

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-69-88

Первый класс Аппельрота псевдоевклидовой системы
Ковалевской¹

В. А. Кибкало

Кибкало Владислав Александрович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

e-mail: slava.kibkalo@gmail.com

Аннотация

Для интегрируемого псевдоевклидова аналога волчка Ковалевской изучены свойства системы при нулевом уровне дополнительного первого интеграла Ковалевской. Класс движений классического волчка при том же условии называют также первым классом Аппельрота или классом Делоне. Описан класс гомеоморфности каждого слоя, классы послойной гомеоморфности слоения в окрестности бифуркационного слоя (аналог 2-атома Фоменко) и на всем двумерном пересечении уровня $K = 0$ и симплектического листа скобки Пуассона. Показано наличие некомпактных одномерных слоев Лиувилля, некритических перестроек компактных и некомпактных слоев в данной интегрируемой системе. Также изучен вопрос невырожденности (по Ботту) всех точек уровня $K = 0$ и доказано, что критическое множество псевдоевклидова аналога совпадает с таковым для классического волчка.

Ключевые слова: гамильтонова система, интегрируемость, динамика твердого тела, слоение Лиувилля, псевдоевклидово пространство, бифуркационная диаграмма, особенность, топологические инварианты.

Библиография: 37 названий.

Для цитирования:

В. А. Кибкало. Первый класс Аппельрота псевдоевклидовой системы Ковалевской // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 69–88.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-69-88

First Appelrot class of pseudo-Euclidean Kovalevskaya system

V. A. Kibkalo

Kibkalo Vladislav Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).

e-mail: slava.kibkalo@gmail.com

¹Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект 20-31-90114).

Abstract

In paper, properties of an integrable pseudo-Euclidean analogue of the Kovalevskaya top are studied for the zero level of the additional first Kovalevskaya integral. The class of motions of a classical top under the same condition is also called the first Appelrot class or the Delaunay class. We describe the homeomorphism class of each fiber, the fiberwise homeomorphism classes of the foliation in a neighborhood of each bifurcation fiber (i.e. analogues of Fomenko 2-atoms) and on the two-dimensional intersection of the level $K = 0$ and each nondegenerate symplectic leaf of the Poisson bracket. It is proved that non-compact one-dimensional Liouville fibers, non-critical bifurcations of compact and non-compact fibers appear in this integrable system. The non-degeneracy problem (in the Bott sense) for all points of the $K = 0$ level is also studied, and it is proved that the critical sets of the of classical Kovalevskaya top and its pseudo-Euclidean analogue coincides.

Keywords: Hamiltonian system, integrability, rigid body dynamics, Liouville foliation, pseudo-Euclidean space, bifurcation diagram, singularity, topological invariant.

Bibliography: 37 titles.

For citation:

V. A. Kibkalo, 2023, “First Appelrot class of pseudo-Euclidean Kovalevskaya system” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 69–88.

1. Введение

Системы динамики и математической физики в пространствах, метрика которого отличается от евклидовой, активно исследовались как классиками, так и в недавних работах исследователей. В сборнике [1] приведен цикл работ, иллюстрирующих различные направления исследований.

В недавней работе А.В. Борисова и И.С. Мамаева [2] было рассмотрено преобразование на $\mathbb{C}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$, линейное над \mathbb{C} , позволяющее сопоставить многим классическим вещественным интегрируемым системам динамики новые системы, также интегрируемые и вещественные. При этом меняются знаки некоторых структурных констант скобки Ли–Пуассона, и алгебра Ли $e(3)$ группы движений евклидова \mathbb{R}^3 переходит в алгебру Ли $e(2, 1)$ группы движений пространства R_1^3 с псевдоевклидовым скалярным произведением. Напомним, что системы классической механики могут задаваться уравнениями Эйлера на двойственном пространстве к алгебре Ли $e(3)$ для гладкой функции H .

В настоящей работе изучается аналог волчка Ковалевской, заданный уравнениями Эйлера на алгебре Ли $e(2, 1)$. Функция $H_{ps} = H$ псевдоевклидова аналога получена из гамильтониана Ковалевской H_0 под действием преобразования из [2]. При этом сохраняется как интегрируемость такой вещественной системы, так и формула для дополнительного интеграла K , открытого ранее С.В. Ковалевской для классического волчка [3]. Разделение переменных, аналогичное Кёттеру, для новой задачи в случае алгебры Ли $e(2, 1)$ было построено С.В. Соколовым [4].

Г.Г. Аппельрот [5] исследовал особые режимы движения классического волчка Ковалевской, соответствующие наличию кратных корней у полинома Φ , участвующего в разделении переменных системы. Полином Φ является произведением двух линейных сомножителей и одного кубического полинома, чьи коэффициенты зависят от значений a, b, h, k первых интегралов системы. К первому классу был отнесен случай равенства двух линейных сомножителей, когда дополнительный интеграл K равен нулю. Отметим, что в работе Н.Б.Делоне [6] была приведена геометрическая интерпретация такого движения.

Анализ фазовой топологии такого волчка, во многом мотивированный пионерской работой С.Смейла [7], был проведен М.П.Харламовым, см. [8]. Было показано, что образ множества точек, где градиенты первых интегралов зависимы, действительно содержится в гиперповерхностях пространства значений этих функций, на которых многочлен разделения переменных имеет кратные корни. Кроме того, также были явно описаны классы гомеоморфности слоев слоения Лиувилля системы.

Общий топологический подход к исследованию конечномерных интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем был развит в работах А.Т.Фоменко и его научной школы, см. [9, 10, 11] и монографию А.В.Болсинова и А.Т.Фоменко [12]. Предположим, что уровень энергии $Q^3 = Q_h^3 : H = h$ является компактным и неособым, т.е. не содержит положений равновесия гамильтонова векторного поля функции H , а все критические точки отображения момента в нем невырождены по Ботту (что обобщает понятие морсовости критической точки функции). Для изученных ранее систем почти все уровни энергии H удовлетворяют этим условиям [12].

Такие системы с двумя степенями свободы, ограниченные на неособые уровни энергии Q^3 , классифицируются с точностью до послынной гомеоморфности в терминах *инварианта Фоменко–Цишанга*, называемого также *молекулой*. Этот инвариант является графом — одномерной базой слоения Лиувилля на данном Q^3 . Его ребра соответствует семействам регулярных слоев, а вершины — их бифуркациям. В силу компактности Q^3 и гладкости первых интегралов, прообраз бифуркационного значения интеграла содержит критические точки (по предположению, невырожденные). Класс послынной гомеоморфности малой инвариантной окрестности связного слоя (содержащего критические точки) называют атомом или 3-атомом. Каждой вершине графа-инварианта сопоставляется 3-атом, а всем ребрам и некоторым связным подграфам приписываются числовые метки (задаваемые склейкой 3-атомов по их граничным торам).

Данная теория была применена к различным системам механики [13, 14, 15, 16, 17], задачам математической физики [18, 19, 20] и аналогам известных интегрируемых систем в случае алгебр Ли $so(4)$ и $so(3, 1)$ [21, 22], в числе которых — аналоги классического волчка Ковалевской на пучке алгебр Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$, открытые И.В.Комаровым в [23] и изученные с топологической точки зрения в работах [24, 25, 26, 27].

Отметим, что построенная классификация существенно использует компактность слоев слоения Лиувилля, неособого уровня энергии целиком и полноту потоков гамильтоновых полей первых интегралов. Тогда каждая бифуркация слоев имеет особый слой с критическими точками. Это позволяет эффективно находить и описывать бифуркации систем из приложений.

Расширение этой классификации на некоторый подкласс систем с некомпактными слоями слоения Лиувилля и их некритические бифуркации, а также неполные потоки, весьма интересен. Весьма подробный обзор известных результатов и изученных примеров таких систем был недавно сделан А.Т.Фоменко и Д.А.Федосеевым [28]. Отдельно отметим работу Е.А.Кудрявцевой [29] об аналоге теоремы Лиувилля для системы с неполными потоками с особенностями определенных типов. Некомпактные слои возникали в работе Д.В.Новикова [22, 30] при изучении системы Соколова на алгебрах $so(3, 1)$ и $e(3)$. В недавних работах С.С.Николаенко [31] и [32] была построена классификация особенностей систем с одной и двумя степенями свободы соответственно, удовлетворяющих определенным условиям. Фактически, на указанные классы систем и особенностей (имеющих некомпактные слои и включающее некритические бифуркации) было построено обобщение классификации теоремы Фоменко 2-атомов и 3-атомов Фоменко. Ранее в работе [33] им же была изучена топология и динамика “некомпактного” аналога известного интегрируемого случая Горячева. В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко удалось промоделировать некоторые некомпактные аналоги атомов Фоменко интегрируемыми топологическими бильярдами на неограниченных столах [34]. Интересные

эффекты, связанные с некомпактностью, также возникли при рассмотрении бильярда на эллиптическом столе с метрикой Минковского и упругим потенциалом [35].

Одним из примеров таких систем является псевдоевклидов аналог волчка Ковалевской. Ранее автором был доказан [36] критерий компактности совместного уровня четырех первых интегралов этой системы при условии, что интеграл площадей не равен нулю. Иными словами, система содержит перестройки компактных слоев в некомпактные.

В настоящей работе описано слоение Лиувилля этой системы на множестве $K = 0$. А именно, для каждой пары $(a, b) \neq (0, 0)$ значений геометрического интеграла и интеграла площадей, задающих неособый симплектический лист $M_{a,b}^4$, указана база (одномерный граф) слоения функции H на множестве точек $K = 0$ в $M_{a,b}^4$, классы гомеоморфности слоев в прообразе его вершин и точек его ребер. В системе обнаружены некомпактные слои и перестройки компактного слоя в некомпактный, причем без дополнительного падения ранга отображения момента (с одного до нуля). Для всех точек (ранг отображения момента при условии $K = 0$ равен либо 1, либо 0) указанных поверхностей исследован вопрос невырожденности.

