ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 514.763

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-114-126

Левоинвариантная сасакиева структура на групповой модели вещественного расширения плоскости Лобачевского

В. И. Паньженский, А. О. Растрепина

Паньженский Владимир Иванович — кандидат физико-математических наук, профессор, Пензенский государственный университет (г. Пенза).

e-mail: kaf-geom@yandex.ru

Растрепина Анастасия Олеговна — магистрант, Пензенский государственный университет (г. Пенза).

e-mail: n.rastrepina@mail.ru

Аннотация

Доказано, что на групповой модели вещественного расширения плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ существует левоинвариантная контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) , риманова метрика которой отлична от метрики прямого произведения. Ограничение метрики g на контактное распределение является метрикой плоскости Лобачевского и вместе с вполне неголономным контактным распределением определяет на $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ субриманову структуру. Найденная почти контактная метрическая структура является нормальной и, следовательно, сасакиевой. Группа Ли автоморфизмов этой структуры имеет максимальную размерность. Найденны базисные векторные поля её алгебры Ли. Кроме связности Леви-Чивита ∇ рассматривается контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ с косимметрическим кручением, которая, как и связность Леви-Чивита, также инварианта относительно группы автоморфизмов. Структурные тензоры η, ξ, φ, g , тензор кручения $\tilde{S}$ и тензор кривизны $\tilde{R}$ данной связности ковариантно постоянны. Тензор кривизны $\tilde{R}$ связности $\tilde{\nabla}$ обладает необходимыми свойствами, позволяющими ввести понятие секционной кривизны. Установлено, что секционная кривизна $\tilde{k}$ принадлежит числовому отрезку $[-2, 0]$. Используя поле ортонормированных реперов, адаптированных к контактному распределению, найдены коэффициенты усечённой связности и дифференциальные уравнения её геодезических. Доказано, что контактные геодезические связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ совпадают с геодезическими усечённой связности, т.е. обе связности согласованы с контактным распределением. Это означает, что через каждую точку в каждом контактном направлении проходит единственная контактная геодезическая.

Ключевые слова: левоинвариантная сасакиева структура, контактная метрическая связность, контактные геодезические, секционная кривизна.

Библиография: 21 названия.

Для цитирования:

В. И. Паньженский, А. О. Растрепина. Левоинвариантная сасакиева структура на групповой модели вещественного расширения плоскости Лобачевского // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 114–126.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 514.763

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-114-126

**The left-invariant Sasakian structure on the group model
of the real extension of the Lobachevsky plane**

V. I. Pan'zhenskii, A. O. Rastrepina

Pan'zhenskii Vladimir Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, professor, Penza State University (Penza).

e-mail: kaf-geom@yandex.ru

Rastrepina Anastasia Olegovna — undergraduate student, Penza State University (Penza).

e-mail: n.rastrepina@mail.ru

Abstract

It has been proved that there is left-invariant contact metric structure (η, ξ, φ, g) whose Riemannian metric is different from the metric of the direct product on the group model of the real extension of the Lobachevsky plane $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. The restriction of the metric g to the contact distribution is the metric of the Lobachevsky plane and, together with a completely nonholonomic contact distribution, defines a sub-Riemann structure on $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. The found almost contact metric structure is normal and therefore Sasakian. The Lie group of automorphisms of this structure has maximum dimension. The basis vector fields of its Lie algebra are found. In addition to the Levi-Civita connection ∇ , we consider a contact metric connection $\tilde{\nabla}$ with skew-symmetric torsion, which, like the Levi-Civita connection, is also invariant under the automorphism group. The structure tensors η, ξ, φ, g , the torsion tensor $\tilde{S}$ and the curvature tensor $\tilde{R}$ of a given connection are covariantly constant. The curvature tensor $\tilde{R}$ of the connection $\tilde{\nabla}$ has the necessary properties to introduce the concept of sectional curvature. It is established that the sectional curvature $\tilde{k}$ belongs to the numerical segment $[-2, 0]$. Using the field of orthonormal frames adapted to the contact distribution, the coefficients of the truncated connection and the differential equations of its geodesics are found. It has been proved that the contact geodesics of the connections ∇ and $\tilde{\nabla}$ coincide with the geodesics of truncated connection, that is, both connections are compatible with the contact distribution. This means that there is only one contact geodesic through each point in each contact direction.

Keywords: left-invariant Sasakian structure, contact metric connection, contact geodesics, sectional curvature.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

V. I. Pan'zhenskii, A. O. Rastrepina, 2023, "The left-invariant Sasakian structure on the group model of the real extension of the Lobachevsky plane", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 114–126.

