

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 517.547.2

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-127-138

**Усиление леммы Гайсина о минимуме модуля
четных канонических произведений¹**

А. Ю. Попов, В. Б. Шерстюков

Попов Антон Юрьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

e-mail: ayropov.msu@yandex.ru

Шерстюков Владимир Борисович — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

e-mail: sherub73@gmail.com

Аннотация

Рассматриваются целые функции, являющиеся четными каноническими произведениями нулевого рода, все корни которых расположены на действительной оси. Изучается вопрос об оценке снизу минимума модуля таких функций на окружности через некоторую отрицательную степень максимума модуля на той же окружности, когда радиус окружности пробегает отрезки с постоянным отношением концов. В 2002 году А. М. Гайсин, исправляя ошибочные рассуждения М. А. Евграфова из книги «Асимптотические оценки и целые функции», доказал, что для каждой функции рассматриваемого класса существует последовательность окружностей, радиусы которых стремятся к бесконечности, отношение последующего радиуса к предыдущему меньше 4, и эти окружности таковы, что на каждой из них минимум модуля функции превосходит -20 -ю степень максимума ее модуля. Этот результат усилен нами в трех направлениях. Во-первых, показатель -20 заменен на -2 . Во-вторых, мы доказали, что радиусы окружностей, на которых минимум модуля функции превосходит -2 -ю степень максимума ее модуля, встречаются на каждом интервале, отношение концов которого равно 3. В-третьих, мы выяснили, что обсуждаемое неравенство верно для функций изучаемого класса «в среднем». Последнее означает, что если взять логарифм произведения минимума модуля функции на окружности на квадрат максимума ее модуля, разделить на куб радиуса и проинтегрировать по всем радиусам, принадлежащим произвольному отрезку с отношением концов, равным 3, то получится положительная величина.

Ключевые слова: каноническое произведение, минимум модуля, максимум модуля.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

А. Ю. Попов, В. Б. Шерстюков. Усиление леммы Гайсина о минимуме модуля четных канонических произведений // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 127–138.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00545) в МГУ имени М. В. Ломоносова.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 517.547.2

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-127-138

Strengthening of Gaisin's lemma on the minimum modulus of even canonical products

A. Yu. Popov, V. B. Sherstyukov

Popov Anton Yur'evich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).

e-mail: aypopov.msu@yandex.ru

Sherstyukov Vladimir Borisovich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).

e-mail: shervb73@gmail.com

Abstract

We consider entire functions that are even canonical products of zero genus, all roots of which are located on the real axis. We study the question of lower bound the minimum modulus of such functions on the circle in terms of some negative power of the maximum modulus on the same circle, when the radius of the circle runs through segments with a constant ratio of ends. In 2002 A. M. Gaisin, correcting the erroneous reasoning of M. A. Evgrafov from the book «Asymptotic estimates and entire functions», proved that for each function of the class under consideration there exists a sequence of circles, whose radii tend to infinity, the ratio of the subsequent radius to the previous one is less than 4, and these circles are such that on each of them the minimum modulus of the function exceeds the -20 -th power of the maximum of its modulus. This result is strengthened by us in three directions. First, the exponent -20 has been replaced by -2 . Secondly, we proved that the radii of the circles on which the minimum modulus of the function exceeds the -2 -th power maximum of its modulus occur on every interval whose end ratio is 3. Thirdly, we found out that the discussed inequality is true for the functions of the class under study «on average». The latter means that if we take the logarithm of the product of the minimum modulus of a function on a circle and the square of its maximum modulus, divide by the cube of the radius and integrate over all radii belonging to an arbitrary segment with an end ratio of 3, it will be a positive value.

Keywords: canonical product, minimum modulus, maximum modulus.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

A. Yu. Popov, V. B. Sherstyukov 2023, "Strengthening of Gaisin's lemma on the minimum modulus of even canonical products", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 127–138.

