\frac{\vec{z}^{\pi}_2 + \vec{p}}{2} - \frac{\vec{z}^{\pi}_1 + \vec{p}}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит расположению точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в этом случае. Итак, мы показали, что должно выполняться хотя бы одно из семи утверждений (4), (8), (7), (3), (10), (5), (1) из формулировки леммы 7.

□

5. Матрицы собственных симметрий

Напомним, что если задана дробь $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) = \mathcal{CF}(A) \in \mathfrak{A}_3$, будем считать, что подпространство l_1 порождается вектором $\vec{l}_1 = (1, \alpha, \beta, \gamma)$. Тогда из предложения 1 следует, что числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ над $\mathbb{Q}$ и каждое l_i порождается вектором $\vec{l}_i = (1, \sigma_i(\alpha), \sigma_i(\beta), \sigma_i(\gamma))$, где $\sigma_1 (= \mathrm{id}), \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ — все вложения K в $\mathbb{R}$. То есть, если через $(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4)$ обозначить матрицу со столбцами $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$, получим

$$(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \sigma_2(\alpha) & \sigma_3(\alpha) & \sigma_4(\alpha) \\ \beta & \sigma_2(\beta) & \sigma_3(\beta) & \sigma_4(\beta) \\ \gamma & \sigma_2(\gamma) & \sigma_3(\gamma) & \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Мы будем обозначать через $\widetilde{\mathfrak{A}_3}$ множество всех трехмерных алгебраических цепных дробей, для которых

$$\sigma_3(K)=K, \quad \sigma_4(K)=\sigma_2(K), \quad \sigma_3^2=\mathrm{id}, \quad \sigma_4=\sigma_2\sigma_3.$$

Для каждого $i=1,2,\ldots,10$ определим $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$ как класс дробей из $\widetilde{\mathfrak{A}_3}$, удовлетворяющих паре соотношений $\mathfrak{R}_i$, где

$\mathfrak{R}_1$: $\beta+\sigma_3(\beta)=-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)$, $\gamma=\sigma_3(\alpha)$;
$\mathfrak{R}_2$: $\beta+\sigma_3(\beta)=1-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)$, $\gamma=\sigma_3(\alpha)$;
$\mathfrak{R}_3$: $\beta+\sigma_3(\beta)=2-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)$, $\gamma=\sigma_3(\alpha)$;
$\mathfrak{R}_4$: $\beta+\sigma_3(\beta)=-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)$, $\gamma=\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$;
$\mathfrak{R}_5$: $\beta+\sigma_3(\beta)=2-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)$, $\gamma=\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$;
$\mathfrak{R}_6$: $\beta+\sigma_3(\beta)=-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)$, $\gamma=\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}$;
$\mathfrak{R}_7$: $\beta+\sigma_3(\beta)=2-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)$, $\gamma=\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}$;
$\mathfrak{R}_8$: $\beta+\sigma_3(\beta)=1-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\gamma=\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$;
$\mathfrak{R}_9$: $\beta+\sigma_3(\beta)=2-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\gamma=\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$;
$\mathfrak{R}_{10}$: $\beta+\sigma_3(\beta)=2-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\gamma=\frac{\sigma_3(\alpha)-\alpha}{4}$.

Покажем, что все дроби из классов $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$, палиндромичны для каждого $i=1,2,\ldots,10$. Положим $\widetilde{G_1},\widetilde{G_2},\ldots,\widetilde{G_{10}}$ равными соответственно матрицам

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&-1&-1&-1\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 1&-1&-1&-1\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 2&-1&-1&-1\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-1&0&2\\ 0&0&-1&-2\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-1&0&2\\ 2&0&-1&-2\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ -1&-1&0&2\\ 1&0&-1&-2\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ -1&-1&0&2\\ 3&0&-1&-2\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-1&0&2\\ 1&0&-1&-1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-1&0&2\\ 2&0&-1&-1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&4\\ 2&-1&-1&-2\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 9. *Пусть* $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathfrak{A}_3$ *и* $i\in\{1,2,\ldots,10\}$. *Тогда цепная дробь* $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ *принадлежит классу* $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$ *в том и только в том случае, если* $\widetilde{G_i}$ *— её собственная симметрия и* $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_i}})=2$.

Доказательство. В силу леммы 4 оператор $G\in\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ является собственной симметрией дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_G)=2$ тогда и только тогда, когда с точностью до перестановки индексов существуют такие действительные числа μ_1,μ_2,μ_3,μ_4, что $G\big(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4\big)=\big(\mu_3\vec{l}_3,\mu_4\vec{l}_4,\mu_1\vec{l}_1,\mu_2\vec{l}_2\big)$ и $\mu_1\mu_3=\mu_2\mu_4=1$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\widetilde{\mathbf{CF}}_1$. Заметим, что $\sigma_2=\sigma_2\sigma_3^2=\sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3(\gamma)=\sigma_3^2(\alpha)=\alpha$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_4\sigma_3(\alpha)=\sigma_2(\alpha)$, $\sigma_2(\beta)+\sigma_2\sigma_3(\beta)=\sigma_2\big(\beta+\sigma_3(\beta)\big)=$
$=\sigma_2\Big(-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)\Big)=-\big(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)\big)$ и $\sigma_4(\beta)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_1}\vec{l}_1=\begin{pmatrix} 1\\ \sigma_3(\alpha)\\ -\beta-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)\\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G_1}\vec{l}_2=\begin{pmatrix} 1\\ \sigma_2\sigma_3(\alpha)\\ -\sigma_2(\beta)-\big(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)\big)\\ \sigma_2(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_1}\vec{l}_3=\begin{pmatrix} 1\\ \alpha\\ -\sigma_3(\beta)-\big(\sigma_3(\alpha)+\alpha\big)\\ \sigma_3(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G_1}\vec{l}_4=\begin{pmatrix} 1\\ \sigma_2(\alpha)\\ -\sigma_2\sigma_3(\beta)-\big(\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)\big)\\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_1}\big(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4\big)=\big(\vec{l}_3,\vec{l}_4,\vec{l}_1,\vec{l}_2\big)$. Следовательно, $\widetilde{G_1}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_1}})=2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_1}$ — собственная симметрия