1. Введение

В настоящее время достаточно интенсивно изучаются контактные, почти контактные, параконтактные метрические структуры на нечётномерных многообразиях различных размерностей, при этом особый интерес представляют левинвариантные структуры на группах Ли, структуры, инвариантные относительно групп изометрий, а также связности, согласованные с данной структурой [1] – [16].

Контактной структурой на гладком многообразии M нечётной размерности $2n + 1$ называется дифференциальная 1-форма η , удовлетворяющая условию

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0. \quad (1)$$

Многообразие M , наделённое контактной структурой, называется контактным многообразием. Условие (1) означает, что 2-форма $d\eta$ имеет ранг $2n$. Контактная форма η определяет на M $2n$ -мерное вполне неголономное распределение $H = \ker\eta$, которое называется контактным, или горизонтальным, а 1-мерное распределение $V = \ker d\eta$ – вертикальным.

Контактной метрической структурой на контактном многообразии M называется четвёрка тензорных полей (η, ξ, φ, g) , где η – контактная форма, ξ – характеристическое векторное поле, φ – структурный эндоморфизм модуля векторных полей на M , g – риманова метрика. При этом требуется выполнение следующих условий [17]

$$\varphi^2 = -id + \eta \otimes \xi, \quad (2)$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad (3)$$

$$d\eta(X, Y) = g(\varphi X, Y). \quad (4)$$

Нетрудно убедиться, что имеют место следующие равенства

$$\begin{aligned} 1)\eta(\xi) = 1, \quad 2)d\eta(X, \xi) = 0, \quad 3)\varphi(\xi) = 0, \quad 4)\eta \circ \varphi = 0, \\ 5)g(X, \xi) = \eta(X), \quad 6)g(X, Y) = d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y). \end{aligned} \quad (5)$$

Контактная метрическая структура называется k -контактной, если векторное поле ξ является киллинговым. Нормальная контактная метрическая структура называется сасакиевой, т.е. должно выполняться следующее равенство

$$[\varphi, \varphi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi = 0, \quad (6)$$

где

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

– кручение Нейенхейса эндоморфизма φ [17]. Сасакиева структура необходимо является k -контактной.

Диффеоморфизм f $(2n + 1)$ -мерного многообразия называется автоморфизмом контактной метрической структуры, если все определяющие её тензоры инвариантны относительно f . В работе [18] доказано, что максимальная размерность группы Ли автоморфизмов контактной метрической структуры равна $(n + 1)^2$. Если M группы Ли, то естественно рассматривать левоинвариантные контактные метрические структуры.

2. Контактная метрическая структура на $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Рассмотрим множество $\mathbb{G}$, элементами (точками) которого являются матрицы следующего вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & y & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где x, y, z – действительные числа: $x, y, z \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Множество $\mathbb{G}$ является группой Ли относительно операции умножения матриц и подгруппой Ли полной линейной группы $GL(3, \mathbb{R})$.

Умножая слева (7) на произвольную матрицу из группы $\mathbb{G}$, заключаем, что левые сдвиги на $\mathbb{G}$ определяются следующими формулами

$$\bar{x} = bx + a, \quad \bar{y} = by, \quad \bar{z} = z + c \quad (y > 0, b > 0). \quad (8)$$

Дифференцируя (8) по параметрам a, b, c , находим левоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$ – базис алгебры Ли группы Ли $\mathbb{G}$

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = x\partial_1 + y\partial_2, \quad X_3 = \partial_3, \quad (9)$$

где $\partial_1 = \partial/\partial x$, $\partial_2 = \partial/\partial y$, $\partial_3 = \partial/\partial z$ – естественный базис гладких векторных полей на $\mathbb{G}$. Нетрудно установить, что риманова метрика

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + dz^2 \quad (10)$$

левоинвариантна и является метрикой прямого произведения на вещественном расширении плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Таким образом, группа $\mathbb{G}$ с левоинвариантной метрикой (10) естественным образом отождествляется с $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, и, следовательно, является групповой моделью вещественного расширения плоскости Лобачевского.

Все левоинвариантные дифференциальные 1-формы можно найти, интегрируя уравнения инвариантности

$$X_\alpha^p \partial_p \eta_i + \partial_i X_\alpha^p \eta_p = 0$$

(производная Ли от формы η вдоль левоинвариантных векторных полей X_α (9) ($\alpha = 1, 2, 3$) должна обращаться в нуль: $L_{X_\alpha} \eta = 0$). В результате получим следующее семейство дифференциальных 1-форм

$$\eta = \frac{c_1}{y} dx + \frac{c_2}{y} dy + c_3 dz, \quad (11)$$

где c_1, c_2, c_3 – постоянные. Так как $d\eta = \frac{c_1}{y^2} dx \wedge dy$ и $\eta \wedge d\eta = \frac{c_1 c_3}{y^2} dx \wedge dy \wedge dz$, то при $c_1 \cdot c_3 \neq 0$ найденные формы являются контактными. Нетрудно убедиться, что среди этих форм нет таких, которые бы вместе с римановой метрикой (10) определяли контактную метрическую структуру [8].