1.1. Псевдоевклидов аналог волчка Ковалевской и его свойства

Скобки Пуассона и алгебры Ли. Рассмотрим семейство P скобок Ли–Пуассона с параметром $\varkappa \in \mathbb{R}$ на пространстве $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$:

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} J_k.$$

При $\varkappa < 0$, $\varkappa = 0$, $\varkappa > 0$ эти скобки соответствуют алгебрам Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$. Система уравнений Эйлера

$$\dot{J}_i = \{J_i, H\}, \quad \dot{x}_i = \{x_i, H\}$$

задает динамическую систему на двойственном пространстве к соответствующей алгебре Ли. Для каждой гладкой функции H правые части этих уравнений образуют гамильтоново векторное поле — косоый градиент $\text{sgrad } H$.

Обозначим через g скалярное произведение $g = \text{diag}(1, 1, \sigma)$ для $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ на пространстве \mathbb{R}^3 и рассмотрим вещественно-линейный изоморфизм Φ пространства \mathbb{C}^6 :

$$\tilde{J}_j = \frac{\sigma}{i} J_j, \quad \tilde{x}_j = \frac{\sigma}{i} x_j, \quad \text{для } j = 1, 2, \quad \tilde{J}_3 = J_3, \quad \tilde{x}_3 = x_3.$$

В новых координатах $\tilde{J}_1, \dots, \tilde{x}_3$ линейные скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ из пучка P имеют те же структурные константы, что и в исходных координатах J_1, \dots, x_3 , исключая домножаемые на σ константы для $\{J_1, J_2\}, \{J_1, x_2\}, \{x_2, J_1\}$ при всех $\varkappa \in \mathbb{R}$ и $\{x_1, x_2\}$ при $\varkappa \neq 0$:

$$\{\tilde{J}_1, \tilde{J}_2\} = \sigma \tilde{J}_3 = \sigma J_3 = \sigma \{J_1, J_2\}.$$

Далее считаем, что скобка $\{\cdot, \cdot\}_\sigma$ для произвольного $\sigma \neq 0$ задана на том же пространстве \mathbb{R}^6 , что и исходная скобка $\{\cdot, \cdot\} = \{\cdot, \cdot\}_1$. Функции Казимира f_1 и f_2 скобки $\{\cdot, \cdot\}_\sigma$ зависят от σ и \varkappa :

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + \sigma x_3^2 + \varkappa(J_1^2 + J_2^2 + \sigma J_3^2) = a, \quad (1)$$

$$f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 + \sigma x_3 J_3 = b. \quad (2)$$

При $\varkappa = 0$, $\sigma = 1$ они совпадают с геометрическим интегралом и интегралом площадей из классической механики. Псевдоевклидовы аналоги систем механики отвечают случаю $\varkappa = 0$, $\sigma = -1$ и задаются на алгебре Ли $e(2, 1)$. Отметим, что присутствие символа σ в формулах ниже означает их выполнение для всех $\sigma \in \mathbb{R}$.

Совместный уровень $M_{a,b}^4 = \{p \in \mathbb{R}^6 | f_1(p) = a, f_2(p) = b\}$ является четырехмерным симплектическим листом скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ при $a > 0$ и любом $b \in \mathbb{R}$, если $\sigma = 1$. Если

же $\sigma = -1$, то гладкими четырехмерными поверхностями будут все поверхности уровня (будем называть их *неособыми* $M_{a,b}^4$) за исключением уровня $M_{0,0}^4$, содержащего все точки вида $(J_1, J_2, J_3, 0, 0, 0)$.

Следующие семейства гамильтонианов H_σ и интегралов K_\varkappa находятся в инволюции $\{H_\sigma, K_\varkappa\}_\sigma = 0$ при всех значениях \varkappa, σ :

$$H_\sigma = \frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 + 2\sigma J_3^2) + c_1 x_1, \quad (3)$$

$$K_\varkappa = \frac{1}{4}(J_1^2 - J_2^2 - 2c_1 x_1 + \varkappa c_1^2)^2 + \frac{1}{4}(2J_1 J_2 - 2c_1 x_2)^2. \quad (4)$$

При $\varkappa = 0$ получим интеграл С.В.Ковалевской $K = K_0$, а при $\sigma \neq 0$ — гамильтонианы классического волчка Ковалевской H_1 и его псевдоевклидова аналога H_{ps} :

$$H_{ps} = \frac{1}{2}J_1^2 + \frac{1}{2}J_2^2 - \sigma J_3^2 + c_1 x_1. \quad (5)$$

В случае $\varkappa = 0$ растяжение координат позволяет привести систему на поверхности $M_{a,b}^4$ к системе на поверхности $M_{\text{sgn } a, \tilde{b}}^4$ для подходящего $\tilde{b} \geq 0$ с условием послышной гомеоморфности слоений Лиувилля. В евклидовом случае это влекло $a = 1$ для всех неособых $M_{a,b}^4$, а в псевдоевклидовом влечет наличие ровно трех существенно различных случаев: $a = -1, a = 1$ и $a = 0, b = 1$. Можно считать, что $c_1 = 1$, или что $c_1 > 0$.

Критическое множество псевдоевклидова аналога волчка Ковалевской.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *При произвольном $\varkappa \in \mathbb{R}$ критическое множество системы Ковалевской $\{\cdot, \cdot\}, H_1, K$ и ее псевдоевклидова аналога $\{\cdot, \cdot\}_\sigma, H_\sigma, K$ совпадают в $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$, причем с сохранением ранга критических точек.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что отличие между скобками Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_\sigma$ и $\{\cdot, \cdot\}$ состоит в умножении на σ структурных констант для $\{J_1, J_2\}, \{J_1, x_2\}, \{J_2, x_1\}$ и $\{x_1, x_2\}$.

1. Для всех $F \in C^\infty(\mathbb{R}^6)$, в том числе для интеграла K , имеем $\{J_3, F\}_\sigma = \{J_3, F\}$ и $\{x_3, F\}_\sigma = \{x_3, F\}$. Поскольку $H_\sigma = H_1 + f(J_3)$, то $\{J_3, H_\sigma\}_\sigma = \{J_3, H_1\}$, и то же самое верно для x_3 .

2. Из переменных J_1, J_2, x_1, x_2 разберем случай J_1 , другие аналогичны.

$$\{J_1, K\}_\sigma = \{J_1, J_2\}_\sigma \frac{\partial K}{\partial J_2} + \{J_1, J_3\}_\sigma \frac{\partial K}{\partial J_3} + \dots = \sigma \cdot \{J_1, J_2\} \frac{\partial K}{\partial J_2} + 0 + \dots = \sigma \{J_1, K\}.$$

$$\{J_1, H_\sigma\}_\sigma = \{J_1, J_2\}_\sigma \frac{\partial H_\sigma}{\partial J_2} + \{J_1, J_3\}_\sigma \frac{\partial H_\sigma}{\partial J_3} = \sigma \{J_1, J_2\} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial J_2} + \{J_1, J_3\} \cdot \sigma \frac{\partial H_1}{\partial J_3} = \sigma \{J_1, H_1\}.$$

В последнем равенстве коэффициент σ в одном из слагаемых возникает как структурная константа скобки $\{\cdot, \cdot\}_\sigma$, а в другом — как коэффициент при J_3^2 в полиноме H_σ . Утверждение доказано. \square

Отсюда для псевдоевклидова аналога системы Ковалевской (при всех $\varkappa \in \mathbb{R}$) верно представление критического множества в виде объединения шести семейств критических точек, полученное в работе [24] И.К. Козловым для семейства систем Ковалевской на пучке алгебр Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$. Одно из этих семейств в точности совпадает с множеством точек, где при $\varkappa = 0$ верно $K_\varkappa = K = 0$:

$$x_1 = \frac{J_1^2 - J_2^2}{2c_1}, \quad x_2 = \frac{J_1 J_2}{c_1}. \quad (6)$$

Множество точек ранга ноль при $\varkappa \in \mathbb{R}$ представимо как объединение трех множеств:

$$1. (J_1, J_2, 0, \varkappa c_1, 0, 0) \quad 2. (J_1, 0, 0, x_1, 0, 0) \quad 3. \left(J_1, 0, J_3, \frac{J_1^2 + \varkappa c_1^2}{2c_1}, 0, \frac{J_1 J_3}{c_1} \right). \quad (7)$$

В случае $\varkappa = 0$ все положения равновесия системы на неособых $M_{a,b}^4$ принадлежат второй и третьей серии: в точках первой серии заведомо $f_1 = 0, f_2 = 0$, т.е. они лежат на особом уровне $M_{0,0}^4$. В точках третьей серии $K = 0$, а в точках второй серии это верно лишь для ее пересечения с третьей: $x_1 = J_1^2/2c_1$.