1. Введение

В статье рассматриваются четные канонические произведения

$$L(w) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w^2}{\mu_n^2}\right), \quad w \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

корни которых $\{\pm \mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ лежат на действительной оси, и последовательность $\{\mu_n\}$ удовлетворяет условию

$$\mu_1 > 0, \quad \mu_n \leq \mu_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} < +\infty. \quad (2)$$

Ввиду (2) произведение (1) равномерно сходится на любом компакте в $\mathbb{C}$ и, следовательно, является целой функцией. Для любой целой функции f рассмотрим величины

$$m(f; r) = \min_{|z|=r} |f(z)|, \quad M(f; r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z| \leq r} |f(z)|.$$

В силу положительности чисел μ_n для произведений (1) имеем

$$m(L; r) = |L(r)|, \quad M(L; r) = L(ir) \quad \forall r > 0. \quad (3)$$

В [1; § 2, лемма 2] А. М. Гайсин доказал следующее утверждение.

Для произвольной функции (1), корни которой удовлетворяют условию (2), существует возрастающая и стремящаяся к $+\infty$ последовательность r_n , такая, что

$$1) \ r_n < r_{n+1} < 4r_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2) \ m(L; r_n) > M^{-20}(L; r_n).$$

С помощью этой леммы Гайсин оценил поведение специального бесконечного произведения. Это помогло ему решить восходящую к [2] проблему Пойа о нахождении условий на последовательность перемен знака коэффициентов вещественного степенного ряда с бесконечным радиусом сходимости, гарантирующих наличие последовательности $x_n \rightarrow +\infty$, в которой для суммы f степенного ряда верна эквивалентность

$$\ln |f(x_n)| \sim \ln M(f; x_n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Однако задачи оптимальных оценок минимума модуля на окружностях для целых функций через степени их максимума модуля (или мажоранты максимума модуля) имеют самостоятельный интерес и давно изучаются специалистами (см., например, [3]–[8]). Одним из центральных результатов теории является знаменитая $\cos(\pi\rho)$ -теорема, согласно которой для произвольной отличной от тождественной константы целой функции f порядка $\rho \in [0, 1]$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность положительных чисел $r_n \rightarrow +\infty$, что выполняется неравенство

$$m(f; r_n) > (M(f; r_n))^{\cos(\pi\rho) - \varepsilon}.$$

Подчеркнем, что в этом утверждении нет ограничений на величину r_{n+1}/r_n . Принципиально иные результаты получаются при требовании наличия соответствующей оценки на любом отрезке с постоянным отношением его концов. Исследования в этом направлении почти не проводились. Известное нам исключение, помимо статьи [1] (см. также комментарий после теоремы 1 в разделе 2), составляет лишь работа А. О. Гельфонда [6]. Восполнение указанного пробела начато публикациями последнего времени [9]–[11]. За дополнительными историческими подробностями отсылаем к [11].

Вернемся к основной линии. Мы усилили цитированный результат Гайсина в трех направлениях. Во-первых, показатель -20 в оценке минимума модуля через степень максимума заменен на -2 . Во-вторых, уменьшена верхняя граница для r_{n+1}/r_n , и, в третьих, доказано, что произведение $m(L; r) M^2(L; r)$ в определенном смысле превосходит 1 «в среднем» на любом отрезке, отношение концов которого равно 3.

2. Оценка минимума модуля в среднем

Сформулируем основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условию (2), L — функция, заданная формулой (1). Тогда при любом $R > 0$ выполнено неравенство

$$\int_R^{3R} \frac{\ln(m(L; r) M^2(L; r))}{r^3} dr > 0. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (1), (3) при каждом $r > 0$ имеем

$$\ln(m(L; r) M^2(L; r)) = \ln |L(r)| + 2 \ln L(ir) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left| 1 - \frac{r^2}{\mu_n^2} \right| + 2 \ln \left(1 + \frac{r^2}{\mu_n^2} \right) \right). \quad (5)$$

Умножим обе части тождества (5) на r^{-3} и проинтегрируем по отрезку $[R, 3R]$ с фиксированным $R > 0$. Возможность почленного интегрирования ряда обосновывается стандартным образом (см., например, [11; § 3, доказательство леммы 3.1]). Получим равенство

$$J(R) \equiv \int_R^{3R} \frac{\ln(m(L; r) M^2(L; r))}{r^3} dr = \sum_{n=1}^{\infty} \int_R^{3R} \frac{\ln \left| 1 - \frac{r^2}{\mu_n^2} \right| + 2 \ln \left(1 + \frac{r^2}{\mu_n^2} \right)}{r^3} dr.$$