Однако на $\mathbb{G}$ имеется естественная левоинвариантная контактная метрическая структура с метрикой, отличной от римановой метрики прямого произведения. Действительно, среди левоинвариантных 1-форм выделим форму

$$\eta = \frac{1}{y} dx + dz. \quad (12)$$

Эту форму можно получить, сдвинув форму Дарбу $ydx + dz$ из единицы группы в произвольную точку. В этом случае условия $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(X, \xi) = 0$ определяют однозначно характеристическое векторное поле

$$\xi = \partial_3. \quad (13)$$

Все левоинвариантные эндоморфизмы можно найти, решая уравнения инвариантности φ относительно левоинвариантных векторных полей (9)

$$X_\alpha^p \partial_p \varphi_j^i + \partial_j X_\alpha^p \varphi_p^i - \partial_p X_\alpha^i \varphi_j^p = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^{3\frac{1}{y}} & c_2^{3\frac{1}{y}} & c_3^3 \end{pmatrix},$$

где c_j^i – произвольные постоянные. Из условия $\varphi(\xi) = 0$ следует, что $c_3^1 = c_3^2 = c_3^3 = 0$, а из $\eta \circ \varphi = 0$ находим, что $c_1^3 = -c_1^1$, $c_2^3 = -c_2^1$. Требование (2) накладывает на постоянные c_j^i следующие условия

$$\begin{aligned} (c_1^1)^2 + c_2^1 c_1^2 &= -1, & c_1^1 c_2^1 + c_2^1 c_2^2 &= 0, \\ c_1^2 c_1^1 + c_2^2 c_1^2 &= 0, & c_1^2 c_2^1 + (c_2^2)^2 &= -1, \end{aligned}$$

откуда следует, что эндоморфизм

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

вместе с η и ξ определяет на $\mathbb{G}$ левоинвариантную контактную метрическую структуру, риманова метрика которой, как следует из условия 6) в равенствах (5), имеет вид

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + \left(\frac{1}{y} dx + dz \right)^2. \quad (15)$$

Нетрудно убедиться, что условия (2), (3), (4) определения контактной метрической структуры выполняются тождественно. Заметим, что ограничение метрики (15) на контактное распределение является метрикой плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре на евклидовой полуплоскости и вместе с вполне неголономным контактным распределением определяет на $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ субриманову структуру.

Так как характеристическое векторное поле $\xi = \partial_3$ является левоинвариантным, то $L_\xi g = 0$, т.е. мы имеем k -контактную метрическую структуру. Более того, эта структура является сасакиевой, поскольку условие нормальности (6), которое в координатах имеет следующий вид

$$\varphi_j^p \partial_p \varphi_k^i - \varphi_k^p \partial_p \varphi_j^i + \varphi_p^i \partial_j \varphi_k^p - \varphi_p^i \partial_k \varphi_j^p + d\eta_{jk} \xi^i = 0,$$

выполняется тождественно. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *На групповой модели вещественного расширения плоскости Лобачевского существует левоинвариантная сасакиева структура (η, ξ, φ, g) , где η – контактная форма, ξ – характеристическое векторное поле, φ – структурный эндоморфизм модуля векторных полей на M и g – риманова метрика имеют вид (12), (13), (14) и (15) соответственно.*

Векторное поле $X = X^p \partial_p$ называется инфинитезимальным автоморфизмом контактной метрической структуры, если однопараметрическая группа диффеоморфизмов $f_t = \exp tX$, порождённая полем X , является группой автоморфизмов структуры. Это означает, что производная Ли вдоль X от η, ξ, φ и g обращается в нуль

$$L_X \eta = 0, \quad L_X \xi = 0, \quad L_X \varphi = 0, \quad L_X g = 0.$$

В координатах мы имеем следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} X^p \partial_p \eta_i + \partial_i X^p \eta_p &= 0, \\ X^p \partial_p \xi^i - \partial_p X^i \xi^p &= 0, \\ X^p \partial_p \varphi_j^i + \partial_j X^p \varphi_p^i - \partial_p X^i \varphi_j^p &= 0, \\ X^p \partial_p g_{ij} + \partial_i X^p g_{pj} + \partial_j X^p g_{ip} &= 0. \end{aligned}$$