$\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\operatorname{ord}(\sigma_{\widetilde{G_1}})=2$. Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_1}\vec{l_1}=\begin{pmatrix}1\\ \gamma\\ -\beta-(\alpha+\gamma)\\ \alpha\end{pmatrix}=\mu_3\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ \sigma_3(\beta)\\ \sigma_3(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3=1$, $\gamma=\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3^2(\alpha)=\sigma_3(\gamma)=\alpha$, $\sigma_3^2(\gamma)=\sigma_3(\alpha)=\gamma$, $\beta+\sigma_3(\beta)=-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)$, $\sigma_3^2(\beta)=-\sigma_3(\beta)-\big(\sigma_3(\alpha)+\sigma_3^2(\alpha)\big)=-\sigma_3(\beta)-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)=\beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_1}\vec{l_2}=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2(\gamma)\\ -\sigma_2(\beta)-\big(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2(\gamma)\big)\\ \sigma_2(\alpha)\end{pmatrix}=\mu_4\begin{pmatrix}1\\ \sigma_4(\alpha)\\ \sigma_4(\beta)\\ \sigma_4(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4=1$, $\sigma_4(\alpha)=\sigma_2(\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_2(\alpha)=\sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta)=-\sigma_2(\beta)-\big(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2(\gamma)\big)=\sigma_2\big(-\beta-(\alpha+\gamma)\big)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\widetilde{\mathbf{CF}}_1$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\widetilde{\mathbf{CF}}_2$. Заметим, что $\sigma_2=\sigma_2\sigma_3^2=\sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3(\gamma)=\sigma_3^2(\alpha)=\alpha$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_4\sigma_3(\alpha)=\sigma_2(\alpha)$, $\sigma_2(\beta)+\sigma_2\sigma_3(\beta)=\sigma_2\big(\beta+\sigma_3(\beta)\big)=\sigma_2\Big(1-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)\Big)=1-\big(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)\big)$ и $\sigma_4(\beta)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_2}\vec{l_1}=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ 1-\beta-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)\\ \alpha\end{pmatrix},\quad \widetilde{G_2}\vec{l_2}=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2\sigma_3(\alpha)\\ 1-\sigma_2(\beta)-\big(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)\big)\\ \sigma_2(\alpha)\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_2}\vec{l_3}=\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ 1-\sigma_3(\beta)-\big(\sigma_3(\alpha)+\alpha\big)\\ \sigma_3(\alpha)\end{pmatrix},\quad \widetilde{G_2}\vec{l_4}=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2(\alpha)\\ 1-\sigma_2\sigma_3(\beta)-\big(\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)\big)\\ \sigma_2\sigma_3(\alpha)\end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_2}\big(\vec{l_1},\vec{l_2},\vec{l_3},\vec{l_4}\big)=\big(\vec{l_3},\vec{l_4},\vec{l_1},\vec{l_2}\big)$. Следовательно, $\widetilde{G_2}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\operatorname{ord}(\sigma_{\widetilde{G_2}})=2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_2}$ — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\operatorname{ord}(\sigma_{\widetilde{G_2}})=2$. Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_2}\vec{l_1}=\begin{pmatrix}1\\ \gamma\\ 1-\beta-(\alpha+\gamma)\\ \alpha\end{pmatrix}=\mu_3\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ \sigma_3(\beta)\\ \sigma_3(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3=1$, $\gamma=\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3^2(\alpha)=\sigma_3(\gamma)=\alpha$, $\sigma_3^2(\gamma)=\sigma_3(\alpha)=\gamma$, $\beta+\sigma_3(\beta)=1-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)$, $\sigma_3^2(\beta)=-\sigma_3(\beta)+\sigma_3(1)-\big(\sigma_3(\alpha)+\sigma_3^2(\alpha)\big)=-\sigma_3(\beta)+1-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)=\beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_2}\vec{l_2}=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2(\gamma)\\ 1-\sigma_2(\beta)-\big(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2(\gamma)\big)\\ \sigma_2(\alpha)\end{pmatrix}=\mu_4\begin{pmatrix}1\\ \sigma_4(\alpha)\\ \sigma_4(\beta)\\ \sigma_4(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4=1$, $\sigma_4(\alpha)=\sigma_2(\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_2(\alpha)=\sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta)=1-\sigma_2(\beta)-\big(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2(\gamma)\big)=\sigma_2\big(1-\beta-(\alpha+\gamma)\big)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\widetilde{\mathbf{CF}}_2$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_3$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3^2(\alpha) = \alpha$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4\sigma_3(\alpha) = \sigma_2(\alpha)$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2\big(\beta + \sigma_3(\beta)\big) = \sigma_2\Big(2 - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)\Big) = 2 - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big)$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_3}\vec{l_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ 2 - \beta - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big) \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G_3}\vec{l_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ 2 - \sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big) \\ \sigma_2(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_3}\vec{l_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 - \sigma_3(\beta) - \big(\sigma_3(\alpha) + \alpha\big) \\ \sigma_3(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G_3}\vec{l_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ 2 - \sigma_2\sigma_3(\beta) - \big(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)\big) \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_3}\big(\vec{l_1},\vec{l_2},\vec{l_3},\vec{l_4}\big) = \big(\vec{l_3},\vec{l_4},\vec{l_1},\vec{l_2}\big)$. Следовательно, $\widetilde{G_3}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\operatorname{ord}(\sigma_{\widetilde{G_3}}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_3}$ — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\operatorname{ord}(\sigma_{\widetilde{G_3}}) = 2$. Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_3}\vec{l_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ 2 - \beta - (\alpha + \gamma) \\ \alpha \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3^2(\alpha) = \sigma_3(\gamma) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\alpha) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = 2 - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) + \sigma_3(2) - \big(\sigma_3(\alpha) + \sigma_3^2(\alpha)\big) = -\sigma_3(\beta) + 2 - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big) = \beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_3}\vec{l_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\gamma) \\ 2 - \sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2(\gamma)\big) \\ \sigma_2(\alpha) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\alpha) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 2 - \sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2(\gamma)\big) = \sigma_2\big(2 - \beta - (\alpha + \gamma)\big) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_3$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_4$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2}$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2}$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2\big(\beta + \sigma_3(\beta)\big) = \sigma_2\Big(-\big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)\Big) = -\big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big)$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_4}\vec{l_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ -\beta - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big) \\ \frac{1}{2}(\alpha + \sigma_3(\alpha)) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G_4}\vec{l_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ -\sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_4}\vec{l_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -\sigma_3(\beta) - \big(\sigma_3(\alpha) + \alpha\big) \\ \frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha) + \alpha) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G_4}\vec{l_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ -\sigma_2\sigma_3(\beta) - \big(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)\big) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)) \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_4}\big(\vec{l_1},\vec{l_2},\vec{l_3},\vec{l_4}\big) = \big(\vec{l_3},\vec{l_4},\vec{l_1},\vec{l_2}\big)$. Следовательно, $\widetilde{G_4}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\operatorname{ord}(\sigma_{\widetilde{G_4}}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_4}$ — собственная симметрия