Сделав в n -ом интеграле замену переменной $\mu_n^{-2} r^2 = t$ и обозначив $\mu_n^{-2} = c_n$, придем к следующему представлению интеграла $J(R)$:

$$J(R) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{c_n R^2}^{9c_n R^2} \frac{\ln |1 - t| + 2 \ln(1 + t)}{t^2} dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi(c_n R^2),$$

где

$$\Phi(x) \equiv \int_x^{9x} \frac{\ln |1 - t| + 2 \ln(1 + t)}{t^2} dt = \int_x^{9x} \frac{\ln |1 - t^2| + \ln(1 + t)}{t^2} dt, \quad x > 0.$$

Поскольку (см. (2)) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, а функция Φ ограничена² на $(0, +\infty)$, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi(c_n R^2)$ является абсолютно сходящимся, каково бы ни было значение $R > 0$.

Итак, для доказательства заявленного неравенства (4) осталось проверить положительность $\Phi(x)$ при любом $x > 0$.

При $x \geq 1$ положительной является даже функция $F(x) \equiv \int_x^{9x} t^{-2} \ln(t^2 - 1) dt$ (очевидно, меньшая $\Phi(x)$). Действительно, на луче $(\sqrt{2}, +\infty)$ положительность $F(x)$ следует из положительности $\ln(t^2 - 1)$ на том же луче, а на отрезке $[1, \sqrt{2}]$ функция $F(x)$ возрастает (это

²Ниже доказана положительность функции Φ . Ее ограниченность сверху (например, числом $\ln(3 + \sqrt{8}) + \ln 9$) следует из соотношений

$$\int_x^{9x} t^{-2} \ln(1 + t) dt < \int_x^{9x} t^{-1} dt = \ln 9, \quad \min_{x > 0} \int_0^x t^{-2} \ln |1 - t^2| dt = \int_0^{\sqrt{2}} t^{-2} \ln |1 - t^2| dt = -\ln(3 + \sqrt{8}).$$

непосредственно проверяется дифференцированием) и, следовательно,

$$F(x) \geq F(1) = \int_1^9 \frac{\ln(t^2 - 1)}{t^2} dt > \int_1^3 \frac{\ln(t^2 - 1)}{t^2} dt = 0.$$

Положительность функции Φ на полуинтервале $(0, 1/9]$ доказывается так. Ввиду неравенств

$$\ln(1 - t^2) < 0, \quad \ln(1 + t) > t - t^2/2 \quad \forall t \in (0, 1)$$

имеем

$$\Phi(x) > \int_0^1 \frac{\ln(1 - t^2)}{t^2} dt + \int_x^{9x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) dt = \ln \frac{9}{4} - 4x \geq \ln \frac{9}{4} - \frac{4}{9} > 0.3.$$

Сложнее доказать положительность $\Phi(x)$ на интервале $(1/9, 1)$. Сперва покажем, что производная $\Phi'(x)$ имеет на этом интервале единственный корень — обозначим его x_0 — причем

$$\Phi'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in (1/9, x_0), \quad \Phi'(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in (x_0, 1). \quad (6)$$

Вместе с непрерывностью функции Φ на отрезке $[1/9, 1]$ это даст равенство

$$\min \{ \Phi(x) \mid 1/9 \leq x \leq 1 \} = \Phi(x_0). \quad (7)$$

Имеем

$$\Phi'(x) = \frac{\ln(81x^2 - 1) + \ln(9x + 1)}{9x^2} - \frac{\ln(1 - x^2) + \ln(1 + x)}{x^2}.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi_1(x) \equiv x^2 \Phi'(x) = \frac{1}{9} (\ln(81x^2 - 1) + \ln(9x + 1)) - \ln(1 - x^2) - \ln(1 + x).$$