После несложных алгебраических преобразований для сасакиевой структуры (12), (13), (14), (15) эта система примет следующий вид

$$\begin{aligned} \partial_3 X^1 = 0, \quad \partial_3 X^2 = 0, \quad \partial_3 X^3 = 0, \quad \partial_1 X^3 = 0, \quad y\partial_1 X^1 = X^2, \\ y\partial_2 X^2 = X^2, \quad \partial_1 X^2 + \partial_2 X^1 = 0, \quad \partial_2 X^1 + y\partial_2 X^3 = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя данную систему, находим её общее решение

$$X^1 = \frac{1}{2}b_4(x^2 - y^2) + b_2x + b_1, \quad X^2 = b_4xy + b_2y, \quad X^3 = b_4y + b_3.$$

Постоянным b_1, b_2, b_3, b_4 соответствуют следующие базисные векторные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = x\partial_1 + y\partial_2, \quad X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\partial_1 + xy\partial_2 + y\partial_3. \quad (16)$$

Первые три векторных поля являются левоинвариантными полями и, следовательно, определяют подгруппу параллельных переносов, а векторное поле X_4 является оператором вращения, который порождает стационарную подгруппу, и мы имеем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Группа Ли инфинитезимальных автоморфизмов сасакиевой структуры (12), (13), (14) и (15) имеет максимальную размерность. Базисные векторные поля её алгебры имеют вид (16).*

3. Левоинвариантная кососимметрическая связность, согласованная с контактным распределением

Пусть M – гладкое многообразие, H – распределение на M . Линейную связность назовём согласованной с распределением H , если через каждую точку $p \in M$ в каждом касательном направлении $v_p \in H_p$ проходит единственная геодезическая, касающаяся распределения H (контактная геодезическая) [8].

Пусть g – риманова метрика на M , ∇ – связность Леви-Чивита. Ортогональная проекция $\tilde{\nabla}$ связности ∇ на распределение H является линейной связностью на H и называется усечённой связностью [19], [20].

На вещественном расширении плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ с контактной метрической структурой (η, ξ, φ, g) имеем две естественные связности – связность Леви-Чивита $\nabla(\Gamma_{ij}^k)$ – метрическая связность ($\nabla g = 0$) без кручения и контактную метрическую связность $\tilde{\nabla}(\tilde{\Gamma}_{ij}^k)$ ($\tilde{\nabla}g = 0, \tilde{\nabla}\eta = 0$) с кососимметрическим кручением. Эта связность определяется следующей формулой [16]

$$g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2}d\eta(X, Y) \wedge \eta(Z).$$

Так же как и связность Леви-Чивита ∇ , контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ инвариантна относительно группы автоморфизмов сасакиевой структуры. Для контактной формы (12) форма кручения $S = d\eta \wedge \eta$ имеет вид

$$S = \frac{1}{y^2}dx \wedge dy \wedge dz.$$

Коэффициенты связности Леви-Чивита ∇ метрики (15) образуют следующие матрицы

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2y} & 0 \\ -\frac{3}{2y} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{y} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y^2} & 0 \\ \frac{1}{y^2} & 0 & \frac{1}{2y} \\ 0 & \frac{1}{2y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения $\tilde{S}(\tilde{S}_{ij}^k = S_{ijp}g^{pk})$ связности $\tilde{\nabla}$ имеет следующие компоненты

$$\tilde{S}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{y} & 0 \\ \frac{1}{y} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{y^2} & 0 \\ -\frac{2}{y^2} & 0 & -\frac{1}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2}\tilde{S}_{ij}^k,$$

то

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{y} & 0 \\ -\frac{1}{y} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что в связности $\tilde{\nabla}$ все структурные тензоры сасакиевой структуры, а также тензор кручения и тензор кривизны, ковариантно постоянны:

$$\tilde{\nabla}\eta = 0, \quad \tilde{\nabla}\xi = 0, \quad \tilde{\nabla}\varphi = 0, \quad \tilde{\nabla}g = 0, \quad \tilde{\nabla}\tilde{S} = 0, \quad \tilde{\nabla}\tilde{R} = 0.$$

ТЕОРЕМА 3. *Секционная кривизна контактной метрической связности $\tilde{\nabla}$ изменяется в пределах числового отрезка $[-2; 0]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисляя ковариантные компоненты тензора кривизны $\tilde{R}$, находим, что

$$\tilde{R}_{1212} = -\tilde{R}_{2112} = -\tilde{R}_{1221} = \frac{2}{y^4},$$

остальные компоненты равны нулю. Поэтому, как и в римановой геометрии, мы можем ввести понятие секционной кривизны – кривизны в данной точке p данном двумерном направлении σ . Если u и v – два линейно независимых касательных вектора в точке p , принадлежащих σ , то

$$\tilde{k}_p(\sigma) = \frac{g(\tilde{R}(u, v)v, u)}{g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2}.$$