Гамильтоновы поля sgrad_σ и sgrad функций H_σ, H_1 и K для скобок $\{\cdot, \cdot\}_\sigma$ и $\{\cdot, \cdot\}$ связаны так:

$$\text{sgrad}_\sigma H_\sigma = X \cdot \text{sgrad} H_1, \quad \text{sgrad}_\sigma K = X \cdot \text{sgrad} K, \quad X = \text{diag}(\sigma, \sigma, 1, \sigma, \sigma, 1).$$

Отсюда несложно исследовать невырожденность этих точек, следуя [24], где это было сделано для семейства Ковалевской на пучке $so(3, 1) - e(3) - so(4)$. Для каждого из шести семейств точек ранга 1 аннулирующая комбинация $\mu_1 \text{sgrad}_\sigma H_\sigma + \mu_2 \text{sgrad}_\sigma K = 0$ задана теми же коэффициентами как в [24]. Пара ненулевых собственных значений λ линеаризации этой комбинации дает ответ о боттовости (невырожденности) особенности и ее типе.

Здесь и далее примем $\varkappa = 0$. Тогда для точек уровня $K = 0$ имеем

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 1; \quad \lambda^\pm = \pm 2i\sigma(-J_3(J_1^2 + J_2^2) + 2c_1 J_1 x_3).$$

При вычислении координат критических точек для псевдо-евклидова случая примем $\sigma = -1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *На неособых орбитах $M_{a,b}^4$ псевдоевклидова волчка Ковалевской произвольная критическая точка ранга 1, принадлежащая уровню $K = 0$, вырождена, если и только если $a \cdot h = b^2$. Все невырожденные точки имеют эллиптический тип, являясь точками нестрогого минимума функции K в симплектическом листе $M_{a,b}^4$ или на изоэнергетической поверхности Q_h^3 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda^\pm \neq 0$, то из их принадлежности мнимой оси имеем эллиптический тип соответствующей критической точки. Для функции K в $M_{a,b}^4$ все они являются точками минимума (нестрогого, вообще говоря). Если же $\lambda^\pm = 0$, то либо $J_1 = J_2 = 0$, либо

$$J_3 = \frac{2c_1 J_1 x_3}{J_1^2 + J_2^2}.$$

1. В первом случае из (6) имеем $h = -J_3^2, b = -x_3 J_3, a = -x_3^2$. Отсюда $ah = b^2$, причем $a < 0$, если орбита $M_{a,b}^4$ неособая (в случае $a = 0$ имеем $b = 0$).

2. Во втором случае, подставив формулы для x_1, x_2, J_3 , получим $ha = b^2$:

$$h = J_1^2 - J_3^2 = a \cdot \frac{4c_1^2 J_1^2}{(J_1^2 + J_2^2)^2}, \quad b = J_1 \left(\frac{J_1^2 + J_2^2}{2c_1} - \frac{2c_1 x_3^2}{J_1^2 + J_2^2} \right) = a \cdot \frac{2c_1 J_1}{J_1^2 + J_2^2}.$$

Тем самым, каждая тройка J_1, J_2, x_3 , для которой $ah = b^2$ и каждое из уравнений имеет решение, соответствует вырожденной точке системы. Тогда при $a \neq 0$ полный прообраз точки $h = b^2/a, k = 0$ состоит из вырожденных точек или пуст. В случае $a = 0$ имеем $b = h = 0$, т.е. $M_{a,b}$ является особым. \square

В точках ранга ноль, принадлежащих семейству 3 из (7), ненулевые собственные значения линеаризации гамильтонова векторного поля $\text{sgrad}_\sigma H_\sigma$ равны

$$\lambda_1^\pm = \pm i \cdot 2\sigma J_3, \quad \lambda_2^\pm = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sigma(J_1^2 - 2\sigma J_3^2)}$$

Одна пара является мнимой, а тип другой зависит от σ , J_1 и J_3 : при $\sigma = 1$ ее тип может, вообще говоря, быть как вещественным, так и мнимым (знак $J_1^2 - 2J_3^2$ может меняться). В случае $\sigma = -1$ имеем $J_1^2 - 2\sigma J_3^2 \geq 0$. Случаи $J_1^2 = 2J_3^2$ или $J_3 = 0$ соответствуют вырождениям, а иначе все четыре собственных значения будут мнимыми. Иными словами, все невырожденные точки ранга 0 псевдоевклидова аналога волчка Ковалевской имеют тип центр-центр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *В системе псевдоевклидова волчка Ковалевской в ограничении на двумерную поверхность $K = 0$ в симплектическом листе $M_{a,b}^4$ для $f_1 = a, f_2 = b$ имеется в точности*

- две невырожденные точки максимума функции H (имеющих тип центр-центр во всем $M_{a,b}^4$) при $a > 0, |b| > \sqrt{2c_1}a^{3/4}$ и одна вырожденная точка $J_1 = \operatorname{sgn} b \sqrt{2c_1}a^{1/4}, x_1 = J_1^2/2c_1, x_2 = x_3 = J_2 = J_3 = 0$ при $|b| = \sqrt{2c_1}a^{3/4}$.
- две невырожденные точки максимума функции H (тип центр-центр в $M_{a,b}^4$) при $a = 0, b \neq 0$.
- четыре невырожденные точки максимума функции H (тип центр-центр в $M_{a,b}^4$) при $a < 0, b \neq 0$ и четыре вырожденные точки максимума функции H при $b = 0$ (им соответствуют вырожденные точки ранга 0 в $M_{a,0}^4$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Вырождения точек ранга 0 соответствуют двум случаям: $J_3 = 0$ или $a = b = 0$. В первом случае $a = J_1^4/4c_1^2, b = J_1^3/2c_1, h = J_1^2$. Иными словами, при $J_1 \neq 0$ имеем $a > 0, b = \pm\sqrt{2c_1}a^{3/4} \neq 0, h = b^2/a = 2c_1\sqrt{a} > 0$.

Пусть $b = \frac{J_1}{2c_1}(J_1^2 + \sigma 2J_3^2) = 0$, тогда при $\sigma = -1$ имеем либо $J_1 = 0, a = 0$, либо $J_1 = \pm\sqrt{2}J_3$.

Тогда $4ac_1^2 = -J_3^4, h = J_3^2 = \sqrt{-ac_1^2} > 0$, т.е. каждому $a < 0$ при $b = 0$ соответствует четыре вырожденные точки $J_3 = \pm\sqrt{2c_1}(-a)^{1/4}, J_1 = \pm\sqrt{2}J_3$.

2. Количество точек ранга 0 определим, выразив $J_3^2 = J_1^2/4 - ac_1^2/J_1^2$ из $f_1 = a$, поскольку случай $J_1 = 0$ разобран выше. Подставим в уравнения $f_2 = b, H = h$:

$$b = \frac{J_1^3}{4c_1} + \frac{ac_1}{J_1}, \quad h = \frac{3J_1^2}{4} + \frac{ac_1^2}{J_1^2}. \quad (8)$$

Эти соотношения при $a > 0$ задают бифуркационную кривую классического волчка Ковалевской $b(t), h(t)$ на плоскости Obh , соответствующей т.н. карусельному движению волчка — нулям $k = 0$ параметрической бифуркационной кривой (9) на плоскости значений отображения момента $(H, K) = (h, k)$:

$$h(t) = \frac{b^2c_1^2}{2t^2} + t, \quad k(z) = ac_1^2 - \frac{b^2c_1^2}{t} + \frac{b^4c_1^4}{4t^4}. \quad (9)$$

Параметр t с точностью до постоянного множителя имеет здесь смысл угловой скорости [14].

При $a > 0$ расположение кривой $b(t), h(t)$ на плоскости Obk относительно других кривых устроено так же, как в классическом волчке Ковалевской. Кроме того несложно проверить, что при $a \cdot h > b^2$ система уравнений $f_1 = a, f_2 = b, H = h$ не имеет решений среди точек ранга 0, в которых $K = 0$. Иными словами, при $a > 0, b = \sqrt{2c_1}a^{3/4}$ имеем одну вырожденную точку ранга 0, при больших b имеем две точки (для каждого из знаков J_3), а при $|b| < \sqrt{2c_1}a^{3/4}$ — ни одной.

3. Если $a = 0$, то $\delta J_1^2/2c_1 = x_3 = J_1 J_3/c_1$. Поскольку $J_1 \neq 0$ в силу $b \neq 0$, то $J_1 = \delta \cdot 2J_3$. Отсюда получаем $h = 3J_3^2$ и $c_1 b = 2\delta J_3^3$. Иными словами, для выбранного $\delta = \pm 1$ значение J_3 определено однозначно. Получили две критические точки ранга 0, обе имеющие тип центр-центр.

4. Если $a < 0$ и $b \neq 0$ (считаем, что $b > 0$), то выразим J_3^2 через J_1 из $f_2 = b$ и подставим в $f_1 = a$:

$$J_3^2 = J_1^2/2 - bc_1/J_1, \quad P(J_1) = J_1^4 - 4bc_1J_1 + 4ac_1^2 = 0.$$

Последнее уравнение задает многочлен четвертой степени с одним вещественным экстремумом $J_1^{ext} = c_1^{1/3}b^{1/3} > 0$ и отрицательным значением $4ac_1^2$ в точке $J_1 = 0$, ветви которого направлены вверх. Он имеет в точности два корня, притом разных знаков. Решение $J_3^-(J_1^-)$ для отрицательного корня J_1^- заведомо существует. Это дает нам две точки ранга ноль с данными $J_1^- < 0, \pm J_3^- \neq 0$ и $x_1 = (J_1^-)^2/2c_1 > 0, x_3 = J_1^- J_3^-/c_1, J_2 = x_2 = 0$. Значения f_1, f_2, h в них совпадают.