$\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_4}})=2$. Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_4}\vec{l}_1=\begin{pmatrix}1\\-\alpha+2\gamma\\-\beta-2\gamma\\\gamma\end{pmatrix}=\mu_3\begin{pmatrix}1\\\sigma_3(\alpha)\\\sigma_3(\beta)\\\sigma_3(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3=1$, $\gamma=\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha)=2\sigma_3(\gamma)-\sigma_3(\alpha)=2\gamma-\sigma_3(\alpha)=\alpha$, $\sigma_3^2(\gamma)=\sigma_3(\gamma)=\gamma$, $\beta+\sigma_3(\beta)=-2\gamma=-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)$, $\sigma_3^2(\beta)=-\sigma_3(\beta)-2\sigma_3(\gamma)=-\sigma_3(\beta)-2\gamma=\beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_4}\vec{l}_2=\begin{pmatrix}1\\-\sigma_2(\alpha)+2\sigma_2(\gamma)\\-\sigma_2(\beta)-2\sigma_2(\gamma)\\\sigma_2(\gamma)\end{pmatrix}=\mu_4\begin{pmatrix}1\\\sigma_4(\alpha)\\\sigma_4(\beta)\\\sigma_4(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4=1$, $\sigma_4(\alpha)=\sigma_2(2\gamma-\alpha)=\sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_2(\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta)=-\sigma_2(\beta)-2\sigma_2(\gamma)=\sigma_2(-\beta-2\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\widetilde{\mathbf{CF}}_4$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\widetilde{\mathbf{CF}}_5$. Заметим, что $\sigma_2=\sigma_2\sigma_3^2=\sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma)=\sigma_2(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2})=$ $=\frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3(\gamma)=\sigma_3(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2})=\frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2}$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_4(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2})=\frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2}$, $\sigma_2(\beta)+\sigma_2\sigma_3(\beta)=\sigma_2\big(\beta+\sigma_3(\beta)\big)=\sigma_2\Big(2-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)\Big)=2-\big(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)\big)$ и $\sigma_4(\beta)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_5}\vec{l}_1=\begin{pmatrix}1\\\sigma_3(\alpha)\\2-\beta-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)\\\frac12(\alpha+\sigma_3(\alpha))\end{pmatrix},\quad \widetilde{G_5}\vec{l}_2=\begin{pmatrix}1\\\sigma_2\sigma_3(\alpha)\\2-\sigma_2(\beta)-\big(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)\big)\\\frac12(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha))\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_5}\vec{l}_3=\begin{pmatrix}1\\\alpha\\2-\sigma_3(\beta)-\big(\sigma_3(\alpha)+\alpha\big)\\\frac12(\sigma_3(\alpha)+\alpha)\end{pmatrix},\quad \widetilde{G_5}\vec{l}_4=\begin{pmatrix}1\\\sigma_2(\alpha)\\2-\sigma_2\sigma_3(\beta)-\big(\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)\big)\\\frac12(\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha))\end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_5}\big(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4\big)=\big(\vec{l}_3,\vec{l}_4,\vec{l}_1,\vec{l}_2\big)$. Следовательно, $\widetilde{G_5}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_5}})=2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_5}$ — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_5}})=2$. Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_5}\vec{l}_1=\begin{pmatrix}1\\-\alpha+2\gamma\\2-\beta-2\gamma\\\gamma\end{pmatrix}=\mu_3\begin{pmatrix}1\\\sigma_3(\alpha)\\\sigma_3(\beta)\\\sigma_3(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3=1$, $\gamma=\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha)=2\sigma_3(\gamma)-\sigma_3(\alpha)=2\gamma-\sigma_3(\alpha)=\alpha$, $\sigma_3^2(\gamma)=\sigma_3(\gamma)=\gamma$, $\beta+\sigma_3(\beta)=2-2\gamma=2-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)$, $\sigma_3^2(\beta)=\sigma_3(2)-\sigma_3(\beta)-2\sigma_3(\gamma)=2-\sigma_3(\beta)-2\gamma=\beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_5}\vec{l}_2=\begin{pmatrix}1\\-\sigma_2(\alpha)+2\sigma_2(\gamma)\\2-\sigma_2(\beta)-2\sigma_2(\gamma)\\\sigma_2(\gamma)\end{pmatrix}=\mu_4\begin{pmatrix}1\\\sigma_4(\alpha)\\\sigma_4(\beta)\\\sigma_4(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(2\gamma - \alpha) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 2 - \sigma_2(\beta) - 2\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(2 - \beta - 2\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_5$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_6$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}) = \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}) = \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha+1}{2}$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}) = \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2\big(\beta + \sigma_3(\beta)\big) = \sigma_2\big(-(\alpha + \sigma_3(\alpha))\big) = -\big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big)$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_6}\vec{l_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ -\beta - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big) \\ \frac{1}{2}(\alpha + \sigma_3(\alpha) + 1) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G_6}\vec{l_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ -\sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha) + 1) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_6}\vec{l_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -\sigma_3(\beta) - \big(\sigma_3(\alpha) + \alpha\big) \\ \frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha) + \alpha + 1) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G_6}\vec{l_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ -\sigma_2\sigma_3(\beta) - \big(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)\big) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha) + 1) \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_6}\big(\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}, \vec{l_4}\big) = \big(\vec{l_3}, \vec{l_4}, \vec{l_1}, \vec{l_2}\big)$. Следовательно, $\widetilde{G_6}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\operatorname{ord}(\sigma_{\widetilde{G_6}}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_6}$ — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\operatorname{ord}(\sigma_{\widetilde{G_6}}) = 2$. Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_6}\vec{l_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \alpha + 2\gamma \\ 1 - \beta - 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 2\sigma_3(\gamma) - \sigma_3(\alpha) - 1 = 2\gamma - \sigma_3(\alpha) - 1 = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\gamma) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = 1 - 2\gamma = -\big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) + \sigma_3(1) - 2\sigma_3(\gamma) = -\sigma_3(\beta) + 1 - 2\gamma = \beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_6}\vec{l_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sigma_2(\alpha) + 2\sigma_2(\gamma) \\ 1 - \sigma_2(\beta) - 2\sigma_2(\gamma) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(2\gamma - \alpha - 1) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 1 - \sigma_2(\beta) - 2\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(1 - \beta - 2\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_6$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_7$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}) = \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}) = \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha+1}{2}$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}) = \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2\big(\beta + \sigma_3(\beta)\big) = \sigma_2\big(2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha))\big) = 2 - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big)$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_7}\vec{l_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ 2 - \beta - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big) \\ \frac{1}{2}(\alpha + \sigma_3(\alpha) + 1) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G_7}\vec{l_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ 2 - \sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha) + 1) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_7}\vec{l_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 - \sigma_3(\beta) - \big(\sigma_3(\alpha) + \alpha\big) \\ \frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha) + \alpha + 1) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G_7}\vec{l_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ 2 - \sigma_2\sigma_3(\beta) - \big(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)\big) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha) + 1) \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_7}(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4) = (\vec{l}_3,\vec{l}_4,\vec{l}_1,\vec{l}_2)$. Следовательно, $\widetilde{G_7}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_7}}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_7}$ — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_7}}) = 2$. Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_7}\vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\alpha+2\gamma \\ 3-\beta-2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 2\sigma_3(\gamma)-\sigma_3(\alpha)-1 = 2\gamma-\sigma_3(\alpha)-1 = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\gamma) = \gamma$, $\beta+\sigma_3(\beta) = 3-2\gamma = 2-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta)+\sigma_3(3)-2\sigma_3(\gamma) = -\sigma_3(\beta)+3-2\gamma = \beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_7}\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sigma_2(\alpha)+2\sigma_2(\gamma) \\ 3-\sigma_2(\beta)-2\sigma_2(\gamma) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(2\gamma-\alpha-1) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 3-\sigma_2(\beta)-$ $-2\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(3-\beta-2\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_7$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_8$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) =$ $= \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2}$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2}$, $\sigma_2(\beta)+\sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2\big(\beta+\sigma_3(\beta)\big) = \sigma_2\big(1-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}\big) = 1-\frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_8}\vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ 1-\beta-\frac{1}{2}(\alpha+\sigma_3(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\alpha+\sigma_3(\alpha)) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G_8}\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ 1-\sigma_2(\beta)-\frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_8}\vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1-\sigma_3(\beta)-\frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha)+\alpha) \\ \frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha)+\alpha) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G_8}\vec{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ 1-\sigma_2\sigma_3(\beta)-\frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)) \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_8}(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4) = (\vec{l}_3,\vec{l}_4,\vec{l}_1,\vec{l}_2)$. Следовательно, $\widetilde{G_8}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_8}}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_8}$ — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_8}}) = 2$. Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_8}\vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha+2\gamma \\ 1-\beta-\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 2\sigma_3(\gamma)-\sigma_3(\alpha) = 2\gamma-\sigma_3(\alpha) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\gamma) = \gamma$, $\beta+\sigma_3(\beta) = 1-\gamma = 1-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta)+\sigma_3(1)-\sigma_3(\gamma) = -\sigma_3(\beta)+1-\gamma = \beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_8}\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma_2(\alpha)+2\sigma_2(\gamma) \\ 1-\sigma_2(\beta)-\sigma_2(\gamma) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4=1$, $\sigma_4(\alpha)=\sigma_2(2\gamma-\alpha)=\sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_2(\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta)=1-\sigma_2(\beta)-$ $-\sigma_2(\gamma)=\sigma_2(1-\beta-\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\widetilde{\mathbf{CF}}_8$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\widetilde{\mathbf{CF}}_9$. Заметим, что $\sigma_2=\sigma_2\sigma_3^2=\sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma)=\sigma_2(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2})=$ $=\frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3(\gamma)=\sigma_3(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2})=\frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2}$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_4(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2})=\frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2}$, $\sigma_2(\beta)+\sigma_2\sigma_3(\beta)=\sigma_2\big(\beta+\sigma_3(\beta)\big)=\sigma_2\big(2-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}\big)=2-\frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$ и $\sigma_4(\beta)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_9}\vec{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ 2-\beta-\frac{1}{2}(\alpha+\sigma_3(\alpha))\\ \frac{1}{2}(\alpha+\sigma_3(\alpha))\end{pmatrix},\quad \widetilde{G_9}\vec{l}_2=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2\sigma_3(\alpha)\\ 2-\sigma_2(\beta)-\frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha))\\ \frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha))\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_9}\vec{l}_3=\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ 2-\sigma_3(\beta)-\frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha)+\alpha)\\ \frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha)+\alpha)\end{pmatrix},\quad \widetilde{G_9}\vec{l}_4=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2(\alpha)\\ 2-\sigma_2\sigma_3(\beta)-\frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha))\\ \frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha))\end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_9}\big(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4\big)=\big(\vec{l}_3,\vec{l}_4,\vec{l}_1,\vec{l}_2\big)$. Следовательно, $\widetilde{G_9}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_9}})=2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_9}$ — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_9}})=2$. Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_9}\vec{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ -\alpha+2\gamma\\ 2-\beta-\gamma\\ \gamma\end{pmatrix}=\mu_3\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ \sigma_3(\beta)\\ \sigma_3(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3=1$, $\gamma=\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha)=2\sigma_3(\gamma)-\sigma_3(\alpha)=2\gamma-\sigma_3(\alpha)=\alpha$, $\sigma_3^2(\gamma)=\sigma_3(\gamma)=\gamma$, $\beta+\sigma_3(\beta)=2-\gamma=2-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\beta)=-\sigma_3(\beta)+\sigma_3(2)-\sigma_3(\gamma)=-\sigma_3(\beta)+2-\gamma=\beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_9}\vec{l}_2=\begin{pmatrix}1\\ -\sigma_2(\alpha)+2\sigma_2(\gamma)\\ 2-\sigma_2(\beta)-\sigma_2(\gamma)\\ \sigma_2(\gamma)\end{pmatrix}=\mu_4\begin{pmatrix}1\\ \sigma_4(\alpha)\\ \sigma_4(\beta)\\ \sigma_4(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4=1$, $\sigma_4(\alpha)=\sigma_2(2\gamma-\alpha)=\sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_2(\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta)=2-\sigma_2(\beta)-$ $-\sigma_2(\gamma)=\sigma_2(2-\beta-\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\widetilde{\mathbf{CF}}_9$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\widetilde{\mathbf{CF}}_{10}$. Заметим, что $\sigma_2=\sigma_2\sigma_3^2=\sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma)=\sigma_2(\frac{\sigma_3(\alpha)-\alpha}{4})=$ $=\frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)-\sigma_2(\alpha)}{4}$, $\sigma_3(\gamma)=\sigma_3(\frac{\sigma_3(\alpha)-\alpha}{4})=\frac{\alpha-\sigma_3(\alpha)}{4}$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_4(\frac{\sigma_3(\alpha)-\alpha}{4})=\frac{\sigma_2(\alpha)-\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{4}$, $\sigma_2(\beta)+\sigma_2\sigma_3(\beta)=\sigma_2\big(\beta+\sigma_3(\beta)\big)=\sigma_2\big(2-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}\big)=2-\frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$ и $\sigma_4(\beta)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_{10}}\vec{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ 2-\beta-\frac{1}{2}(\alpha+\sigma_3(\alpha))\\ \frac{1}{2}(\alpha-\sigma_3(\alpha))\end{pmatrix},\quad \widetilde{G_{10}}\vec{l}_2=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2\sigma_3(\alpha)\\ 2-\sigma_2(\beta)-\frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha))\\ \frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha)-\sigma_2\sigma_3(\alpha))\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_{10}}\vec{l_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2-\sigma_3(\beta)-\frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha)+\alpha) \\ \frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha)-\alpha) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G_{10}}\vec{l_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ 2-\sigma_2\sigma_3(\beta)-\frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha)-\sigma_2(\alpha)) \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_{10}}\big(\vec{l_1},\vec{l_2},\vec{l_3},\vec{l_4}\big) = \big(\vec{l_3},\vec{l_4},\vec{l_1},\vec{l_2}\big)$. Следовательно, $\widetilde{G_{10}}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_{10}}}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_{10}}$ — собственная симметрия $\mathcal{F}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_{10}}}) = 2$. Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_{10}}\vec{l_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+4\gamma \\ 2-\beta-(\alpha+2\gamma) \\ -\gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\sigma_3(\alpha)-\alpha}{4}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 4\sigma_3(\gamma)+\sigma_3(\alpha) = -4\gamma+\sigma_3(\alpha) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(-\gamma) = \gamma$, $\beta+\sigma_3(\beta) = 2-(\alpha+2\gamma) = 2-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta)+\sigma_3(2)-\sigma_3(\alpha+2\gamma) = -\sigma_3(\beta)+2-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2} = \beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_{10}}\vec{l_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha)+4\sigma_2(\gamma) \\ 2-\sigma_2(\beta)-\big(\sigma_2(\alpha)+2\sigma_2(\gamma)\big) \\ -\sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(\alpha+4\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(-\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 2-\sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha)+2\sigma_2(\gamma)\big) = \sigma_2\big(2-\beta-(\alpha+2\gamma)\big) = \sigma_2\big(2-\beta-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}\big) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}_{10}}$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