Она возрастает на интервале $(1/9, 1)$, поскольку

$$\Phi_1'(x) = \frac{18x}{81x^2 - 1} + \frac{1}{9x + 1} + \frac{2x}{1 - x^2} - \frac{1}{1 + x} = \frac{8x((5x - 1)^2 + 2x^2 + 2)}{(81x^2 - 1)(1 - x^2)} > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{9}, 1 \right).$$

А так как $\lim_{x \rightarrow 1/9+} \Phi_1(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-} \Phi_1(x) = +\infty$, то

$$\exists x_0 \in (1/9, 1) : \Phi_1(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in (1/9, x_0), \quad \Phi_1(x_0) = 0, \quad \Phi_1(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in (x_0, 1). \quad (8)$$

Из (8) следует (6), и равенство (7) доказано. Точно найти x_0 мы не можем, но непосредственным вычислением эта точка локализуется (тривиальные, но довольно громоздкие выкладки мы опускаем):

$$\Phi_1\left(\frac{1}{7}\right) < 0, \quad \Phi_1\left(\frac{1}{6}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{7} < x_0 < \frac{1}{6}. \quad (9)$$

Точно так же убеждаемся в справедливости неравенства

$$\Phi_1\left(\frac{1}{6}\right) < \frac{1}{100}. \quad (10)$$

Вычислим, а потом оценим снизу значение $\Phi(1/6)$. Имеем

$$\begin{aligned}\Phi_1\left(\frac{1}{6}\right) &= \int_{1/6}^{3/2} \frac{\ln|1-t^2| + \ln(1+t)}{t^2} dt = \int_{1/6}^{3/2} \ln|1-t^2| d\left(1-\frac{1}{t}\right) + \int_{1/6}^{3/2} \ln(1+t) d\left(-\frac{1}{t}\right) = \\ &= \left(1-\frac{1}{t}\right) \ln|1-t^2| \Big|_{1/6}^{3/2} - \int_{1/6}^{3/2} \left(1-\frac{1}{t}\right) \frac{2t}{t^2-1} dt + \frac{\ln(1+t)}{t} \Big|_{1/6}^{3/2} + \int_{1/6}^{3/2} \frac{dt}{t(1+t)} = \\ &= \frac{1}{3} \ln \frac{5}{4} + 5 \ln \frac{35}{36} + 6 \ln \frac{7}{6} - \frac{2}{3} \ln \frac{5}{2} + \ln 9 - 3 \ln \frac{15}{7} > 0.13.\end{aligned}$$

Отсюда и из (9), (10), учитывая возрастание функции Φ_1 , получаем оценку

$$\begin{aligned}\Phi(x_0) &= \Phi\left(\frac{1}{6}\right) - \int_{x_0}^{1/6} \Phi'(x) dx = \Phi\left(\frac{1}{6}\right) - \int_{x_0}^{1/6} \frac{\Phi_1(x)}{x^2} dx > \Phi\left(\frac{1}{6}\right) - \Phi_1\left(\frac{1}{6}\right) \int_{x_0}^{1/6} \frac{dx}{x^2} > \\ &> \Phi\left(\frac{1}{6}\right) - \Phi_1\left(\frac{1}{6}\right) \int_{1/7}^{1/6} \frac{dx}{x^2} = \Phi\left(\frac{1}{6}\right) - \Phi_1\left(\frac{1}{6}\right) > 0.12,\end{aligned}$$

которая вместе с (7) демонстрирует положительность функции Φ на отрезке $[1/9, 1]$. Положительность функции Φ на луче $(0, +\infty)$ обоснована, и доказательство теоремы завершено. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы для любого $R > 0$ найдется точка $r \in (R, 3R)$, в которой выполняется неравенство

$$m(L; r) > M^{-2}(L; r). \quad (11)$$

В частности, найдется такая последовательность $r_n \rightarrow +\infty$, что

$$m(L; r_n) > M^{-2}(L; r_n), \quad r_1 \in (1, 3), \quad r_n + \frac{1}{3} < r_{n+1} < 3r_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заслуживает внимания следующее обстоятельство. Если ознакомиться с содержанием параграфа 3.5 книги [12], не воспринимая его критически, то может показаться, что следствие 1 является лишь небольшим уточнением (в весьма частном случае) давно известного результата. Пр процитируем утверждение, приведенное на стр. 236 книги [12].