Для положительного корня J_1^+ требуется проверить, что правая часть неотрицательна. При $J_1 > 0$ она имеет единственный корень $J_1 = 2^{1/3}b^{1/3}c_1^{1/3}$: производная строго положительна, а предел при $J_1 \rightarrow +0$ есть $-\infty$. Подставив его во второе уравнение, получим $2^{4/3}b^{4/3}c_1^{4/3} - 4 \cdot 2^{1/3}b^{4/3}c_1^{4/3} + 4ac_1^2 < 0$. Поскольку при $J_1 > b^{1/3}c_1^{1/3}$ правая часть второго уравнения строго возрастает, и в точке $2^{1/3}b^{1/3}c_1^{1/3}$ (корне первого уравнения) она отрицательна, то в корне $J_1^+ > 0$ правая часть первого положительна при всех $b > 0$. Это дает нам еще одну пару точек ранга 0 с координатами $J_1^+ > 0, \pm J_3^+ \neq 0, x_1 = (J_1^+)^2/2c_1 > 0, x_3 = J_1^+ J_3^+/c_1, J_2 = x_2 = 0$ и одинаковыми значениями $f_1 = a, f_2 = b, H = h$. Утверждение доказано. \square

2. Слоение Лиувилля на нулевом уровне интеграла Ковалевской

Слоение Лиувилля на подмножестве $K = 0$ псевдоевклидова аналога волчка Ковалевской опишем, стратифицировав плоскость значений отображения $(f_2, H) = (b, h)$. Каждый страт состоит из точек, прообразы окрестностей которых послойно гомеоморфны. Точки (b, h) из двумерных стратов назовем регулярными, а остальные — бифуркационными. Объединение последних называют бифуркационной диаграммой $\Sigma_{b,h}$ отображения (f_2, H) . Отметим, что система обладает и компактными, и некомпактными слоями. Также, помимо особенностей с критическими точками, найдены некритические бифуркации. В прообразе их бифуркационного значения отсутствуют критические точки.

Проверка невырожденности критических точек также позволяет определить типы локальных и полулокальных невырожденных особенностей с данным особым значением с точки зрения всего M^4 и неособого уровня энергии $Q^3 = h$. Все они являются эллиптическими, и потому устройство окрестности слоя полностью определяется типом особых точек: это минимальные 3-атомы A (произведение окружности и 2-атома A — расслоенной окрестности точки минимума в диске D^2) и особенности центр-центр (произведения двух 2-атомов A).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Бифуркационная диаграмма $\Sigma_{bh}^{sgn a}$ отображения (f_2, H) псевдоевклидова аналога волчка Ковалевской в ограничении на уровень $K = 0$ интеграла Ковалевской и $f_1 = a$ при $a \neq 0$ содержится в объединении трех кривых: оси $h = 0$, параболы $h = b^2/a$ и параметрической кривой $b(t) = t^3/4c_1 + ac_1/t, h(t) = 3t^2/4 + ac_1^2/t^2$. В случае $a = 0, b \neq 0$ это прямая $h = 0$ и кривая $h(b) = 3(bc_1/2)^{2/3}$.*

Дуги этих кривых, входящие в бифуркационную диаграмму $\Sigma_{bh}^{sgn a}$, изображены на рис.1 сплошными линиями. Не вошедшие в нее дуги отмечены курсивными линиями (штрихопунктирные линии прокомментированы ниже). Бифуркационная диаграмма является 1-остовом следующей стратификации плоскости Obh .

ТЕОРЕМА 1. *Стратификация плоскости значений (b, h) отображения (f_2, H) интеграла площадей и гамильтоняна H при разных знаках $f_1 = a$ (т.е. в случае $a < 0, b \in \mathbb{R}$, в случае $a > 0, b \in \mathbb{R}$ и в случае $a = 0, b \neq 0$) изображена на рис.1 сплошными линиями:*

- страты состоят из точек с одинаковым устройством слоения Лиувилля в прообразе окрестности данной точки, для каждого из них на рис.1 указан класс гомеоморфности его прообраза (если он состоит из вырожденных в M^4 точек, то обведен окружностью),
- 0 -остов пуст при $a = 0$ (уровень $b = 0$ исключен), состоит из точек $b = 0, h = 0$ и $b = 0, h = c_1\sqrt{-a}$ при $a < 0$, точек $b = 0, h = 0$ и $b = \pm\sqrt{2c_1}a^{3/4}, h = b^2/a$.
- 1 -остов является объединением дуг кривых из утверждения 4, перечисленных в таблице 1 и обозначенных $e_i^{\text{sgn} a}$, а также симметричных им при $b \rightarrow -b$,
- бифуркации на типичных уровнях $f_1 = a, f_2 = b, K = 0$ являются 2 -атомами A , минимальной или максимальной окружностью этой 2 -поверхности, кольцом $I^1 \times S^1$ с одной внутренней окружностью, из которой выкололи точку.

страт	e_0^-	e_1^-	e_2^-	e_3^-	e_3^-	e_4^-
уровень	$4S^1$	$2pt$	$2pt$	$2\mathbb{R} \sqcup 2S^1$	$2\mathbb{R}$	$2S^1$
кривая	$b = 0$	$b(t), h(t)$	$b(t), h(t)$	$h = 0, b < b(t_0):$ $h(t_0) = 0$	$h = 0, b > b(t_0):$ $h(t_0) = 0$	$h = b^2/a$

страт	e_1^0	e_2^0	e_0^+	e_1^+	e_2^+	e_3^+
уровень	$2pt$	$2pt$	$2S^1$	$2pt$	S^1	$2\mathbb{R}$
кривая	$h = 3 \cdot 2^{-2/3} c_1^{2/3} b^{2/3}$	$h = h_0$	$b = 0$	$b(t), h(t)$	$h = b^2/a$	$h = 0$

Таблица 1: Одномерные страты бифуркационных диаграмм на плоскости Obh для неособых $M_{a,b}^4$, т.е. $(a, b) \neq (0, 0)$. Верхний индекс $e_i^{\text{sgn} a}$ отвечает знаку $f_1 = a$. Указан класс гомеоморфности прообраза любой точки 1-страта и кривая на плоскости Obh , содержащая этот страт.

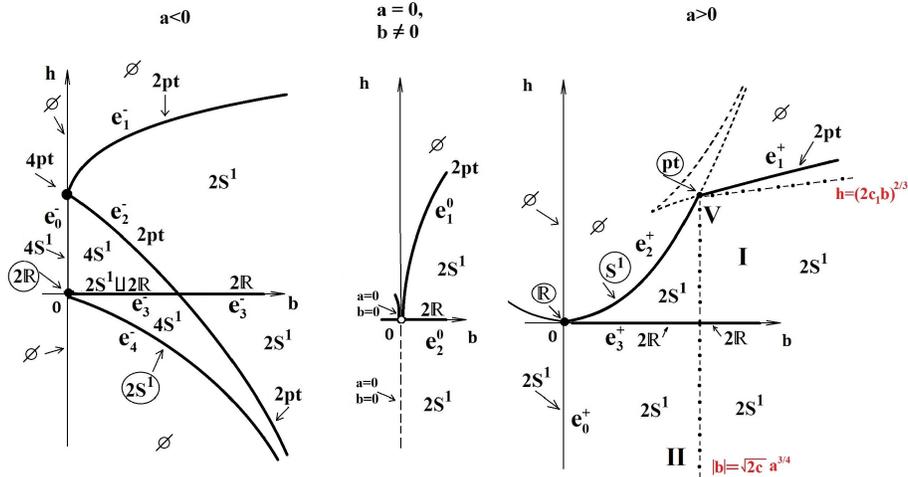


Рис. 1: Бифуркационные диаграммы псевдоевклидова волчка Ковалевской при $k = 0$: плоскость Obh при $a < 0$ или $a > 0$, полуплоскости Obh с $b \neq 0$ при $a = 0$. Для каждого страта (двумерные, ограниченные сплошными линиями), а также одномерных и нульмерных указан класс гомеоморфности совместного уровня четырех интегралов. Обведены окружностями уровни, состоящие из вырожденных точек ранга 0 (совпадает со слоем) или ранга 1 (слои, гомеоморфные \mathbb{R} или S^1).

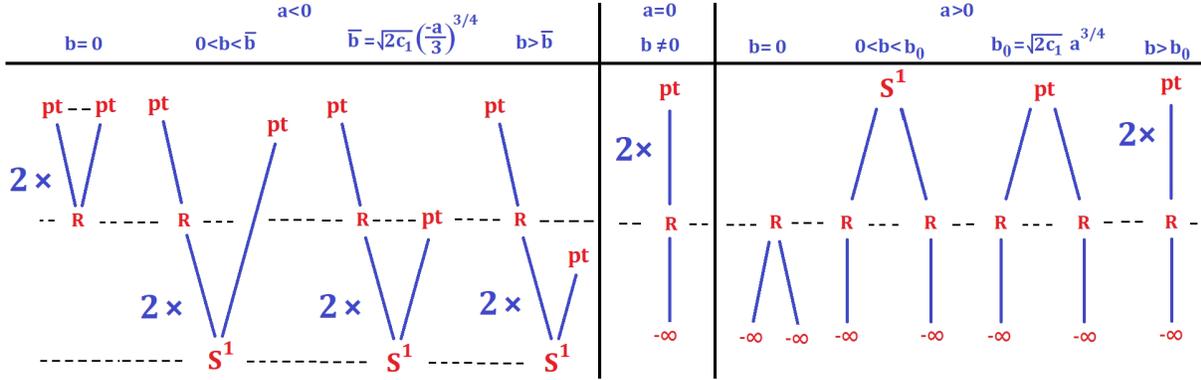


Рис. 2: Слоение функции H на уровне $K = 0$ в $M_{a,b}^4$ в зависимости от b и a , исключая $a = 0, b = 0$.