□

Мы будем обозначать через $\mathfrak{A}_3'$ множество всех трехмерных алгебраических цепных дробей, для которых поле K из предложения 1 — вполне вещественное циклическое расширение Галуа. Пусть σ — образующая группы Галуа $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Также мы выбирали такую нумерацию прямых l_1,l_2,l_3,l_4, что если через $\big(\vec{l_1},\vec{l_2},\vec{l_3},\vec{l_4}\big)$ обозначить матрицу со столбцами $\vec{l_1},\vec{l_2},\vec{l_3},\vec{l_4}$, то

$$\big(\vec{l_1},\vec{l_2},\vec{l_3},\vec{l_4}\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \sigma(\alpha) & \sigma^2(\alpha) & \sigma^3(\alpha) \\ \beta & \sigma(\beta) & \sigma^2(\beta) & \sigma^3(\beta) \\ \gamma & \sigma(\gamma) & \sigma^2(\gamma) & \sigma^3(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Для каждого $i = 1,2,\ldots,7$ определим $\mathbf{CF}_i'$ как класс дробей из $\mathfrak{A}_3'$, удовлетворяющих тройке соотношений $\mathfrak{Q}_i$, где

$\mathfrak{Q}_1$: $\beta = \sigma(\alpha), \gamma = \sigma^2(\alpha), \mathrm{Tr}(\alpha) = 0$;
$\mathfrak{Q}_2$: $\beta = \sigma(\alpha), \gamma = \sigma^2(\alpha), \mathrm{Tr}(\alpha) = 1$;
$\mathfrak{Q}_3$: $\beta = \sigma(\alpha), \gamma = \sigma^2(\alpha), \mathrm{Tr}(\alpha) = 2$;
$\mathfrak{Q}_4$: $\beta = \sigma(\alpha), \gamma = \frac{\alpha+\sigma^2(\alpha)}{2}, \mathrm{Tr}(\alpha) = 0$;
$\mathfrak{Q}_5$: $\beta = \sigma(\alpha), \gamma = \frac{\alpha+\sigma^2(\alpha)}{2}, \mathrm{Tr}(\alpha) = 2$;
$\mathfrak{Q}_6$: $\beta = \sigma(\alpha), \gamma = \frac{\alpha+\sigma^2(\alpha)+1}{2}, \mathrm{Tr}(\alpha) = 0$;
$\mathfrak{Q}_7$: $\beta = \sigma(\alpha), \gamma = \frac{\alpha+\sigma^2(\alpha)+1}{2}, \mathrm{Tr}(\alpha) = 2$.

Покажем, что все дроби из классов $\mathbf{CF}_i'$, палиндромичны для каждого $i = 1,2,\ldots,7$. Положим $G_1', G_2', \ldots, G_7'$ равными соответственно матрицам

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 10. *Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Тогда цепная дробь $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ принадлежит классу $\mathbf{CF}'_i$ в том и только в том случае, если G'_i — её собственная циклическая симметрия.*

Доказательство. В силу леммы 3 оператор $G \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ является собственной циклической симметрией дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ тогда и только тогда, когда с точностью до перестановки индексов существуют такие действительные числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, что $G\big(\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}, \vec{l_4}\big) = \big(\mu_2\vec{l_2}, \mu_3\vec{l_3}, \mu_4\vec{l_4}, \mu_1\vec{l_1}\big)$ и $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_1$. Тогда

$$G'_1\vec{l_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ -\alpha - \sigma(\alpha) - \sigma^2(\alpha) \end{pmatrix}, \quad G'_1\vec{l_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ -\sigma(\alpha) - \sigma^2(\alpha) - \sigma^3(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$G'_1\vec{l_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ -\sigma^2(\alpha) - \sigma^3(\alpha) - \alpha \end{pmatrix}, \quad G'_1\vec{l_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ -\sigma^3(\alpha) - \alpha - \sigma(\alpha) \end{pmatrix},$$

то есть $G'_1\big(\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}, \vec{l_4}\big) = \big(\vec{l_2}, \vec{l_3}, \vec{l_4}, \vec{l_1}\big)$. Следовательно, G'_1 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Обратно, предположим, что G'_1 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{F}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$G'_1\vec{l_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \gamma \\ -\alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $\gamma = \sigma_2(\beta)$, $-\alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3, что

$$G'_1\vec{l_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ -\alpha - \beta - \gamma \\ \alpha \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\sigma_3(\alpha) = \gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = -\alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma) = \alpha = -\beta - \gamma - (-\alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2(-\alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2^2(\gamma)$. Существует такое μ_4, что

$$G'_1\vec{l_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha - \beta - \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = -\alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = -\beta - \gamma - (-\alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2(-\alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = \beta = \sigma_2(\alpha) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\mathrm{Tr}(\alpha) = 0$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_1$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_2$. Тогда

$$G_2'\vec{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ \sigma(\alpha)\\ \sigma^2(\alpha)\\ 1-\alpha-\sigma(\alpha)-\sigma^2(\alpha)\end{pmatrix},\quad G_2'\vec{l}_2=\begin{pmatrix}1\\ \sigma^2(\alpha)\\ \sigma^3(\alpha)\\ 1-\sigma(\alpha)-\sigma^2(\alpha)-\sigma^3(\alpha)\end{pmatrix},$$

$$G_2'\vec{l}_3=\begin{pmatrix}1\\ \sigma^3(\alpha)\\ \alpha\\ 1-\sigma^2(\alpha)-\sigma^3(\alpha)-\alpha\end{pmatrix},\quad G_2'\vec{l}_4=\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ \sigma(\alpha)\\ 1-\sigma^3(\alpha)-\alpha-\sigma(\alpha)\end{pmatrix},$$

то есть $G_2'\big(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4\big)=\big(\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4,\vec{l}_1\big)$. Следовательно, G_2' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Обратно, предположим, что G_2' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{F}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$G_2'\vec{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ \beta\\ \gamma\\ 1-\alpha-\beta-\gamma\end{pmatrix}=\mu_2\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2(\alpha)\\ \sigma_2(\beta)\\ \sigma_2(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2=1$, $\beta=\sigma_2(\alpha)$, $\gamma=\sigma_2(\beta)$, $1-\alpha-\beta-\gamma=\sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3, что

$$G_2'\vec{l}_2=\begin{pmatrix}1\\ \gamma\\ 1-\alpha-\beta-\gamma\\ \alpha\end{pmatrix}=\mu_3\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ \sigma_3(\beta)\\ \sigma_3(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3=1$, $\sigma_3(\alpha)=\gamma=\sigma_2(\beta)=\sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta)=1-\alpha-\beta-\gamma=\sigma_2(\gamma)=\sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma)=\alpha=1-\beta-\gamma-(1-\alpha-\beta-\gamma)=\sigma_2(1-\alpha-\beta-\gamma)=\sigma_2^2(\gamma)$. Существует такое μ_4, что

$$G_2'\vec{l}_3=\begin{pmatrix}1\\ 1-\alpha-\beta-\gamma\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\mu_4\begin{pmatrix}1\\ \sigma_4(\alpha)\\ \sigma_4(\beta)\\ \sigma_4(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4=1$, $\sigma_4(\alpha)=1-\alpha-\beta-\gamma=\sigma_2(\gamma)=\sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta)=\alpha=1-\beta-\gamma-(1-\alpha-\beta-\gamma)=\sigma_2(1-\alpha-\beta-\gamma)=\sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma)=\beta=\sigma_2(\alpha)=\sigma_2^3(\gamma)$, $\mathrm{Tr}(\alpha)=1$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathbf{CF}_2'$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathbf{CF}_3'$. Тогда

$$G_3'\vec{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ \sigma(\alpha)\\ \sigma^2(\alpha)\\ 2-\alpha-\sigma(\alpha)-\sigma^2(\alpha)\end{pmatrix},\quad G_3'\vec{l}_2=\begin{pmatrix}1\\ \sigma^2(\alpha)\\ \sigma^3(\alpha)\\ 2-\sigma(\alpha)-\sigma^2(\alpha)-\sigma^3(\alpha)\end{pmatrix},$$

$$G_3'\vec{l}_3=\begin{pmatrix}1\\ \sigma^3(\alpha)\\ \alpha\\ 2-\sigma^2(\alpha)-\sigma^3(\alpha)-\alpha\end{pmatrix},\quad G_3'\vec{l}_4=\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ \sigma(\alpha)\\ 2-\sigma^3(\alpha)-\alpha-\sigma(\alpha)\end{pmatrix},$$