Пусть F — целая функция, отличная от тождественного нуля, $\lambda > 1$ — некоторая постоянная. Тогда существует последовательность положительных чисел r_n , удовлетворяющая условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty, \quad r_n < r_{n+1} < \lambda r_n, \quad (12)$$

и такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln m(F, r_n)}{\ln M(F, r_n)} \geq -\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}. \quad (13)$$

Взяв $\lambda = 3$, получим существование такой последовательности $r_n \rightarrow +\infty$, что

$$r_n < r_{n+1} < 3r_n, \quad m(F, r_n) > M^{-2-\varepsilon_n}(F, r_n), \quad \text{где} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0. \quad (14)$$

Тем самым (с точностью до бесконечно малой в показателе) следствие 1 якобы давно известно и причем не только для произведений (1), но и для всех целых функций.

Однако это утверждение М. А. Евграфова неверно! У. Хэйман [13] предъявил целую функцию φ бесконечного порядка, для которой

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln m(\varphi, r)}{\ln M(\varphi, r)} = -\infty,$$

а значит оценки вида (13), (14) (на всем классе целых функций, как у Евграфова) нельзя получить ни на какой последовательности $r_n \rightarrow +\infty$, а уж тем более на последовательностях, удовлетворяющих ограничению (12). Результаты работы [13] показывают, что цитированное утверждение Евграфова не выполняется также для некоторых целых функций достаточно большого конечного порядка.

А. М. Гайсин, доказывая свою лемму о минимуме модуля канонических произведений (1), пользовался методом Евграфова, изложенным в [12; гл. III], но исправлял допущенные в [12] ошибки. В результате для значения $\lambda = 4$ применительно к функциям (1) Гайсин сумел получить показатель -20 . Наш метод доказательства теоремы 1 совершенно иной; мы применяли его в [11] для оценки минимума модуля канонических произведений $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/z_n)$ через отрицательную степень максимума на отрезках с отношением концов, близким к 1.

Укажем еще, что в работе [11; следствие 1.1] оценка вида (11) с худшим показателем -3 доказана при выборе «коротких» промежутков $(R, 3R/2)$. Заметим, что ценой значительного усложнения выкладок, доказав положительность функции

$$\int_x^{9x} \frac{\ln |1-t| + 1.91 \ln(1+t)}{t^2} dt$$

на луче $(0, +\infty)$ (ее минимум приближенно равен 0.0007), мы выведем неравенство

$$\int_R^{3R} \frac{\ln(m(L; r) M^{1.91}(L; r))}{r^3} dr > 0 \quad \forall R > 0$$

и, как следствие, соотношение

$$\forall R > 0 \quad \exists r \in (R, 3R) : \quad m(L; r) > M^{-1.91}(L; r).$$

Однако дальнейшее снижение постоянной 1.91 в показателе в рамках применяемых методов наталкивается на значительные трудности. Так, компьютерный расчет показывает, что минимальное значение, принимаемое функцией

$$\int_x^{9x} \frac{\ln |1-t| + 1.9 \ln(1+t)}{t^2} dt$$

на луче $(0, +\infty)$, будет отрицательным. Впрочем, мы выяснили (см. теорему 2), что значительного снижения (например, до 1.14) показатель 1.91 уже не допускает.

3. Примеры целых функций с малым минимумом модуля на окружностях, лежащих в специальной последовательности круговых колец

Раздел посвящен обоснованию следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{R_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию $\lim_{m \rightarrow \infty} (R_m/R_{m+1}) = 0$. Тогда произведение

$$L(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{7R_m^2}\right)^{R_m} \quad (15)$$