2.1. Слоения в случае $a = 0$

1. Пусть $a = 0$, тогда $x_3 = \delta(J_1^2 + J_2^2)/2c_1$, где $\delta = \pm 1$. В вычислениях примем $\delta = 1$: ответ для другого знака δ получается изменением знака у J_1 .

Подставим формулу для x_3 при $\delta = 1$ в уравнение $J_1(J_1^2 + J_2^2)/2c_1 = b + x_3J_3$:

$$J_3 = J_1 - \frac{2c_1b}{J_1^2 + J_2^2}.$$

Функция $J_3(J_1, J_2)$ определена на плоскости OJ_1J_2 без нуля — случай $J_1 = J_2 = 0$ мы не рассматриваем, т.к. тогда $a = b = 0$, и множество $M_{a,b}^4$ не является гладкой поверхностью. Выразим H через J_1, J_2 :

$$H = \frac{4bc_1(J_1^3 + J_1J_2^2 - c_1b)}{(J_1^2 + J_2^2)^2}.$$

Из критерия компактности [36] следует (он применим, поскольку $b \neq 0$), что все уровни $H = h$ кроме $h = 0$ будут компактны и ограничены. Критические точки такого слоения легко находятся: это точка $J_1 = \sqrt[3]{4bc_1}, J_2 = 0$. Она является невырожденным максимумом H и соответствует точке центр-центр. Остальные компактные слои гомеоморфны окружностям.

2. Уровень $h = 0$ задается условием $0 = J_1^2 - J_3^2$:

$$0 = \frac{2c_1b}{J_1^2 + J_2^2} \left(2J_1 - \frac{2c_1b}{J_1^2 + J_2^2} \right).$$

Правая часть получаемого уравнения $J_2^2 = c_1b/J_1 - J_1^2$ при $J_1 < 0$ не имеет корней, а при $J_1 > 0$ строго монотонна, причем ее предел $\lim_{J_1 \rightarrow +0} J_2^2 = +\infty$. Без ограничения общности $b > 0$, и все решения лежат на гладкой кривой в полуплоскости $J_1 > 0$, симметричной относительно оси OJ_1 и имеющей асимптоту OJ_2 . Производная правой части отрицательна, т.е. $J_2 = 0$ при единственном значении J_1 . Полученная кривая разбивает плоскость OJ_1J_2 без двух точек (нуля и точки максимума) на два кольца, каждое из которых расслоено на окружности.

На рис. 3 и 4 приведем при $b = 1$ вид графика $J_3(J_1, J_2)$ и слоение функции H на плоскости OJ_1J_2 без нуля для случая $a = 0$.

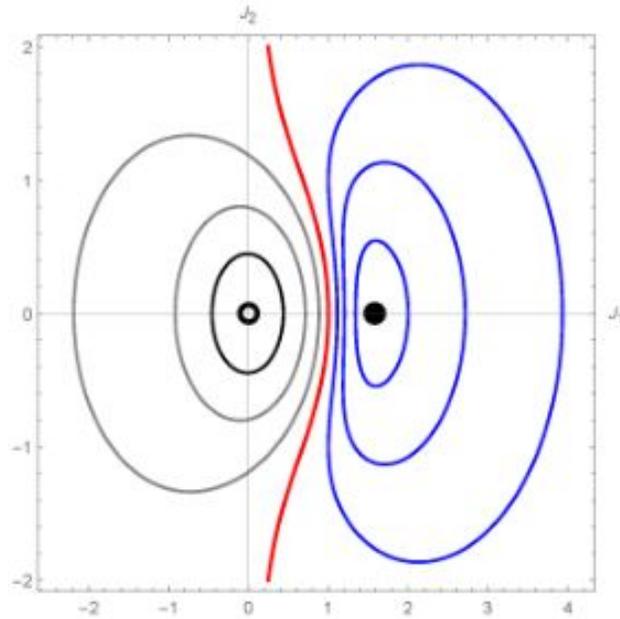


Рис. 3: Случай $a = 0, b = 1$: слоение функции H на плоскости OJ_1J_2 без нуля

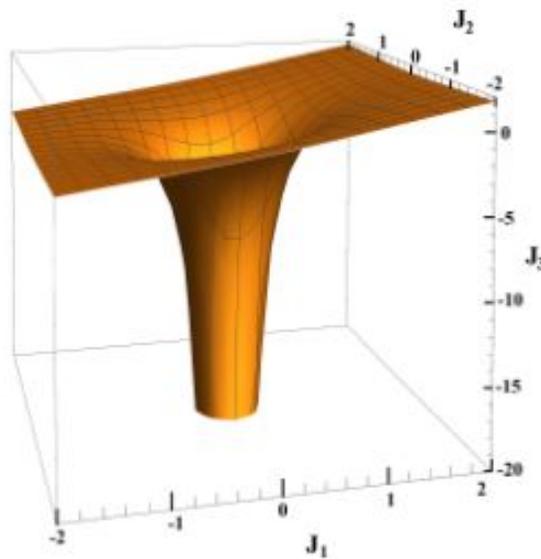


Рис. 4: Случай $a = 0, b = 1$: график $J_3(J_1, J_2)$ в пространстве $OJ_1J_2J_3$

2.2. Случай $a < 0$

1. При $a < 0, k = 0$ координата $x_3 = \delta \sqrt{-ac_1^2 + (J_1^2 + J_2^2)^2}$ отлична от нуля и отделена от него по модулю величиной $\delta \sqrt{-a}$, где δ есть знак x_3 . Тогда из уравнения $f_2 = b$ получим формулу для $J_3(J_1, J_2)$, определенную на всем $\mathbb{R}^2(J_1, J_2)$, и подставим ее в уравнение $H = h$:

$$H = \frac{-4b^2c_1^2 - 4ac_1^2J_1^2 + 4c_1bJ_1(J_1^2 + J_2^2)}{(J_1^2 + J_2^2)^2 - 4ac_1^2}.$$

Данная функция ограничена при фиксированных $c_1, a < 0, b \neq 0$ (что легко видеть в полярных координатах $J_1 = r \cos \varphi, J_2 = r \sin \varphi$). Она также не зависит от δ , т.к. $\delta^2 = 1$.

Изучим уровни этой функции на плоскости J_1, J_2 — проекция связной компоненты W на плоскость J_1, J_2 является биекцией и сохраняет слоение.

2. Согласно критерию компактности, доказанному автором ранее в [36] в случае $b \neq 0$, все слои при $a \in \mathbb{R}, k = 0, b \neq 0, h \neq 0$ являются компактными или пустыми. Тем самым, при $b \neq 0$ (далее считаем, что $b > 0$) достаточно найти критическое множество функции $H(J_1, J_2)$, изучить типы этих точек и описать уровень $H = 0$. Случай $b = 0$ изучим отдельно.

Критическое множество задается системой равенств нулю двух частных производных H по J_1, J_2 . Разложив их на множители, имеем

$$(2ac_1J_1 - b(J_1^2 + J_2^2))(4ac_1^2 - 4bc_1J_1 + J_1^4 - J_2^4) = 0,$$

$$J_2(2ac_1J_1 - b(J_1^2 + J_2^2))(2bc_1 - J_1(J_1^2 + J_2^2)) = 0.$$

Множество критических точек задается объединением трех множеств (1),(2),(3):

- (1): $2ac_1J_1 - b(J_1^2 + J_2^2) = 0$,
 (2): $J_2 = 0$ и J_1 есть корень многочлена $P(J_1) = J_1^4 - 4bc_1J_1 + 4ac_1^2$,
 (3): $2bc_1 - J_1(J_1^2 + J_2^2) = 0$, $4ac_1^2 - 4bc_1J_1 + J_1^4 - J_2^4 = 0$

Первое множество (1) является окружностью с центром в точке $(ac_1/b, 0)$ и радиусом $|a|c_1/b$. В ее точках матрица d^2H имеет собственные значения 0 и $(-2b^2)/(-b^2 + aJ_1^2)$. Поскольку $a < 0$, то данное значение положительно: имеем нестрогий минимум функции H . В точках этой окружности функция H равна b^2/a .

Второе множество (2) состоит из двух точек $(J_1^+, 0)$ и $(J_1^-, 0)$. Это следует из наличия ровно одного минимума $J_1 = (bc_1)^{1/3}$ у производной $4J_1^3 - 4bc_1$ данного многочлена. При этом $P(0) = 4ac_1^2 < 0$, а $P(b^{1/3}c_1^{1/3}) = -3b^{4/3}c_1^{4/3} + 4ac_1^2 < 0$. Отсюда один корень $J_1^+ > b^{1/3}c_1^{1/3}$, а другой $J_1^- < 0$. С учетом $P(J_1^\pm) = 0$, матрица d^2H , умноженная на куб знаменателя H , становится диагональной. Знаки ее двух элементов совпадают со знаками $(4ac_1 - 3bJ_1)(2ac_1 - bJ_1)^2$ и $(2ac_1 - bJ_1)^3$. Корни этих многочленов $J_1 = 4ac_1/3b$ и $J_1 = 2ac_1/b$ отрицательны, многочлен P в них больше нуля, т.е. они лежат левее отрицательного корня J_1^- многочлена P . Следовательно, для всех $b > 0$ это точки невырожденных максимумов.

Третье множество (3) пусто: выразим из первого уравнения J_2^2 (имеем $J_1 \neq 0$, т.к. $b \neq 0$) и подставим во второе. Получим уравнение $c_1^2(a - 4b^2/J_1^2) = 0$, левая часть которого строго отрицательна.