то есть $G_3'\big(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4\big)=\big(\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4,\vec{l}_1\big)$. Следовательно, G_3' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Обратно, предположим, что G_3' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{F}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$G'_3\vec{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ \beta\\ \gamma\\ 2-\alpha-\beta-\gamma\end{pmatrix}=\mu_2\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2(\alpha)\\ \sigma_2(\beta)\\ \sigma_2(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2=1$, $\beta=\sigma_2(\alpha)$, $\gamma=\sigma_2(\beta)$, $2-\alpha-\beta-\gamma=\sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3, что

$$G'_3\vec{l}_2=\begin{pmatrix}1\\ \gamma\\ 2-\alpha-\beta-\gamma\\ \alpha\end{pmatrix}=\mu_3\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ \sigma_3(\beta)\\ \sigma_3(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3=1$, $\sigma_3(\alpha)=\gamma=\sigma_2(\beta)=\sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta)=2-\alpha-\beta-\gamma=\sigma_2(\gamma)=\sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma)=\alpha=$ $=2-\beta-\gamma-(2-\alpha-\beta-\gamma)=\sigma_2(2-\alpha-\beta-\gamma)=\sigma_2^2(\gamma)$. Существует такое μ_4, что

$$G'_3\vec{l}_3=\begin{pmatrix}1\\ 2-\alpha-\beta-\gamma\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\mu_4\begin{pmatrix}1\\ \sigma_4(\alpha)\\ \sigma_4(\beta)\\ \sigma_4(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4=1$, $\sigma_4(\alpha)=2-\alpha-\beta-\gamma=\sigma_2(\gamma)=\sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta)=\alpha=2-\beta-\gamma-(2-\alpha-\beta-\gamma)=\sigma_2(2-$ $-\alpha-\beta-\gamma)=\sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma)=\beta=\sigma_2(\alpha)=\sigma_2^3(\gamma)$, $\mathrm{Tr}(\alpha)=2$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathbf{CF}'_3$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathbf{CF}'_4$. Тогда

$$G'_4\vec{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ \sigma(\alpha)\\ \sigma^2(\alpha)\\ -\frac{1}{2}(\alpha+\sigma^2(\alpha))\end{pmatrix},\quad G'_4\vec{l}_2=\begin{pmatrix}1\\ \sigma^2(\alpha)\\ \sigma^3(\alpha)\\ -\frac{1}{2}(\sigma(\alpha)+\sigma^3(\alpha))\end{pmatrix},$$

$$G'_4\vec{l}_3=\begin{pmatrix}1\\ \sigma^3(\alpha)\\ \alpha\\ -\frac{1}{2}(\sigma^2(\alpha)+\alpha)\end{pmatrix},\quad G'_4\vec{l}_4=\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ \sigma(\alpha)\\ -\frac{1}{2}(\sigma^3(\alpha)+\sigma(\alpha))\end{pmatrix},$$

то есть $G'_4\big(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4\big)=\big(\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4,\vec{l}_1\big)$. Следовательно, G'_4 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Обратно, предположим, что G'_4 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{F}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$G'_4\vec{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ \beta\\ -\alpha+2\gamma\\ -\gamma\end{pmatrix}=\mu_2\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2(\alpha)\\ \sigma_2(\beta)\\ \sigma_2(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2=1$, $\beta=\sigma_2(\alpha)$, $-\alpha+2\gamma=\sigma_2(\beta)$, $-\gamma=\sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3, что

$$G'_4\vec{l}_2=\begin{pmatrix}1\\ -\alpha+2\gamma\\ -\beta-2\gamma\\ \gamma\end{pmatrix}=\mu_3\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ \sigma_3(\beta)\\ \sigma_3(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3=1$, $\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}=\gamma, \sigma_3(\alpha)=-\alpha+2\gamma=\sigma_2(\beta)=\sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta)=-\beta-2\gamma=\sigma_2(-\alpha+2\gamma)=$ $=\sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma)=\gamma=\sigma_2(-\gamma)=\sigma_2^2(\gamma)$. Существует такое μ_4, что

$$G_4'\vec{l}_3=\begin{pmatrix}1\\-\beta-2\gamma\\\alpha\\-\gamma\end{pmatrix}=\mu_4\begin{pmatrix}1\\\sigma_4(\alpha)\\\sigma_4(\beta)\\\sigma_4(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4=1$, $\sigma_4(\alpha)=-\beta-2\gamma=\sigma_2(-\alpha)+\sigma_2(2\gamma)=\sigma_2(-\alpha+2\gamma)=\sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta)=\alpha=2\gamma-$ $-\sigma_2(\beta)=\sigma_2(-2\gamma-\beta)=\sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma)=-\gamma=\sigma_2(\gamma)=\sigma_2^3(\gamma)$, $\mathrm{Tr}(\alpha)=0$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathbf{CF}_4'$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathbf{CF}_5'$. Тогда

$$G_5'\vec{l}_1=\begin{pmatrix}1\\\sigma(\alpha)\\\sigma^2(\alpha)\\\frac12(2-\alpha-\sigma^2(\alpha))\end{pmatrix},\quad G_5'\vec{l}_2=\begin{pmatrix}1\\\sigma^2(\alpha)\\\sigma^3(\alpha)\\\frac12(2-\sigma(\alpha)-\sigma^3(\alpha))\end{pmatrix},$$

$$G_5'\vec{l}_3=\begin{pmatrix}1\\\sigma^3(\alpha)\\\alpha\\\frac12(2-\sigma^2(\alpha)-\alpha)\end{pmatrix},\quad G_5'\vec{l}_4=\begin{pmatrix}1\\\alpha\\\sigma(\alpha)\\\frac12(2-\sigma^3(\alpha)-\sigma(\alpha))\end{pmatrix},$$

то есть $G_5'\big(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4\big)=\big(\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4,\vec{l}_1\big)$. Следовательно, G_5' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Обратно, предположим, что G_5' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{F}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$G_5'\vec{l}_1=\begin{pmatrix}1\\\beta\\-\alpha+2\gamma\\1-\gamma\end{pmatrix}=\mu_2\begin{pmatrix}1\\\sigma_2(\alpha)\\\sigma_2(\beta)\\\sigma_2(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2=1$, $\beta=\sigma_2(\alpha)$, $-\alpha+2\gamma=\sigma_2(\beta)$, $1-\gamma=\sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3, что

$$G_5'\vec{l}_2=\begin{pmatrix}1\\-\alpha+2\gamma\\2-\beta-2\gamma\\\gamma\end{pmatrix}=\mu_3\begin{pmatrix}1\\\sigma_3(\alpha)\\\sigma_3(\beta)\\\sigma_3(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3=1$, $\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}=\gamma, \sigma_3(\alpha)=-\alpha+2\gamma=\sigma_2(\beta)=\sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta)=2-\beta-2\gamma=\sigma_2(-\alpha+2\gamma)=$ $=\sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma)=\gamma=\sigma_2(1-\gamma)=\sigma_2^2(\gamma)$. Существует такое μ_4, что

$$G_5'\vec{l}_3=\begin{pmatrix}1\\2-\beta-2\gamma\\\alpha\\1-\gamma\end{pmatrix}=\mu_4\begin{pmatrix}1\\\sigma_4(\alpha)\\\sigma_4(\beta)\\\sigma_4(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4=1$, $\sigma_4(\alpha)=2-\beta-2\gamma=\sigma_2(-\alpha)+\sigma_2(2\gamma)=\sigma_2(-\alpha+2\gamma)=\sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta)=\alpha=2\gamma-\sigma_2(\beta)=\sigma_2(2-2\gamma-\beta)=\sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma)=1-\gamma=\sigma_2(\gamma)=\sigma_2^3(\gamma)$, $\mathrm{Tr}(\alpha)=2$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathbf{CF}_5'$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathbf{CF}_6'$. Тогда

$$G_6'\vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ \frac{1}{2}(1-\alpha-\sigma^2(\alpha)) \end{pmatrix}, \quad G_6'\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ \frac{1}{2}(1-\sigma(\alpha)-\sigma^3(\alpha)) \end{pmatrix},$$

$$G_6'\vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ \frac{1}{2}(1-\sigma^2(\alpha)-\alpha) \end{pmatrix}, \quad G_6'\vec{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ \frac{1}{2}(1-\sigma^3(\alpha)-\sigma(\alpha)) \end{pmatrix},$$