является целой функцией экспоненциального типа, для которой выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{R_n \leq r \leq 3R_n} \left(m(L; r) M^{8/7}(L; r)\right) = 0. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно [14; гл. I, § 11], принадлежность произведения (1) классу целых функций экспоненциального типа равносильна конечности верхнего предела

$$D = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\mu_n}, \quad (17)$$

причем экспоненциальный тип $\sigma(L)$ функции L удовлетворяет двойному неравенству

$$\frac{2D}{e} \leq \sigma(L) \leq \pi D$$

(см. [15; гл. II, § 4.4]). В данном случае последовательность $\{\mu_n\}$ выглядит так (напомним, что R_m — натуральные числа):

$$\mu_k = \sqrt{7} R_1 \quad \text{при} \quad 1 \leq k \leq R_1, \quad \mu_k = \sqrt{7} R_\nu \quad \text{при} \quad \sum_{j=1}^{\nu-1} R_j + 1 \leq k \leq \sum_{j=1}^{\nu} R_j, \quad \nu \geq 2. \quad (18)$$

Вычисляя верхний предел (17), воспользовавшись формулами (18), мы видим, что он равен пределу

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{7} R_\nu} \sum_{j=1}^{\nu} R_j \right) = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Здесь была использована первая из двух асимптотических оценок

$$\sum_{j=1}^{\nu-1} R_j = o(R_\nu), \quad \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{R_j} = o\left(\frac{1}{R_\nu}\right), \quad \nu \rightarrow \infty, \quad (19)$$

справедливых в силу равенства $\lim_{m \rightarrow \infty} (R_m/R_{m+1}) = 0$.

Перед доказательством предельного соотношения (16) заметим, что в произведении

$$L(ir) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{7R_m^2}\right)^{R_m}$$

сомножитель с номером $m = n$ на отрезке $R_n \leq r \leq 3R_n$ является доминирующим: остальные сомножители существенного вклада в величину $L(ir)$ не вносят. Действительно, неравенство $1 + u < e^u$ ($\forall u > 0$) для всех $R_n \leq r \leq 3R_n$ дает

$$\prod_{m=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{7R_m^2}\right)^{R_m} \leq \prod_{m=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{9R_n^2}{7R_m^2}\right)^{R_m} < \exp \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{9R_n^2}{7R_m} \right),$$

откуда согласно (19) имеем

$$\max_{R_n \leq r \leq 3R_n} \prod_{m=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{7R_m^2}\right)^{R_m} = \exp(o(R_n)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Далее, неравенство $\ln(1+u) < 2u^{1/4}$ ($\forall u > 0$) для тех же $R_n \leq r \leq 3R_n$ дает

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^{n-1} \left(1 + \frac{r^2}{7R_m^2}\right)^{R_m} &\leq \prod_{m=1}^{n-1} \left(1 + \frac{9R_n^2}{7R_m^2}\right)^{R_m} = \exp\left(\sum_{m=1}^{n-1} R_m \ln\left(1 + \frac{9R_n^2}{7R_m^2}\right)\right) < \\ &< \exp\left(2 \sum_{m=1}^{n-1} \left(R_m \sqrt[4]{\frac{9}{7}} \left(\frac{R_n}{R_m}\right)^{1/2}\right)\right) < \exp\left(3 \sum_{m=1}^{n-1} (R_n R_m)^{1/2}\right). \end{aligned}$$

Так как $\{\sqrt{R_m}\}$ также является быстро растущей последовательностью в том смысле, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{R_m} / \sqrt{R_{m+1}} = 0$, то $\sum_{m=1}^{n-1} \sqrt{R_m} = o(\sqrt{R_n})$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\max_{R_n \leq r \leq 3R_n} \prod_{m=1}^{n-1} \left(1 + \frac{r^2}{7R_m^2}\right)^{R_m} = \exp(o(R_n)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Теперь докажем (16). Согласно (3) имеем

$$\begin{aligned} m(L; r) M^{8/7}(L; r) &= |L(r)| L^{8/7}(ir) = \prod_{m=1}^{\infty} \left|1 - \frac{r^2}{7R_m^2}\right|^{R_m} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{7R_m^2}\right)^{8R_m/7} < \\ &< \prod_{m=1, m \neq n}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{7R_m^2}\right)^{15R_m/7} \left|1 - \frac{r^2}{7R_n^2}\right|^{R_n} \left(1 + \frac{r^2}{7R_n^2}\right)^{8R_n/7}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (20), (21) выводим асимптотическую оценку

$$\max_{R_n \leq r \leq 3R_n} \left(m(L; r) M^{8/7}(L; r)\right) \leq A^{R_n} \exp(o(R_n)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (22)$$