3. Точки (J_1, J_2) , в которых $H = 0$, задаются уравнением $J_2^2 = bc_1/J_1 + ac_1J_1/b - J_1^2$. Обозначим $Q(J_1) = bc_1 + ac_1J_1^2/b - J_1^3$. Многочлен Q имеет минимум и максимум при $J_1 = 2ac_1/3b < 0$ и $J_1 = 0$ соответственно. При $b = \bar{b} = \sqrt{2}c_1(-a/3)^{3/4}$ точка минимума является корнем, при $b > \bar{b}$ в ней $Q(J_1) > 0$, а при $0 < b < \bar{b}$ в ней $Q(J_1) < 0$. Поскольку многочлен Q получен умножением правой части уравнения на J_1 , то при $0 < b < \bar{b}$ имеем отрезок точек $J_1 < 0$, таких что в них $J_2^2 \geq 0$. При $b > \bar{b}$ в полуплоскости $J_1 \leq 0$ нет точек уровня $H = 0$, а при $b = \bar{b}$ имеется ровно одна точка, в которой $J_2 = 0$. В полуплоскости $J_1 > 0$ уровень $H = 0$ состоит из точек кривой $J_2(J_1)$, симметричной относительно $J_2 = 0$ и имеющей асимптоту $J_1 = 0$.

Согласно критерию компактности, компактны все (кроме, возможно, слоев уровня $h = 0$) слои функции H на множестве $K = 0$ в $M_{a,b}^4$ для $a < 0$ и различных $b \neq 0$. Результат изображен на рисунке 2.

4. Случай $a < 0, b = 0$ существенно проще. Поскольку $x_3 \neq 0$, то $J_3 = (J_1x_1 + J_2x_2)/x_3$. Подставив выражения для x_1, x_2 , получим что при фиксированном $\text{sgn}x_3 = \delta$ функция $J_3(J_1, J_2)$ определена на всей плоскости.

На множестве $K = 0$ имеем $H = J_1^- J_3^2 = \frac{4ac_1^2 J_1^2}{4ac_1^2 - (J_1^2 + J_2^2)^2}$. Числитель и знаменатель не положительны, причем последний отделен от нуля. Критическое множество функции H на

плоскости J_1, J_2 состоит из прямой $J_1 = 0$ (которая совпадает с множеством уровня $H = 0$) и пары точек $(\pm\sqrt{2c_1}(-a)^{1/4}, 0)$, задаваемых системой уравнений $J_2 = 0$ и $4ac_1^2 + J_1^4 - J_2^4 = 0$. Две эти точки являются невырожденными максимумами (в них матрица d^2H равна $diag(-2, -1)$), а точки $J_1 = 0$ — нестрогими минимумами: матрица d^2H в них диагональна, один из диагональных элементов равен нулю, а другой равен $8ac_1^2/(4ac_1^2 - J_2^4)$, т.е. положителен из $a < 0$. Полученное слоение на множестве $K = 0$ орбиты $M_{a,0}^4$ также изобразим на рис. 2.

2.3. Случай $a > 0$

1. Будем считать, что $b \geq 0$ в силу наличия у системы симметрии. Подставим выражения для x_1 и x_2 через J_1, J_2 в уравнения $f_1 = a, H = h$, и обозначим $x = x_3^2 + a, J = J_3^2 + a$, получим

$$J_1^2 = h + J_3^2 =: J, \quad \left(\frac{J_1^2 + J_2^2}{2c_1} \right)^2 = a + x_3^2 =: x.$$

Уравнение $f_2 = b$ перепишем и затем возведем в квадрат:

$$(b + x_3 J_3)^2 = J_1^2 \left(\frac{J_1^2 + J_2^2}{2c_1} \right)^2.$$

Подставив выражения для J_1^2 и дроби, получим

$$x_3^2 J_3^2 + 2b(b + x_3 J_3) - b^2 = x_3^2 J_3^2 + h x_3^2 + a J_3^2 + ah.$$

Подставим вместо $b + x_3 J_3$ его выражение через корни из J и x : $\delta\sqrt{J}\sqrt{x}$. Здесь δ — знак J_1 , определяемый исходным уравнением $f_2 = b$ (поскольку $J_1^2 + J_2^2$ неотрицателен, и $a > 0$, то знак перед его знаком опустим). Перенеся $-b^2$ направо и возведя в квадрат, получим квадратичку по переменным x, J

$$a^2 J^2 + 2(ah - 2b^2)Jx + h^2 x^2 + 2a(b^2 J - ah)J + 2h(b^2 h - ah^2)x + (b^2 - ah)^2 = 0.$$

Инварианты квадратички (след tr и определитель det квадратичной части, определитель расширенной матрицы Det) равны

$$tr = a^2 + h^2 > 0, \quad det = 4b^2(ah - b^2), \quad Det = -4b^6(ah - b^2)^2.$$

Квадратичка вырождается в двух случаях: при $b = 0$ и при $ah = b^2$. В обоих этих случаях $tr > 0, det = Det = 0$, т.е. имеем пару совпадающих прямых. Иначе имеем гиперболу при $h < b^2/a$ (тогда $det < 0$ и $Det \neq 0$) или эллипс при $h > b^2/a$ (тогда $det > 0, tr > 0$ и $Det < 0$).

2. Опишем возможное расположение полученной квадратички.

ЛЕММА 1. *Общие точки квадратички и каждой из прямых $J = 0, J = h, x = 0, x = a$ являются двойными (точками касания, если квадратичка невырождена) и имеют координаты:*

$$J = 0, hx = -b^2 + ah, \quad J = h, hx = b^2, \quad J = b^2/a, x = 0, \quad J = h - b^2/a, x = a.$$

3. Заметим, что все точки множества $f_1 = a, f_2 = b, H = h, K = 0$ проецируются на эту квадратичку. Сформулируем три условия на точку квадратички, при нарушении которых система заведомо не имеет вещественных решений:

- $J_1^2 \geq 0$: $J \leq 0$ при $h \geq 0$ и $J \geq h$ при $h > 0$,
- $(J_1^2 + J_2^2)/4c_1^2 \geq 0$: $x \geq a$,

- $(J_1^2 + J_2^2)/2c_1 \geq J_1^2/2c_1 : \sqrt{x} \geq h/2c_1$, т.е. $x \geq J^2/4c_1^2$.

Первые два условия задают прямые, параллельные осям OJ, Ox , а третье — параболу с вершиной в нуле. Назовем их *граничными* кривыми. На рис. 5 изобразим эти кривые и квадртку на плоскости OJx при разных b, h . На нем закрашено замкнутое множество, где выполнены все три условия. Назовем это множество и его пересечение с квадратикой *допустимыми* множеством и дугой, как и каждую точку допустимой дуги квадртки.

Тем самым, квадртка-эллипс ($h > b^2/a$, рис. 5h) и пара прямых ($b = 0, h > 0$ или $h = b^2/a, b > \sqrt{2c_1}a^{3/4}$, рис. 5g) не содержат допустимых точек. Гипербола не содержит таких точек, если $h(t) < h < b^2/a$ для $b = b(t)$ на нижней ветви параметрической кривой $b(t), h(t)$. В случае $h = b^2/a, b = \sqrt{2c_1}a^{3/4}$ такая точка одна: $x = a, J = h$.

4. В прообразе допустимой точки квадртки, лежащей на граничной кривой, хотя бы одна из четырех координат J_1, J_2, J_3, x_3 равна нулю. В случае параболы имеем $J_2 = x_2 = 0, x_1 = J_1^2/2c_1$. На прямой $x = a > 0$ имеем $x_3 = 0$. На прямой $J = 0$ при $h < 0$ имеем $J_1 = 0, |J_3| = \sqrt{|h|} > 0$. На прямой $J = h$ при $h > 0$ имеем $J_3 = 0, |J_1| = \sqrt{h} > 0$.

Точки касания квадртки с осями OJ, Ox и прямой $J = h > 0$ на рис. 5 отмечены черным, если они принадлежат допустимому множеству, или выколоты, если не принадлежат. В полуплоскости $b \geq 0$ возникает две дополнительные кривые, при которых точка касания квадртки и одной из граничных кривых пересекает и еще одну граничную кривую. Это прямая $b = \sqrt{2c_1}a^{3/4}$ при $h < b^2/a$ (касается прямой $x = a$ и пересекает параболу) и кривая $h = (2c_1b)^{2/3}$ при $b > \sqrt{2c_1}a^{3/4}$ (касание прямой $J = h$ и пересекает параболу). На рис. 1 они изображены штриховкой и делят двумерные страты на части (для точек которых квадртки изображены на рис. 5а, б, с при $h > 0$ и на рис. 5).

5. Тем самым, в допустимых точках, не лежащих на граничных кривых, все четыре переменные отличны от нуля. Это гарантирует сохранение их знаков вдоль кривой $\gamma(s) = (h(s), b(s), J(s), x(s))$, где J, x не выходят на границу допустимой области, а $h(s), b(s)$ всегда лежат в образе отображения момента при данном a . Тем самым, если четверка ненулевых знаков (s_1, s_2, s_3, t_3) координат J_1, J_2, J_3, x_3 дает решение системы $f_1 = a, f_2 = b, H = h$ в прообразе некоторой допустимой точки квадртки, то и в прообразе остальных допустимых точек квадртик (при различных b, h) имеется непрерывная ветвь данного корня. Отметим также, что четверки $(s_1, +, s_3, t_3)$ и $(s_1, -, s_3, t_3)$ являются решениями одновременно.