то есть $G_6'\big(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4\big) = \big(\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4,\vec{l}_1\big)$. Следовательно, G_6' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Обратно, предположим, что G_6' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{F}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$G_6'\vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -1-\alpha+2\gamma \\ 1-\gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $-1-\alpha+2\gamma = \sigma_2(\beta)$, $1-\gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3, что

$$G_6'\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\alpha+2\gamma \\ 1-\beta-2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2} = \gamma, \sigma_3(\alpha) = -1-\alpha+2\gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = 1-\beta-2\gamma = -1-\beta+$ $+(2-2\gamma) = \sigma_2(-1-\alpha+2\gamma) = \sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma) = \gamma = \sigma_2(1-\gamma) = \sigma_2^3(\gamma)$. Существует такое μ_4, что

$$G_6'\vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\beta-2\gamma \\ \alpha \\ 1-\gamma \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = 1-\beta-2\gamma = -1-\beta+(2-2\gamma) = \sigma_2(-1-\alpha+2\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = 1-(-1-\alpha+2\gamma)-(2-2\gamma) = \sigma_2(1-\beta-2\gamma) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = 1-\gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\mathrm{Tr}(\alpha) = 0$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathbf{CF}_6'$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathbf{CF}_7'$. Тогда

$$G_7'\vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ \frac{1}{2}(3-\alpha-\sigma^2(\alpha)) \end{pmatrix}, \quad G_7'\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ \frac{1}{2}(3-\sigma(\alpha)-\sigma^3(\alpha)) \end{pmatrix},$$

$$G_7'\vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ \frac{1}{2}(3-\sigma^2(\alpha)-\alpha) \end{pmatrix}, \quad G_7'\vec{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ \frac{1}{2}(3-\sigma^3(\alpha)-\sigma(\alpha)) \end{pmatrix},$$

то есть $G_7'\big(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4\big) = \big(\vec{l}_2,\vec{l}_3,\vec{l}_4,\vec{l}_1\big)$. Следовательно, G_7' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Обратно, предположим, что G_7' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{F}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$G_7'\vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -1-\alpha+2\gamma \\ 2-\gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $-1-\alpha+2\gamma = \sigma_2(\beta)$, $2-\gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3, что

$$G_7'\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\alpha+2\gamma \\ 3-\beta-2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2} = \gamma, \sigma_3(\alpha) = -1-\alpha+2\gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = 3-\beta-2\gamma = -1-\beta+$ $+(4-2\gamma) = \sigma_2(-1-\alpha+2\gamma) = \sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma) = \gamma = \sigma_2(2-\gamma) = \sigma_2^3(\gamma)$. Существует такое μ_4, что

$$G_7'\vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3-\beta-2\gamma \\ \alpha \\ 2-\gamma \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = 3-\beta-2\gamma = -1-\beta+(4-2\gamma) = \sigma_2(-1-\alpha+2\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = 3-(-\alpha+2\gamma-1)-(4-2\gamma) = \sigma_2(3-\beta-2\gamma) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = 2-\gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\mathrm{Tr}(\alpha) = 2$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathbf{CF}_7'$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$. $\square$

6. Доказательство теорем 3 и 4

Обозначим для каждого $i = 1,\ldots,10$ через $\overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_i}$ образ $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$ при действии группы $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$:

$$\overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_i} = \Big\{\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathfrak{A}_3 \,\Big|\, \exists X \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}) : X\big(\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_i\Big\}.$$

Также обозначим для каждого $i = 1,\ldots,7$ через $\overline{\mathbf{CF}_i'}$ образ $\mathbf{CF}_i'$ при действии группы $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$:

$$\overline{\mathbf{CF}_i'} = \Big\{\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathfrak{A}_3' \,\Big|\, \exists X \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}) : X\big(\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \mathbf{CF}_i'\Big\}.$$

Лемма 11. *Для дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathfrak{A}_3$ выполняется условие (i) теоремы 3 и $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathfrak{A}_3$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ принадлежит классу $\overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_i}$, где $i \in \{1,2,\ldots,10\}$.*

Лемма 12. *Для дроби $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathfrak{A}_3$ выполняется условие (i) теоремы 4 и $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathfrak{A}_3'$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ принадлежит классу $\overline{\mathbf{CF}_i'}$, где $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$.*

Доказательство. [Доказательство леммы 11 и леммы 12] Для любого $X \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ гиперболичность оператора $A \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ равносильна гиперболичности оператора XAX^{-1}. При этом собственные подпространства гиперболического оператора однозначно восстанавливаются по любому его собственному вектору. Остаётся воспользоваться определением эквивалентности из параграфа 1. $\square$

Теорему 3 при помощи леммы 11 можно переформулировать следующим образом: *дробь* $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ *имеет собственную симметрию* G *тогда и только тогда, когда она принадлежит одному из классов* $\overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_i}$, *где* $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

Аналогично, теорему 4 при помощи леммы 12 можно переформулировать следующим образом: *дробь* $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ *имеет собственную симметрию* G *тогда и только тогда, когда она принадлежит одному из классов* $\overline{\mathbf{CF}'_i}$, *где* $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$.

Доказательство. [Доказательство теоремы 3] Если $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ принадлежит какому-то $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$, то по лемме 9 она имеет собственную симметрию G, ибо действие оператора из $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ сохраняет свойство существования у алгебраической цепной дроби собственной симметрии.

Обратно, пусть дробь $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ имеет собственную симметрию G. Положим $F = G'$ и рассмотрим точки $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\vec{z}_4$ из леммы 7. Обозначим также через $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ стандартный базис $\mathbb{R}^4$. Для точек $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\vec{z}_4$ выполняется хотя бы одно из утверждений (1) - (11) леммы 7.

Пусть выполняется утверждение (1) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_1 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_1\big(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4)\big) = \big(\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1\big).$$

Тогда $X_1(\vec{z}_4) = X_1(4 \cdot \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4) - \vec{z}_1 - \vec{z}_2 - \vec{z}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ и $X_1 G X_1^{-1} = \widetilde{G_1}$, так как по лемме 7

$$X_1 G X_1^{-1}\big(\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3\big) =$$
$$\big(\vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_1\big(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_1$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_1}$.

Пусть выполняется утверждение (2) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_2 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_2\big(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4\big) = \big(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2\big).$$

Тогда $X_2 G X_2^{-1} = \widetilde{G_2}$, так как по лемме 7

$$X_2 G X_2^{-1}\big(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2\big) =$$
$$\big(\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_2\big(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_2$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_2}$.

Пусть выполняется утверждение (3) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_3 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_3\big(\vec{z}_1, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2), \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4)\big) = \big(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2\big).$$

Тогда $X_3(\vec{z}_2) = X_3(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) - \vec{z}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_4$, $X_3(\vec{z}_3) = X_3(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3) - \vec{z}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$, $X_3(\vec{z}_4) = X_3(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4) - \vec{z}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ и $X_3 G X_3^{-1} = \widetilde{G_3}$, так как по лемме 7

$$X_3 G X_3^{-1}\big(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2\big) =$$
$$\big(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_3\big(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_3$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_3}$.

Пусть выполняется утверждение (4) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_4 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_4\big(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4)\big) = \big(\vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1\big).$$

Тогда $X_4(\vec{z}_3) = X_4(2\cdot\frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_3)-\vec{z}_1) = \vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3+\vec{e}_4$, $X_4(\vec{z}_4) = X_4(4\cdot\frac{1}{4}(\vec{z}_1+\vec{z}_2+\vec{z}_3+\vec{z}_4)-\vec{z}_1-\vec{z}_2-\vec{z}_3) = \vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_4$ и $X_4GX_4^{-1} = \widetilde{G_4}$, так как по лемме 7

$$X_4GX_4^{-1}\big(\vec{e}_1-\vec{e}_3+\vec{e}_4, \vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3-\vec{e}_4, \vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3+\vec{e}_4, \vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_4\big) =$$

$$\big(\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3+\vec{e}_4, \vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_4, \vec{e}_1-\vec{e}_3+\vec{e}_4, \vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3-\vec{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_4\big(\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_4$, то есть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_4}$.

Пусть выполняется утверждение (5) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_5 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_5\big(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_3), \frac{1}{2}(\vec{z}_2+\vec{z}_4)\big) = \big(\vec{e}_1, \vec{e}_1+\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_3, \vec{e}_1+\vec{e}_2\big).$$

Тогда $X_5(\vec{z}_3) = X_5(2\cdot\frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_3)-\vec{z}_1) = \vec{e}_1+2\vec{e}_3$, $X_5(\vec{z}_4) = X_5(2\cdot\frac{1}{2}(\vec{z}_2+\vec{z}_4)-\vec{z}_2) = \vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_4$ и $X_5GX_5^{-1} = \widetilde{G_5}$, так как по лемме 7

$$X_5GX_5^{-1}\big(\vec{e}_1, \vec{e}_1+\vec{e}_4, \vec{e}_1+2\vec{e}_3, \vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_4\big) =$$

$$\big(\vec{e}_1+2\vec{e}_3, \vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_1+\vec{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_5\big(\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_5$, то есть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_5}$.