где

$$A \equiv \max\{g(t) \mid 1 \leq t \leq 9\}, \quad g(t) \equiv |1 - t/7| (1 + t/7)^{8/7} = |1 - t^2/49| (1 + t/7)^{1/7}.$$

Из (22) видно, что для вывода (16) осталось проверить справедливость неравенства $A < 1$. Легко видеть, что $g(7) = 0$, и на луче $[7, +\infty)$ функция $g(t) = (t^2/49 - 1)(t/7 + 1)^{1/7}$ возрастает. На отрезке $[1, 7]$ функция g убывает, поскольку при $1 < t < 7$ имеем

$$g_1(t) \equiv \ln g(t) = \ln\left(1 - \frac{t^2}{49}\right) + \frac{1}{7} \ln\left(1 + \frac{t}{7}\right), \quad g'_1(t) = \frac{1}{7} \frac{1}{t+7} - \frac{2t}{49-t^2} = \frac{1 - (15/7)t}{49-t^2} < 0.$$

Отсюда следует равенство $A = \max(g(1), g(9))$, а так как оба числа $g(1)$ и $g(9)$ меньше 1, то этим доказательство теоремы завершено. $\square$

За счет усложнения конструкции примера можно построить функцию L экспоненциального типа и вида (1), для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{R_n \leq r \leq 3R_n} \left(m(L; r) M^{7/6}(L; r)\right) = 0.$$

Но построить аналогичный пример, в котором вместо показателя $7/6$ стоял бы показатель 1.2 , мы уже не можем.

Таким образом, оптимальный показатель в задаче оценки минимума модуля четного произведения (1) с действительными корнями через некоторую отрицательную степень максимума модуля этого произведения при обязательном требовании осуществить оценку в какой-либо точке отрезка с отношением концов, равным 3, лежит между $-191/100$ и $-7/6$.

4. Заключение

Подведем итоги проделанного исследования. Для произвольного четного канонического произведения нулевого рода с действительными корнями мы рассмотрели задачу оценки минимума модуля на окружности через степень максимума модуля на той же окружности. При этом требовалось дополнительное условие: радиус окружности, дающий в неравенстве

$$m(L; r) \geq M^{-p}(L; r) \quad (23)$$

оптимальный показатель p , ищется на отрезке с данным отношением концов (в нашей работе это отношение равно 3). Показано, что при условии $r \in [R, 3R]$ для произвольной функции (1), корни которой удовлетворяют условию (2), оценка (23) будет выполнена, если взять $p = 2$.

Для доказательства этого утверждения авторами предложен метод, который в данной задаче можно считать новым (хотя он и перекликается с методом Вимана, примененным в [4] при доказательстве $\cos(\pi\rho)$ -теоремы). Возможности нашего метода еще предстоит исследовать. В действительности он дает в (23) показатель, меньший 2. Точнее, мы выяснили, что оценка (23) справедлива, если существуют такие положительные числа p, s , для которых при любом $x > 0$ верно неравенство

$$\int_x^{9x} \frac{\ln|1-t| + p \ln(1+t)}{t^s} dt > 0. \quad (24)$$

Взяв $s = 2$, мы привели доказательство для $p = 2$ и отметили в статье, что при таком показателе s (тогда интеграл в (24) вычисляется в элементарных функциях) неравенство (24) выполняется и для $p = 1.91$. Отметим определенную свободу выбора подходящих значений параметров p, s в (24) и роль компьютерного эксперимента в подобных вопросах.