Явно проверим, какие тройки знаков s_1, s_3, t_3 дают решения в прообразе пробных точек с “удобными” координатами для трех дуг, на которые допустимая дуга квадртки с рис. 5а) делится черными точками касания. То же самое сделаем для компоненты $x > (ah - b^2)/h$ допустимой дуги в случае с рис. 5f). Обозначим их цифрами 1-4 и выберем пробные точки: случай $a = 1, b = 1, h = 1/2$ для рис. 5а) и точки с координатой $J = 3/4, J = 5/4$, случай $a = 1, b = 1, h = -1 : J = 1/2$ и больший из двух корней $x(J)$.

Как оказалось, решениям для этих случаев соответствуют следующие эволюции знаков для двумерных стратов и дуги e_3^+ , на которой $h = 0$:

$$\text{рис.1a : } \quad 1 : (+, +, +) \quad 2 : (+, -, +), \quad 3 : (+ - -);$$

$$\text{рис.1a : } \quad 1 : (+, -, -) \quad 2 : (+, +, -), \quad 3 : (+ + +);$$

$$\text{рис.1f : } \quad 4 : (-, -, +) \quad 2 : (+, -, +), \quad 3 : (+ - -);$$

$$\text{рис.1f : } \quad 4 : (-, +, -) \quad 2 : (+, +, -), \quad 3 : (+ + +).$$

При $h \neq 0$ допустимая дуга заканчивается двумя точками, в которых $J_2 = 0$, при $h = 0$ такая точка ровно одна. На кривых $b = \sqrt{2c_1}a^{3/4}$ и $h = (2bc_1)^{2/3}$ в одной из точек касания становятся нулевыми сразу два знака: J_2 и J_1 либо x_3 . Это не приводит к бифуркации прообраза соответствующей точки квадртки. Если $b > 0, h = 0$, то допустимая дуга неограничена. Это влечет гомеоморфность уровня не двум окружностям $2S^1$, но двум интервалам $2\mathbb{R}$.

6. В особом случае $b = 0, h = 0$ имеем $J_1 = J_3 = 0$ для всей допустимой дуги (луча $J = 0, x \geq a$), а в вершине дополнительно $x_3 = 0$. Для J_2 верно $J_2^2 = \sqrt{x_3^2 + a} > 0$, т.е. уровень гомеоморфен $2\mathbb{R}$ (отметим, что все эти точки являются вырожденными точками ранга 1, в отличие от остальных точек из прообраза $h = 0$).

В случае $b = 0, h < 0$ имеем компактную допустимую дугу — отрезок, соединяющий точку $(0, a)$ и точку граничной параболы. В прообразе точки $J = 0, x = a$ имеем $J_1 = x_3 = 0$, а знак J_3 постоянен на всей связной компоненте прообраза ($J = \sqrt{J_3^2 + h}$ для $h < 0$). По аналогии, имеем прообраз, гомеоморфный $2S^1$, т.е. данные такие значения отображения (f_2, H) не являются бифуркационными на множестве $K = 0$.

В случае $h = b^2/a, 0 < b < \sqrt{2c_1}a^{3/4}$ аналогично получим, что прообраз связан и гомеоморфен S^1 : в прообразе точки $J = h, x = a$ имеем $J_3 = x_3 = 0$, а знак J_1 однозначно определен из знака b . Они состоят из вырожденных точек ранга 1. В пределе $h \rightarrow +0$ вырожденная окружность перестраивается в два интервала путем разрыва в двух точках (при $b \leq 0$ имеем то же самое).

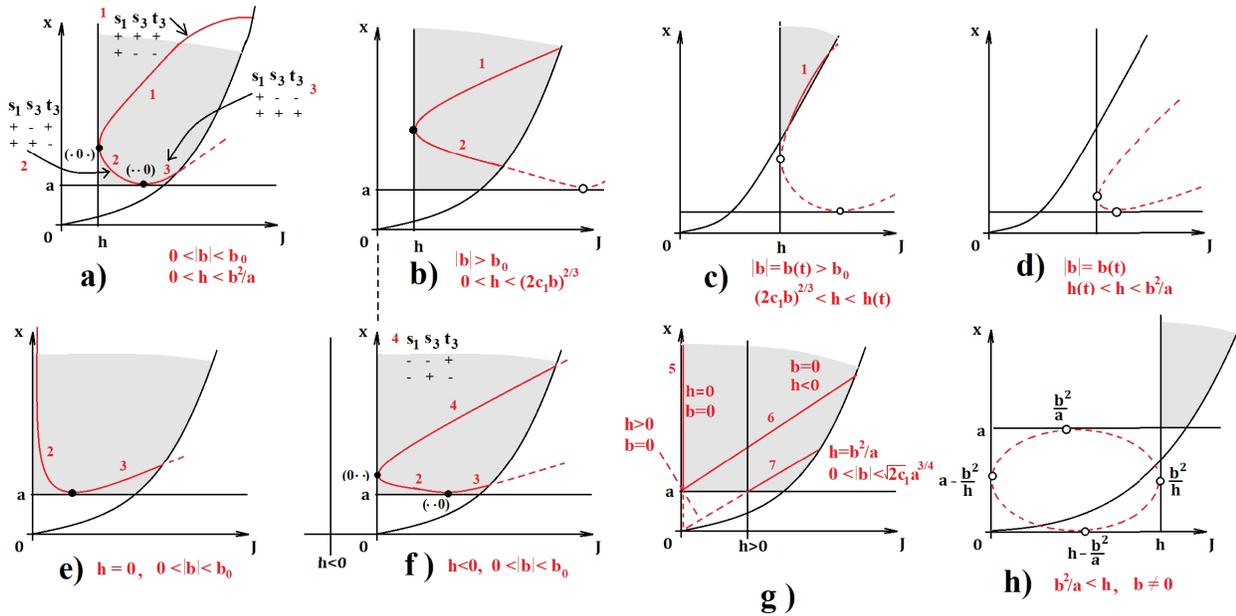


Рис. 5: Квадрика (красная линия) и граничные кривые при разных b, h в случае $a > 0$, черные точки — их точки касания. Закрашенная область и сплошная линия — допустимое множество плоскости OJx и дуга квадрики (пунктирная линия — дополнение до последней). Значение $b_0 = \sqrt{2c_1}a^{3/4}$, кривая $b(t) > 0, h(t)$ — нижняя ветвь кривой (8). Для случаев а, f указаны наборы знаков s_1, s_3, t_3 переменных J_1, J_3, x_3 , дающие решения исходной задачи $f_1 = a, f_2 = b, H = h$.

3. Заключение

Полученные результаты позволяют описать топологию слоения Лиувилля псевдоевклидовой системы Ковалевской в окрестности точек уровня $k = 0$, являющихся невырожденными точками ранга 1 и составляющими вместе слой слоения. Для изучения слоения системы при ненулевых k может быть полезно как отдельное изучение особенностей данной системы, так и адаптация метода булевых функций, развитого М.П.Харламовым [37], к псевдоевклидову случаю, когда уровень геометрического интеграла $f_1 = a$ есть обобщенный гиперboloид.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А. В., Мамаев И. С. Классическая динамика в неевклидовых пространствах — Москва, Ижевск: РХД, 2004.
2. Borisov A. V., Mamaev I. S. Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // *Rus. J. of Math. Phys.* 2016. Vol. 23, № 4. P. 431-454.
3. Kowalewski S. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // *Acta Mathematica*. 1889. Vol. 12, P. 177-232.
4. Соколов С. В. Интегрируемый случай Ковалевской в неевклидовом пространстве: разделение переменных // *Труды МАИ*. 2018. Т. 100, С. 1-13.
5. Аппельрот Г. Г. Не вполне симметричные гироскопы // *Движение твердого тела вокруг неподвижной точки*. — М., 1940.
6. Делоне Н. Б. К вопросу о геометрическом истолковании интегралов движения твердого тела около неподвижной точки, данных С. В. Ковалевской // *Матем. сб.* 1892. Т. 16, № 2. С. 346-351.
7. Smale S. Topology and Mechanics: 1 // *Invent. Math.* 1970. Vol. 10, № 4. P. 305-331.
8. Харламов М. П. *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела*, Ленинград: Изд-во Ленинградского Университета 1988.
9. Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1986. Т. 50, № 6. С. 1276-1307.
10. Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1990. Т. 54, № 3. С. 546-575.
11. Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // *УМН*. 1990. Т. 45, № 2. С. 49-77.
12. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*. — Ижевск: РХД, т. 1, 2. 1999.
13. Oshemkov A. A. Fomenko invariants for the main integrable cases of rigid body motion equations, AMS, Vol. 4. P. 67-146. (1991)
14. Bolsinov A. T., Richter P., Fomenko A. T. The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top // *Sb. Math.* 2000. Vol. 191, № 2. P. 151-188.
15. Morozov P. V. The Liouville classification of integrable systems of the Clebsch case // *Sb. Math.* 2002. Vol. 193, № 10. P. 1507-1533.
16. Morozov P. V. Topology of Liouville foliations in the Steklov and the Sokolov integrable cases of Kirchhoff's equations // *Sb. Math.* 2004. Vol. 195, № 3. P. 369-412.
17. Logacheva N. S. Classification of nondegenerate equilibria and degenerate 1-dimensional orbits of the Kovalevskaya-Yehia integrable system // *Sb. Math.* 2012. Vol. 203, № 1. P. 28-59.