В числителе данной формулы имеем

$$R_{ijkl}u^i v^j v^k u^l = -\frac{2}{y^4}(u^1 v^2 - u^2 v^1)^2.$$

Вектор u возьмём в пересечении площадки σ с контактной площадкой H : $u \in \sigma \cap H$, а вектор v перпендикулярно вектору u , тогда

$$g(u, v) = 0, \quad g(u, u) = \frac{u^1^2 + u^2^2}{y^2}, \quad g(v, v) = \frac{v^1^2 + v^2^2}{y^2} + \left(\frac{1}{y}v^1 + v^3\right)^2$$

и

$$\tilde{k}_p(\sigma) = -\frac{2(u^1 v^2 - u^2 v^1)^2}{(u^1^2 + u^2^2)(v^1^2 + v^2^2 + (v^1 + yv^3)^2)} \leq 0.$$

Так как векторы u и v перпендикулярны и $u \in H$, то

$$u^1 v^1 + u^2 v^2 = 0.$$

Возводя это равенство в квадрат, находим, что

$$(u^1 v^2 - u^2 v^1)^2 = (u^1^2 + u^2^2)(v^1^2 + v^2^2),$$

поэтому

$$\tilde{k}_p(\sigma) = -\frac{2(u^{1^2} + u^{2^2})(v^{1^2} + v^{2^2})}{(u^{1^2} + u^{2^2})(v^{1^2} + v^{2^2}) + (u^{1^2} + u^{2^2})(v^1 + yv^3)^2} \leq -2,$$

т.е. $-2 \leq \tilde{k} \leq 0$. Если σ содержит V , то в качестве вектора v можно взять вектор $\xi(0, 0, 1)$, и тогда $\tilde{k} = 0$. Если σ содержит H , то $v^1 + yv^3 = 0$ и $\tilde{k} = -2$. $\square$

Замечание. Известно [17], что риманова кривизна k -контактного метрического многообразия в направлении, содержащем характеристический вектор ξ , равна 1. Поскольку сасакиева структура на $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ является k -контактной, а кривизна в контактном направлении с метрикой Пуанкаре равна -1 , то в силу непрерывности мы можем заключить, что риманова секционная кривизна принадлежит числовому отрезку $[-1; 1]$. Таким образом, наличие кручения у связности $\tilde{\nabla}$ сдвигает интервал изменения секционной кривизны на одну единицу в отрицательном направлении.

ТЕОРЕМА 4. *Связность Леви-Чивита ∇ и контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ согласованы с контактным распределением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства данного утверждения достаточно убедиться, что геодезические усечённой связности $\tilde{\nabla}$ являются контактными геодезическими связности ∇ и, следовательно, $\tilde{\nabla}$, поскольку они имеют одни и те же геодезические.

Рассмотрим неголономное поле ортонормированных реперов $\{p, e_i\}$, адаптированных к контактной структуре

$$e_1 = y\partial_1 - \partial_3, \quad e_2 = y\partial_2, \quad e_3 = \partial_3.$$

Первые два поля e_1 и e_2 лежат в контактном распределении $H : \eta(e_1) = \eta(e_2) = 0$, а $e_3 = \xi \in V$. Разложения коммутаторов векторных полей e_i

$$[e_i, e_j] = \Omega_{ij}^k e_k,$$

где коэффициенты Ω_{ij}^k определяют объект неголономности, являются структурными уравнениями поля реперов $\{p, e_i\}$. Для рассматриваемого поля реперов имеем следующие уравнения

$$[e_1, e_2] = -(e_1 + e_3), \quad [e_1, e_3] = 0, \quad [e_2, e_3] = 0,$$

поэтому $\Omega_{12}^1 = -\Omega_{21}^1 = \Omega_{12}^3 = -\Omega_{21}^3 = -1$. Для связности Леви-Чивита имеем следующую вычислительную формулу [21]

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \{ Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) \}.$$

Пусть γ_{ij}^k – коэффициенты связности Леви-Чивита в ортонормированном репере $\{p, e_i\} : \nabla_{e_i} e_j = \gamma_{ij}^k e_k$. Полагая $X = X^i e_i, Y = Y^j e_j, Z = Z^k e_k$, находим, что

$$\gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} (\Omega_{ij}^k + \delta^{ks} \Omega_{si}^l \delta_{jl} + \delta^{ks} \Omega_{sj}^l \delta_{il}),$$

откуда

$$\gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для усечённой связности $\bar{\nabla} : \bar{\nabla}_{e_i} e_j = \bar{\gamma}_{ij}^k e_k$ ($i, j, k = 1, 2$), где $\bar{\gamma}_{ij}^k = \gamma_{ij}^k$, т.е.

$$\bar{\gamma}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Горизонтальная (контактная) кривая $\gamma(\dot{\gamma} \in H)$