Пусть выполняется утверждение (6) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_6 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_6\big(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_3+\vec{z}_4-\vec{z}_2)\big) =$$

$$\big(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_1-\vec{e}_3+\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_4\big).$$

Тогда $X_6(\vec{z}_4) = X_6(2\cdot\frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_3+\vec{z}_4-\vec{z}_2)-\vec{z}_1+\vec{z}_2-\vec{z}_3) = \vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$ и $X_6GX_6^{-1} = \widetilde{G_6}$, так как по лемме 7

$$X_6GX_6^{-1}\big(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_1-\vec{e}_3+\vec{e}_4, \vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3\big) =$$

$$\big(\vec{e}_1-\vec{e}_3+\vec{e}_4, \vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3, \vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_4, \vec{e}_1\big).$$

Стало быть, $X_6\big(\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_6$, то есть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_6}$.

Пусть выполняется утверждение (7) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_7 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_7\big(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_2)+\frac{1}{4}(\vec{z}_1+\vec{z}_4-\vec{z}_3-\vec{z}_2)\big) =$$

$$\big(\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3+2\vec{e}_4, \vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3, \vec{e}_1+2\vec{e}_2+2\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_4\big).$$

Тогда $X_7(\vec{z}_4) = X_7(4(\frac{3\vec{z}_1+\vec{z}_2-\vec{z}_3+\vec{z}_4}{4})-3\vec{z}_1-\vec{z}_2+\vec{z}_3) = \vec{e}_1+\vec{e}_3$ и $X_7GX_7^{-1} = \widetilde{G_7}$, так как по лемме 7

$$X_7GX_7^{-1}\big(\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3+2\vec{e}_4, \vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3, \vec{e}_1+2\vec{e}_2+2\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_3\big) =$$

$$\big(\vec{e}_1+2\vec{e}_2+2\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_3, \vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3+2\vec{e}_4, \vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3\big).$$

Стало быть, $X_7\big(\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_7$, то есть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_7}$.

Пусть выполняется утверждение (8) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_8 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_8\big(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{2}(\vec{z}_2+\vec{z}_4)\big) = \big(\vec{e}_1, \vec{e}_1+\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_3, \vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_4\big).$$

Тогда $X_8(\vec{z}_4) = X_8(2\cdot\frac{1}{2}(\vec{z}_2+\vec{z}_4)-\vec{z}_2 = \vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_4$ и $X_8GX_8^{-1} = \widetilde{G_8}$, так как по лемме 7

$$X_8GX_8^{-1}\big(\vec{e}_1, \vec{e}_1+\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_3, \vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_4\big) =$$

$$\big(\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_8\big(\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_8$, то есть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_8}$.

Пусть выполняется утверждение (9) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_9 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_9\big(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{4}\vec{z}_1 + \frac{1}{2}\vec{z}_2 - \frac{1}{4}\vec{z}_3 + \frac{1}{2}\vec{z}_4\big) = \big(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4\big).$$

Тогда $X_9(\vec{z}_3) = X_9(2\cdot\frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_3)-\vec{z}_1) = \vec{e}_1+2\vec{e}_3$, $X_9(\vec{z}_4) = X_9(2\cdot(\frac{1}{4}\vec{z}_1+\frac{1}{2}\vec{z}_2-\frac{1}{4}\vec{z}_3+\frac{1}{2}\vec{z}_4)-\frac{1}{2}\vec{z}_1-\vec{z}_2+$ $+\frac{1}{2}\vec{z}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$ и $X_9GX_9^{-1} = \widetilde{G_9}$, так как по лемме 7

$$X_9GX_9^{-1}\big(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\big) =$$

$$\big(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_9\big(\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_9$, то есть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_9}$.

Пусть выполняется утверждение (10) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_{10} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_{10}\big(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{2}\vec{z}_1 + \frac{1}{4}\vec{z}_2 + \frac{1}{4}\vec{z}_4\big) = \big(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2\big).$$

Тогда $X_{10}(\vec{z}_3) = X_{10}(2\cdot\frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_3)-\vec{z}_1 = \vec{e}_1+2\vec{e}_3$, $X_{10}(\vec{z}_4) = X_{10}(4\cdot(\frac{1}{2}\vec{z}_1+\frac{1}{4}\vec{z}_2+\frac{1}{4}\vec{z}_4)-2\vec{z}_1-\vec{z}_2) = \vec{e}_1+$ $+4\vec{e}_2 - \vec{e}_4$ и $X_{10}GX_{10}^{-1} = \widetilde{G_{10}}$, так как по лемме 7

$$X_{10}GX_{10}^{-1}\big(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_4\big) =$$

$$\big(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_{10}\big(\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}_{10}}$, то есть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}_{10}}}$.

Пусть выполняется утверждение (11) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_{11} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_{11}\big(\vec{z}_1, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2), \vec{z}_3, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 - \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4)\big) = \big(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_4\big).$$

Тогда $X_{11}(\vec{z}_2) = X_{11}(2\cdot\frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_2)-\vec{z}_1) = \vec{e}_1+2\vec{e}_4$, $X_{11}(\vec{z}_4) = X_{11}(2\cdot\frac{1}{2}(\vec{z}_1-\vec{z}_2+\vec{z}_3+\vec{z}_4)-\vec{z}_1+\vec{z}_2-\vec{z}_3)=$ $=\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ и $X_{11}GX_{11}^{-1} = \widetilde{G_2}$, так как по лемме 7

$$X_{11}GX_{11}^{-1}\big(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3\big) =$$

$$\big(\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_{11}\big(\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_2$, то есть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_2}$. $\square$

Доказательство. [Доказательство теоремы 4] Если $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ принадлежит какому-то $\overline{\mathbf{CF}}_i$, то по лемме 10 она имеет собственную циклическую симметрию G, ибо действие оператора из $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ сохраняет свойство существования у алгебраической цепной дроби собственной циклической симметрии.

Обратно, пусть дробь $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathfrak{A}_3$ имеет собственную циклическую симметрию G с неподвижной точкой на некотором парусе $\partial(\mathcal{K}(C)) \in \mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Рассмотрим точки $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\vec{z}_4$ из леммы 8. Обозначим также через $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ стандартный базис $\mathbb{R}^4$. Для точек $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, $\vec{z}_3$, $\vec{z}_4$ выполняется хотя бы одно из утверждений (1) - (7) леммы 8.

Пусть выполняется утверждение (1) леммы 8. Рассмотрим такой оператор $X_1 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_1\big(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4)\big) = \big(\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1\big).$$

Тогда $X_1(\vec{z}_4) = X_1(4\cdot\frac{1}{4}(\vec{z}_1+\vec{z}_2+\vec{z}_3+\vec{z}_4)-\vec{z}_1-\vec{z}_2-\vec{z}_3) = \vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3$ и $X_1GX_1^{-1} = G_1'$, так как по лемме 8

$$X_1GX_1^{-1}\big(\vec{e}_1-\vec{e}_2, \vec{e}_1+\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_3-\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3\big) = \big(\vec{e}_1+\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_3-\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3, \vec{e}_1-\vec{e}_2\big).$$

Стало быть, $X_1\big(\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \mathbf{CF}_1'$, то есть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\mathbf{CF}_1'}$.

Пусть выполняется утверждение (2) леммы 8. Рассмотрим такой оператор $X_2 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_2\big(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4\big) = \big(\vec{e}_1, \vec{e}_1+\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_3, \vec{e}_1+\vec{e}_2\big).$$

Тогда $X_2GX_2^{-1} = G_2'$, так как по лемме 8

$$X_2GX_2^{-1}\big(\vec{e}_1, \vec{e}_1+\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_3, \vec{e}_1+\vec{e}_2\big) = \big(\vec{e}_1+\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_3, \vec{e}_1+\vec{e}_2, \vec{e}_1\big).$$

Стало быть, $X_2\big(\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \mathbf{CF}_2'$, то есть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\mathbf{CF}_2'}$.

Пусть выполняется утверждение (3) леммы 8. Рассмотрим такой оператор $X_3 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_3\Big(\vec{z}_1, \frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_2), \frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_3), \frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_4)\Big) = \big(\vec{e}_1, \vec{e}_1+\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_3, \vec{e}_1+\vec{e}_2\big).$$

Тогда $X_3(\vec{z}_2) = X_3(2\cdot\frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_2)-\vec{z}_1) = \vec{e}_1+2\vec{e}_4$, $X_3(\vec{z}_3) = X_3(2\cdot\frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_3)-\vec{z}_1) = \vec{e}_1+2\vec{e}_3$, $X_3(\vec{z}_4) = X_3(2\cdot\frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_4)-\vec{z}_1) = \vec{e}_1+2\vec{e}_2$ и $X_3GX_3^{-1} = G_3'$, так как по лемме 8

$$X_3GX_3^{-1}\big(\vec{e}_1, \vec{e}_1+2\vec{e}_4, \vec{e}_1+2\vec{e}_3, \vec{e}_1+2\vec{e}_2\big) = \big(\vec{e}_1+2\vec{e}_4, \vec{e}_1+2\vec{e}_3, \vec{e}_1+2\vec{e}_2, \vec{e}_1\big).$$

Стало быть, $X_3\big(\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \mathbf{CF}_3'$, то есть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\mathbf{CF}_3'}$.