18. Maslov V. P., Shafarevich A. I. Fomenko invariants in the asymptotic theory of the Navier–Stokes equations // *J. Math. Sci.* 2017. Vol. 225, № 4. 666-680.
19. Ramodanov S. M., Sokolov S. V. Dynamics of a Circular Cylinder and Two Point Vortices in a Perfect Fluid // *Regul. Chaotic Dyn.* 2021. Vol. 26, № 6. P. 675-691.
20. Palshin G. P. On noncompact bifurcation in one generalized model of vortex dynamics // *Theor. Math. Phys.* 2022. Vol. 212, № 1. P. 972-983. <https://doi.org/10.1134/S0040577922070078>
21. Haghightdoost G., Oshemkov A. A. The topology of Liouville foliation for the Sokolov integrable case on the Lie algebra $so(4)$ // *Sb. Math.* 2009. Vol. 200, № 6. 899-921.
22. Новиков Д. В. Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(3,1)$ // *Матем. сб.* 2014. Т. 205, № 8. 41-66.
23. Komarov I. V. Kowalewski basis for the hydrogen atom // *Theoret. and Math. Phys.* 1981. Vol. 47, № 1. P. 320-324. <https://doi.org/10.1007/BF01017022>
24. Kozlov I. K. The topology of the Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(4)$ // *Sb. Math.* 2014. Vol. 205, № 4. P. 532-572.
25. Kibkalo V. A. Topological analysis of the Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(4)$ // *Lobachevskii J. Math.* 2018. Vol. 39, № 9. P. 1396-1399.
26. Kibkalo V. A. Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(4)$ // *Sb. Math.* 2019. Vol. 210, № 5. P. 625-662.
27. Kibkalo V. A.: Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(3, 1)$ // *Topol. and Appl.* 2020, Vol. 275, № 107028. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2019.107028>
28. Fedoseev D. A., Fomenko A. T. Noncompact Bifurcations of Integrable Dynamic Systems // *J. Math. Sc.* 2020. Vol. 248. P. 810-827.
29. Кудрявцева Е. А. Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками // *ДАН.* 2012. Т. 445, № 4. С. 383-385.
30. Новиков Д. В. Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $e(3)$ // *Матем. сб.* 2011. Т. 202, № 5. С. 127-160.
31. Николаенко С. С. Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях // *Матем. сб.* 2020. Т. 211, № 8. С. 68-101.
32. Николаенко С. С. Топологическая классификация некомпактных 3-атомов с действием окружности // *Чебышевский сб.* 2021. Т. 22, № 5. С. 185-197.
33. Nikolaenko S. S. Topological classification of the Goryachev integrable systems in the rigid body dynamics: non-compact case // *Lobachevskii J. Math.*, 2017. Vol. 38. С. 1050-1060.
34. Ведюшкина (Фокичева) В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2017. Т. 81, № 4. С. 20-67.
35. Ведюшкина В. В., Скворцов А. И. Топология интегрируемого бильярда в эллипсе на плоскости Минковского с гуковским потенциалом // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* 2022. № 1. С. 8-19.

36. Kibkalo V. A. Noncompactness property of fibers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on pencil of Lie algebras // *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2020. Vol. 75, № 6. P. 263-267.
37. Харламов М. Р. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приложения к классическим системам // *Нелинейная динамика*, 2010. Т. 6, № 4. С. 769-805.

REFERENCES

1. Borisov, A. V. & Mamaev, I. S. 2004, *Classical dynamics in non-Euclidean spaces* — Moscow, Izhevsk: R.Ch.D. (in Russian)
2. Borisov, A. V. & Mamaev, I. S. 2016, “Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces”, *Rus. J. of Math. Phys.*, vol. 23, no. 4, pp. 431-454.
3. Kowalewski, S. 1889, “Sur le problème de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe”, *Acta Mathematica*, vol. 12, pp. 177-232.
4. Sokolov, S. V. 2018, “The integrable case of Kovalevskaya in a non-Euclidean space: separation of variables”, *Trydi MAI*, vol. 100, pp. 1-13.
5. Appelrot, G. G. 1940, “Ne vpolne simmetrichnye tyazhelye giroskopy”, *Dvizhenie tverdogo tela vokrug nepodvizhnoi tochki*, — Izd-vo AN SSSR, M.–L., pp. 61-157.
6. Delaunay, N. B. 1892, “Zur Frage von der geometrischen Deutung der Integrale von S. Kowalevski bei der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkte”, *Sb. Math.*, vol. 16, no. 2, pp. 346-351.
7. Smale, S. 1970, “Topology and Mechanics: I”, *Invent. Math.*, vol. 10, no. 4, pp. 305-331.
8. Kharlamov, M. P. 1988, *Topological analysis of integrable problems of rigid body dynamics*, LSU Publ., Leningrad, 200 pp.
9. Fomenko, A. T. 1987, “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 29, no. 3, pp. 629-658.
10. Fomenko, A. T. & Zieschang, H. 1991, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 36, no. 3, pp. 567-596.
11. Bolsinov, A. V., Matveev, S. V. & Fomenko, A. T. 1990, “Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. List of systems of small complexity”, *Russian Math. Surveys*, vol. 45, no. 2, pp. 59-94.
12. Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004, *Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification*, Chapman & Hall /CRC, Boca Raton, London, N.Y., Washington.
13. Oshemkov, A. A. 1991, “Fomenko invariants for the main integrable cases of rigid body motion equations”, *AMS*, vol. 4. pp. 67-146.
14. Bolsinov, A. T., Richter, P. & Fomenko, A. T. 2000, “The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top”, *Sb. Math.*, vol. 191, no. 2, pp. 151-188.
15. Morozov, P. V. 2002, “The Liouville classification of integrable systems of the Clebsch case”, *Sb. Math.*, vol. 193, no. 10, pp. 1507-1533.

16. Morozov, P. V. 2004, "Topology of Liouville foliations in the Steklov and the Sokolov integrable cases of Kirchhoff's equations", *Sb. Math.*, vol. 195, no. 3, pp. 369-412.
17. Logacheva, N. S. 2012, "Classification of nondegenerate equilibria and degenerate 1-dimensional orbits of the Kovalevskaya-Yehia integrable system", *Sb. Math.*, vol. 203, no. 1, pp. 28-59.
18. Maslov V. P. & Shafarevich, A. I. 2017, "Fomenko invariants in the asymptotic theory of the Navier–Stokes equations", *J. Math. Sci.*, vol. 225, no. 4, pp. 666-680.
19. Ramodanov S.M. & Sokolov, S. V. 2021, "Dynamics of a Circular Cylinder and Two Point Vortices in a Perfect Fluid", *Regul. Chaotic Dyn.*, vol. 26, no. 6, pp. 675-691.
20. Palshin, G. P. 2022, "On noncompact bifurcation in one generalized model of vortex dynamics", *Theor. Math. Phys.*, vol. 212, no. 1, pp. 972-983. <https://doi.org/10.1134/S0040577922070078>
21. Haghghatdoost, G. & Oshemkov, A. A. 2009, "The topology of Liouville foliation for the Sokolov integrable case on the Lie algebra $so(4)$ ", *Sb. Math.*, vol. 200, no. 6, pp. 899-921
22. Novikov, D. V. 2014, "Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(3,1)$ ", *Sb. Math.*, vol. 205, no. 8, pp. 1107-1132.
23. Kozlov, I. K. 2014, "The topology of the Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(4)$ ", *Sbornik: Mathematics*, vol. 205, no. 4, pp. 532-572.
24. Kibkalo, V. A. 2018, "Topological analysis of the Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(4)$ ", *Lobachevskii J. Math.*, vol. 39, no. 9, pp. 1396-1399.
25. Kibkalo, V. A. 2019, "Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(4)$ ", *Sb. Math.*, vol. 210, no. 5, pp. 625-662.
26. Kibkalo, V. A. 2020, "Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(3, 1)$ ", *Topol. and Appl.*, vol. 275, no. 107028.
27. Komarov, I. V. 1981, "Kowalewski basis for the hydrogen atom", *Theoret. and Math. Phys.*, vol. 47, no. 1, pp. 320-324. <https://doi.org/10.1007/BF01017022>
28. Fedoseev, D. A. & Fomenko, A. T. 2020, "Noncompact Bifurcations of Integrable Dynamic Systems", *J. Math. Sc.*, vol. 248, pp. 810-827.
29. Kudryavtseva, E. A. 2012, "An analogue of the Liouville theorem for integrable Hamiltonian systems with incomplete flows", *Doklady Mathematics*, vol. 86, no. 1, pp. 527-529.
30. Novikov, D. V. 2011, "Topological features of the Sokolov integrable case on the Lie algebra $e(3)$ ", *Sb. Math.*, vol. 202, no. 5, pp. 749-781.
31. Nikolaenko, S. S. 2020, "Topological classification of Hamiltonian systems on two-dimensional noncompact manifolds", *Sb. Math.*, vol. 211, no. 8, pp. 1127-1158.
32. Nikolaenko, S. S. 2021, "Topological classification of non-compact 3-atoms with a circle action", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 22, no. 5, pp. 185-197.
33. Nikolaenko, S. S. 2017, "Topological classification of the Goryachev integrable systems in the rigid body dynamics: non-compact case", *Lobachevskii J. Math.*, vol. 38, pp. 1050-1060.
34. Vedyushkina (Fokicheva), V. V. & Fomenko, A. T. 2017, "Integrable topological billiards and equivalent dynamical systems", *Izv. Math.*, vol. 81, no. 4, pp. 688-733.

35. Vedyushkina, V. V. & Skvortsov, A. I. 2022, "Topology of integrable billiard in an ellipse on the Minkowski plane with the Hooke potential", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, vol. 77, no. 1, pp. 8-19.
36. Kibkalo, V. A. 2020, "Noncompactness property of fibers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on pencil of Lie algebras", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 75, no. 6, pp. 263-267.
37. Kharlamov, M. P. 2010, "Topological analysis and Boolean functions. I. Methods and application to classical systems", *Nelin. Dinam.*, vol. 6, no. 4, pp. 769-805.

Получено: 30.01.23

Принято в печать: 24.04.2023