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

где s – естественный параметр, называется геодезической усечённой связности $\bar{\nabla}$, если $\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$, где $\dot{\gamma}$ – поле касательных векторов кривой γ . Найдём сначала уравнения параллельного векторного поля v вдоль кривой γ : $\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}v = 0$. Имеем следующие разложения векторных полей $\dot{\gamma}$ и v по естественному базису $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ и неголономному $\{e_1, e_2\}$

$$\dot{\gamma} = \dot{x}\partial_1 + \dot{y}\partial_2 + \dot{z}\partial_3 = u^1e_1 + u^2e_2,$$

$$v = v^1\partial_1 + v^2\partial_2 + v^3\partial_3 = w^1e_1 + w^2e_2.$$

Так как $e_1 = y\partial_1 - \partial_3$, $e_2 = y\partial_2$, то

$$u^1 = \frac{1}{y}\dot{x}, \quad u^2 = \frac{1}{y}\dot{y}, \quad w^1 = \frac{1}{y}v^1, \quad w^2 = \frac{1}{y}v^2.$$

Условия горизонтальности векторных полей $\dot{\gamma}$ и v имеют вид

$$\dot{z} = -\frac{1}{y}\dot{x}, \quad v^3 = -\frac{1}{y}v^1.$$

Теперь распишем уравнения параллельного переноса, заменяя неголономные координаты естественными и учитывая, что

$$\bar{\nabla}_{e_1}e_1 = e_2, \quad \bar{\nabla}_{e_1}e_2 = -e_1, \quad \bar{\nabla}_{e_2}e_1 = 0, \quad \bar{\nabla}_{e_2}e_2 = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}v &= \bar{\nabla}_{u^i e_i} w^j e_j = u^i e_i (w^j) e_j + u^i w^j \bar{\nabla}_{e_i} e_j = u^1 e_1 (w^1) e_1 + u^1 e_1 (w^2) e_2 + \\ &+ u^2 e_2 (w^1) e_1 + u^2 e_2 (w^2) e_2 + u^1 w^1 e_2 - u^1 w^2 e_1 = \frac{1}{y} \dot{x} [y \partial_1 (\frac{1}{y} v^1) - \partial_3 (\frac{1}{y} v^1)] (y \partial_1 - \partial_3) + \\ &+ \frac{1}{y} \dot{x} [y \partial_1 (\frac{1}{y} v^2) - \partial_3 (\frac{1}{y} v^2)] y \partial_2 + \frac{1}{y} \dot{y} [y \partial_2 (\frac{1}{y} v^1)] (y \partial_1 - \partial_3) + \frac{1}{y} \dot{y} [y \partial_2 (\frac{1}{y} v^2)] y \partial_2 + \\ &+ \frac{1}{y} \dot{x} v^1 \partial_2 - \frac{1}{y} \dot{x} \frac{1}{y} v^2 (y \partial_1 - \partial_3) = \{(\dot{x} \partial_1 v^1 + \dot{y} \partial_2 v^1 + \dot{z} \partial_3 v^1) - \frac{1}{y} (\dot{y} v^1 + \dot{x} v^2)\} \partial_1 + \\ &+ \{(\dot{x} \partial_1 v^2 + \dot{y} \partial_2 v^2 + \dot{z} \partial_3 v^2) + \frac{1}{y} (\dot{x} v^1 - \dot{y} v^2)\} \partial_2 + \\ &+ \{-\frac{1}{y} (\dot{x} \partial_1 v^1 + \dot{y} \partial_2 v^1 + \dot{z} \partial_3 v^1) + \frac{1}{y^2} (\dot{y} v^1 + \dot{x} v^2)\} \partial_3 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем следующие уравнения параллельного переноса вектора v вдоль кривой γ

$$\frac{dv^1}{ds} - \frac{1}{y} (\dot{y} v^1 + \dot{x} v^2) = 0, \quad \frac{dv^2}{ds} + \frac{1}{y} (\dot{x} v^1 - \dot{y} v^2) = 0, \quad v^3 + \frac{1}{y} v^1 = 0.$$

Полагая $v = \dot{\gamma}$, получим дифференциальные уравнения геодезических усечённой связности $\bar{\nabla}$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{2}{y} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{1}{y} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = 0, \quad \frac{dz}{ds} + \frac{1}{y} \frac{dx}{ds} = 0.$$

Дифференцируя последнее уравнение – условие горизонтальности векторного поля $\dot{\gamma}$, находим

$$\frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{1}{y^2} \frac{dy}{ds} \frac{dx}{ds} + \frac{1}{y} \frac{d^2 x}{ds^2} = 0$$

или, учитывая первое уравнение,

$$\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{1}{y^2} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} = 0.$$

Таким образом, функции $x(s), y(s), z(s)$, определяющие геодезические усечённой связности $\bar{\nabla}$, являются решением следующей системы