Пусть выполняется утверждение (4) леммы 8. Рассмотрим такой оператор $X_4 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_4\Big(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_3), \frac{1}{4}(\vec{z}_1+\vec{z}_2+\vec{z}_3+\vec{z}_4)\Big) = \big(\vec{e}_1-\vec{e}_3+\vec{e}_4, \vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3-\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3+\vec{e}_4, \vec{e}_1\big).$$

Тогда $X_4(\vec{z}_3) = X_4(2\cdot\frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_3)-\vec{z}_1) = \vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3+\vec{e}_4$, $X_4(\vec{z}_4) = X_4(4\cdot\frac{1}{4}(\vec{z}_1+\vec{z}_2+\vec{z}_3+\vec{z}_4)-\vec{z}_1-\vec{z}_2-\vec{z}_3) = \vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_4$ и $X_4GX_4^{-1} = G_4'$, так как по лемме 8

$$X_4GX_4^{-1}\big(\vec{e}_1-\vec{e}_3+\vec{e}_4, \vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3-\vec{e}_4, \vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3+\vec{e}_4, \vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_4\big) = \big(\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3-\vec{e}_4, \vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3+\vec{e}_4, \vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_4, \vec{e}_1-\vec{e}_3+\vec{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_4\big(\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \mathbf{CF}_4'$, то есть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\mathbf{CF}_4'}$.

Пусть выполняется утверждение (5) леммы 8. Рассмотрим такой оператор $X_5 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_5\Big(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_3), \frac{1}{2}(\vec{z}_2+\vec{z}_4)\Big) = \big(\vec{e}_1, \vec{e}_1+\vec{e}_4, \vec{e}_1+\vec{e}_3, \vec{e}_1+\vec{e}_2\big).$$

Тогда $X_5(\vec{z}_3) = X_5(2\cdot\frac{1}{2}(\vec{z}_1+\vec{z}_3)-\vec{z}_1) = \vec{e}_1+2\vec{e}_3$, $X_5(\vec{z}_4) = X_5(2\cdot\frac{1}{2}(\vec{z}_2+\vec{z}_4)-\vec{z}_2) = \vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_4$ и $X_5GX_5^{-1} = G_5'$, так как по лемме 8

$$X_5GX_5^{-1}\big(\vec{e}_1, \vec{e}_1+\vec{e}_4, \vec{e}_1+2\vec{e}_3, \vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_4\big) = \big(\vec{e}_1+\vec{e}_4, \vec{e}_1+2\vec{e}_3, \vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_4, \vec{e}_1\big).$$

Стало быть, $X_5\big(\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \mathbf{CF}_5'$, то есть $\mathcal{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\mathbf{CF}_5'}$.

Пусть выполняется утверждение (6) леммы 8. Рассмотрим такой оператор $X_6 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_6\big(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 - \vec{z}_2)\big) =$$

$$\big(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_4\big).$$

Тогда $X_6(\vec{z}_4) = X_6(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 - \vec{z}_2) - \vec{z}_1 + \vec{z}_2 - \vec{z}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ и $X_6 G X_6^{-1} = G_6'$, так как по лемме 8

$$X_6 G X_6^{-1}\big(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3\big) =$$

$$\big(\vec{e}_1, \vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_6\big(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)\big) \in \mathbf{CF}_6'$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\mathbf{CF}_6'}$.

Пусть выполняется утверждение (7) леммы 8. Рассмотрим такой оператор $X_7 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_7\big(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) + \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4 - \vec{z}_3 - \vec{z}_2)\big) =$$

$$\big(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_4\big).$$

Тогда $X_7(\vec{z}_4) = X_7(4(\frac{3\vec{z}_1 + \vec{z}_2 - \vec{z}_3 + \vec{z}_4}{4}) - 3\vec{z}_1 - \vec{z}_2 + \vec{z}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ и $X_7 G X_7^{-1} = G_7'$, так как по лемме 8

$$X_7 G X_7^{-1}\big(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3\big) =$$

$$\big(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_7\big(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)\big) \in \mathbf{CF}_7'$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3,$
$l_4) \in \overline{\mathbf{CF}_7'}$. $\square$

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность О. Н. Герману за многочисленные обсуждения результатов и интерес к настоящей работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Klein F. Uber eine geometrische Auffassung der gewohnlichen Kettenbruchentwichlung // Nachr. Ges. Wiss., Gottingen. 1895. Vol. 1895. P. 357–359.

2. Коркина Е. И. Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры // Особенности гладких отображений с дополнительными структурами, Сборник статей, Тр. МИАН, Наука, Физматлит, М. 1995. Т. 209, С. 143–166

3. Герман О. Н. Паруса и норменные минимумы решеток // Матем. сб. 2005. Т 196, вып. 3, С. 31–60

4. German O. N. Klein polyhedra and lattices with positive norm minima // Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. 2007. Vol. 19. P. 157–190.

5. Karpenkov O. N. Geometry of Continued Fractions // Algorithms and Computation in Mathematics. Springer-Verlag. 2013. Vol. 26.

6. Герман О. Н., Тлюстангелов И. А. Симметрии двумерной цепной дроби // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85, вып. 4, С. 53–68.

7. German O. N., Tlyustangelov I. A. Palindromes and periodic continued fractions // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2016. Vol. 6, №2–3. P. 354–373.

8. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел // Наука 1964.

9. Galois É. Demonstration d'un theoreme sur les fractions continues periodiques // Ann. Math. Pures Appl. [Ann. Gergonne]. 1828. Vol. 19. P. 294–301.

10. Legendre A. M. Théorie des nombres. (3 ed.) // Firmin Didot Fréres, Libraires, Paris. 1830.

11. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I. (3 Aufl.) // B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart. 1954.

12. Kraitchik M. Théorie des nombres. Tome II // Analyse indéterminée du second degré et factorisation, Gauthier-Villars, Paris. 1926.

13. Тлюстангелов И. А. Собственные симметрии трехмерных цепных дробей // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2022. Т. 506, вып. 1, С. 73–82.

14. Тлюстангелов И. А. Собственные циклические симметрии многомерных цепных дробей // Матем. сб. 2022. Т. 213, вып. 9, С. 138–166.

REFERENCES

1. Klein, F. 1895, "Uber eine geometrische Auffassung der gewohnlichen Kettenbruchentwichlung", *Nachr. Ges. Wiss.*, Gottingen, vol. 1895, no. 3, pp. 357-359.

2. Korkina, E. I. 1995, "Two-dimensional continued fractions. The simplest examples", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 209, pp. 124-144.

3. German, O. N. 2005, "Sails and norm minima of lattices", *Sbornik: Mathematics*, vol. 196, no. 3, pp. 31-60.

4. German, O. N. 2007, "Klein polyhedra and lattices with positive norm minima", *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, vol. 19, pp. 157-190.

5. Karpenkov, O. N. 2013, "Geometry of Continued Fractions", *Algorithms and Computation in Mathematics*, Springer-Verlag, vol. 26.

6. German, O. N., Tlyustangelov, I. A. 2021, "Symmetries of a two-dimensional continued fraction", *Izv. Math*, vol. 85, no. 4, pp. 666-680.

7. German, O. N., Tlyustangelov, I. A. 2016, "Palindromes and periodic continued fractions", *Mosc. J. Comb. Number Theory*, vol. 6, no. 2-3, pp. 233-252.

8. Borevich, Z. I., Shafarevich, I. R. 1966, "Number theory", *Pure Appl. Math.*, Academic Press, New York–London, vol. 20.

9. Galois, É. 1828, "Demonstration d'un theoreme sur les fractions continues periodiques", *Ann. Math. Pures Appl. [Ann. Gergonne]*, vol. 19, pp. 294-301.

10. Legendre, A. M. 1830, "Théorie des nombres. (3 ed.)", *Firmin Didot Fréres, Libraires*, Paris.

11. Perron, O. 1954, "Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I. (3 Aufl.)", *B. G. Teubner Verlagsgesellschaft*, Stuttgart.

12. Kraitchik, M. 1926, “Théorie des nombres. Tome II”, *Analyse indéterminée du second degré et factorisation*, Gauthier-Villars, Paris.

13. Tlyustangelov, I. A. 2022, “Proper symmetries of 3-dimensional continued fractions”, *Doklady Mathematics*, vol. 506, no. 1, pp. 73-82.

14. Tlyustangelov, I. A. 2022, “Proper cyclic symmetries of multidimensional continued fractions”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 213, no. 9, pp. 138-166.

Получено: 14.09.2022
Принято в печать: 24.04.2023