В дальнейшем мы собираемся рассмотреть и другие значения отношения концов отрезка, на котором выбирается оптимальный для поставленной задачи радиус окружности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайсин А. М. Решение проблемы Поля // Матем. сборник. 2002. Т. 193. № 6. — С. 39–60.
2. Polya G. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen // Mathem. Zeitschrift. 1929. Vol 29. Iss. 1. — P. 549–640.
3. Valiron G. Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 1913. Vol. 5. — P. 117–257.
4. Wiman A. Über eine Eigenschaft der ganzen Functionen von der Höhe Null // Math. Ann. 1915. Vol. 76. P. 197–211.
5. Cartwright M. L. On the minimum modulus of integral functions // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1934. Vol. 30. — P. 412–420.
6. Гельфонд А. О. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций // Труды МИАН СССР. 1951. Т. 38. — С. 42–67.
7. Hayman W. K. Subharmonic Functions. Vol. 2. — London, New York: Academic Press, 1989 — xxv+p. 285–875.

8. Hayman W.K., Lingham E.F. Research Problems in Function Theory (Fiftieth Anniversary Edition). Problem Books in Mathematics, Springer, 2019 — viii+284 pp.
9. Попов А.Ю. Новая оценка снизу минимума модуля аналитической функции // Челяб. физ.-матем. журнал. 2019. Т. 4. № 2. — С. 155–164.
10. Попов А.Ю. Оценка снизу минимума модуля аналитической функции на окружности через отрицательную степень ее нормы на большей окружности // Труды МИАН. 2022. Т. 319. — С. 223–250.
11. Попов А.Ю., Шерстюков В.Б. Оценка снизу минимума модуля целой функции рода нуль с положительными корнями через степень максимума модуля в частой последовательности точек // Уфимский матем. журнал. 2022. Т. 14. № 4. — С. 80–99.
12. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
13. Hayman W.K. The minimum modulus of large integral functions // Proc. London Math. Soc. 1952. V. 2. No. 3. — P. 469–512.
14. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956. — 632 с.
15. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976. — 536 с.

REFERENCES

1. Gaisin A.M., 2002, “Solution of the Polya problem”, *Sb. Math.*, vol. 193, no. 6, pp. 825–845.
2. Polya G., 1929, “Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen”, *Mathem. Zeitschrift*, vol. 29, iss. 1, pp. 549–640.
3. Valiron G., 1913, “Sur les fonctions entières d’ordre nul et d’ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulier”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, vol. 5, pp. 117–257.
4. Wiman A., 1915, “Über eine Eigenschaft der ganzen Functionen von der Höhe Null”, *Math. Ann.*, vol. 76, pp. 197–211.
5. Cartwright M.L., 1934, “On the minimum modulus of integral functions”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 30, pp. 412–420.
6. Gel’fond A.O., 1951, “Linear differential equations of infinite order with constant coefficients and asymptotic periods of entire functions”, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 38, pp. 42–67.
7. Hayman W.K. Subharmonic Functions. Vol. 2. — London, New York: Academic Press, 1989 — XXV, p. 285–875.
8. Hayman W.K., Lingham E.F. Research Problems in Function Theory (Fiftieth Anniversary Edition). Problem Books in Mathematics, Springer, 2019 — VIII , 284 pp.
9. Popov A.Yu., 2019, “New lower bound for the modulus of an analytic function”, *Chelyabinsk Physical and Math. J.*, vol. 4, iss. 2, pp. 155–164.
10. Popov A.Yu., 2022, “A lower estimate for the minimum modulus of an analytic function on a circle in terms of the negative power of its norm on a larger circle”, *Proc. Steklov Inst. Math.* (forthcoming paper).

11. Popov A.Yu. and Sherstyukov V.B., 2022, "Lower bound for minimum of modulus of entire function of genus zero with positive roots in terms of degree of maximal modulus at frequent sequence of points", *Ufa Math. J.*, vol. 14, no. 3, pp. 76-95.
12. Evgrafov M. A., 1979, Asymptotic estimates and entire functions. Nauka, Moscow, 320 pp.
13. Hayman W. K., 1952, "The minimum modulus of large integral functions", *Proc. London Math. Soc.*, vol. 2, no. 3, pp. 469-512.
14. Levin B. Ja., 1964, Distribution of zeros of entire functions. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., Vol. VII, 493 pp.
15. Leont'ev A. F., 1976, "Exponential series". Nauka, Moscow, 536 pp.

Получено: 26.01.23

Принято в печать: 24.04.2023