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{2}{y} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{y} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = 0, \quad \frac{d^2z}{ds^2} + \frac{1}{y^2} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{dz}{ds} + \frac{1}{y} \frac{dx}{ds} = 0. \quad (17)$$

Связность Леви-Чивита ∇ и контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ имеют одни и те же геодезические, а их дифференциальные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{3}{y} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{2}{y} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{dx}{ds} \frac{dz}{ds} = 0, \\ \frac{d^2z}{ds^2} + \frac{2}{y^2} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \frac{1}{y} \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Для контактных геодезических должно выполняться условие горизонтальности

$$\frac{dz}{ds} + \frac{1}{y} \frac{dx}{ds} = 0.$$

Подставляя вместо $\frac{dz}{ds}$ в уравнения (18) $-\frac{1}{y} \frac{dx}{ds}$, получаем уравнение геодезических (17) усечённой связности $\bar{\nabla}$, а это означает, что геодезические усечённой связности $\bar{\nabla}$ совпадают с контактными геодезическими связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$, т.е. связность Леви-Чивита ∇ и контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ согласованы с контактным распределением H . $\square$

4. Заключение

Таким образом, в настоящей работе на групповой модели вещественного расширения плоскости Лобачевского обнаружена левоинвариантная контактная метрическая структура. Найдены базисные векторные поля алгебры Ли группы Ли автоморфизмов данной структуры. Кроме связности Леви-Чивита рассмотрена контактная метрическая связность с кососимметрическим кручением. Дана оценка её секционной кривизны. Доказано, что контактные геодезические этих связностей совпадают с геодезическими усечённой связности, которая является ортогональной проекцией связности Леви-Чивита на контактное распределение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галаев С. В. Почти контактные метрические пространства с N -связностью // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, № 3. С. 258–264.
2. Галаев С. В. ∇_N -Эйнштейновы почти контактные метрические многообразия // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2021. № 70. С. 5–15.
3. Банару М. Б. О почти контактных метрических 1-гиперповерхностях келеровых многообразий // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, № 4. С. 719–723.
4. Банару М. Б. О почти контактных метрических гиперповерхностях с малыми типовыми числами в W_4 -многообразиях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2018. Т. 1. С. 67–70.

5. Смоленцев Н. К. Левоинвариантные пара-сасакиевы структуры на группах Ли // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2019. № 62. С. 27–37.
6. Смоленцев Н. К., Шагабудинова И. Ю. О парасасакиевых структурах на пятимерных алгебрах Ли // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2021. № 69. С. 37–52.
7. Паньженский В. И., Растрепина А. О. Левоинвариантная контактная метрическая структура на многообразии Sol // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2020. Т. 162, № 1. С. 77–90.
8. Паньженский В. И., Растрепина А. О. Контактная и почти контактная структуры на вещественном расширении плоскости Лобачевского // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2021. Т. 163, № 3–4. С. 291–303.
9. Паньженский В. И., Растрепина А. О. Левоинвариантная парасасакиева структура на группе Гейзенберга // Вестн. Том. гос. ун-та. Матем. и мех. 2022. № 75. С. 38–51.
10. Calvaruso G. Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures // J. Geom. Phys. 2013. V. 69. P. 60–73.
11. Calvaruso G., Martín-Molina V. Paracontact metric structures on the unit tangent sphere bundle // Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923–). 2015. V. 194. P. 1359–1380.
12. Calvaruso G., Perrone A. Left-invariant hypercontact structures on three-dimensional Lie groups // Periodica Mathematica Hungarica. 2014. V. 69. P. 97–108.
13. Calvaruso G., Perrone A. Five-dimensional paracontact Lie algebras // Diff. Geom. and its Appl. 2016. V. 45. P. 115–129.
14. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups // Diff. Geom. and its Appl. 2008. V. 26, № 5. P. 544–552.
15. Славолюбова Я. В. Контактные метрические структуры на нечетномерных единичных сферах // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2014. № 6 (32). С. 46–54.
16. Паньженский В. И., Климова Т. Р. Контактная метрическая связность на группе Гейзенберга // Изв. вузов. Матем. 2018. № 11. С. 51–59.
17. Blair D. E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics (V. 509). – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1976. – 148 p.
18. Tanno S. The automorphism groups of almost contact riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1969. V. 21, № 1. P. 21–38.
19. Вершик А. М., Фадеев Л. Д. Лагранжева механика в инвариантном изложении // Проблемы теоретической физики. – Л.: Издательство ЛГУ, 1975. С. 129–141.
20. Вершик А. М., Гершкович В. Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Динам. сист.–7. Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. 1987. Т. 16. С. 5–85.
21. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом / пер. с нем. Ю.Д. Бураго; под ред. и с доп. В.А. Топоногова. – М.: Мир, 1971. – 343 с.

REFERENCES

1. Galaev, S. V. 2015, “Almost contact metric spaces with N -connection”, *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika (Izvestiya of Saratov university. Mathematics. Mechanics. Informatics)*, vol. 15, no. 3, pp. 258–264. doi: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264.
2. Galaev, S. V. 2021, “ ∇_N -Einstein almost contact metric manifolds”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mexanika (Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics)*, no. 70, pp. 5–15. doi: 10.17223/19988621/70/1.
3. Banaru, M. B. 2014, “On almost contact metric 1-hypersurfaces in Kahlerian manifolds”, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 55, no. 4, pp. 585–588. doi: 10.1134/S0037446614040016.
4. Banaru, M. B. 2018, “The almost contact metric hypersurfaces with small type numbers in W_4 -manifolds”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 73, no. 1, pp. 38–40. doi: 10.3103/S0027132218010072.
5. Smolentsev, N. K. 2019, “Left-invariant para-sasakian structures on Lie groups”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mexanika (Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics)*, no. 62, pp. 27v37. doi: 10.17223/19988621/62/3.
6. Smolentsev, N. K. & Shagabudinova, I. Y. 2021, “On Parasasakian structures on five-dimensional Lie algebras”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mexanika (Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics)*, no. 69, pp. 37–52. doi: 10.17223/19988621/69/4.
7. Pan’zhenskii, V. I. & Rastrepina, A. O. 2020, “The left-invariant contact metric structure on the Sol manifold”, *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki*, vol. 162, no. 1, pp. 77–90. doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.77-90.
8. Pan’zhenskii, V. I. & Rastrepina, A. O. 2021, “Contact and almost contact structures on the real extension of the Lobachevsky plane”, *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki*, vol. 163, no. 3–4, pp. 291–303. doi: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.291-303.
9. Pan’zhenskii, V. I. & Rastrepina, A. O. 2022, “Left-invariant para-sasakian structure on the Heisenberg group”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mexanika (Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics)*, no. 75, pp. 38–51. doi: 10.17223/19988621/75/4.
10. Calvaruso, G. 2013, “Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures”, *Journal of Geometry and Physics*, vol. 69, pp. 60–73. doi: 10.1016/j.geomphys.2013.03.001.
11. Calvaruso, G. & Martín-Molina, V. 2015, “Paracontact metric structures on the unit tangent sphere bundle”, *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, vol. 194, pp. 1359–1380. doi: 10.1007/s10231-014-0424-4.
12. Calvaruso, G. & Perrone, A. 2014, “Left-invariant hypercontact structures on three-dimensional Lie groups”, *Periodica Mathematica Hungarica*, vol. 69, pp. 97–108. doi: 10.1007/s10998-014-0054-z.
13. Calvaruso, G. & Perrone, A. 2016, “Five-dimensional paracontact Lie algebras”, *Differential Geometry and Its Applications*, vol. 45, pp. 115–129. doi: 10.1016/j.difgeo.2016.01.001.

14. Diatta, A. 2008, “Left invariant contact structures on Lie groups”, *Differential Geometry and Its Applications*, vol. 26, no. 5, pp. 544–552. doi: 10.1016/j.difgeo.2008.04.001.
15. Slavolyubova, Ya. V. 2014, “Contact metric structures on odd-dimensional unit spheres”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mexanika (Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics)*, no. 6 (32), pp. 46–54.
16. Panzhenskii, V. I. & Klimova, T. R. 2018, “The contact metric connection on the Heisenberg group”, *Russian Mathematics*, vol. 62, no. 11, pp. 45–52. doi: 10.3103/S1066369X18110051.
17. Blair, D. E. 1976, “Contact manifolds in Riemannian geometry. Lecture notes in mathematics (Vol. 509)”, Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 148 p. doi: 10.1007/BFb0079307.
18. Tanno, S. 1969, “The automorphism groups of almost contact riemannian manifolds”, *Tohoku Mathematical Journal*, vol. 21, no. 1, pp. 21–38. doi: 10.2748/tmj/1178243031.
19. Vershik, A. M. & Faddeev, L. D. 1975, “Lagranzheva mexanika v invariantnom izlozhenii [Lagrangian mechanics in invariant form]”, *Problemy teoreticheskoy fiziki*, Leningrad: Izd. LGU, pp. 129–141.
20. Vershik, A. M. & Gershkovich, V. Ya. 1987, “Nonholonomic dynamical systems. Geometry of distributions and variational problems”, *Dinamicheskie sistemy – 7. Itogi nauki i tekhniki. Seriya Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya*, vol. 16, pp. 5–85.
21. Gromoll, D., Klingenberg, W. & Meyer W. 1971, “Rimanova geometriya v tselom [Riemannian geometry as a whole]”, Moscow: Mir, 343 p.

Получено: 27.12.22

Принято в печать: 24.04.2023