ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 517.955.8

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-50-68

Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной смешанной задачи на полуоси для уравнения типа Шредингера при наличии сильной точки поворота у предельного оператора¹

А. Г. Елисеев, П.В. Кириченко

Елисеев Александр Георгиевич — доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).

e-mail: yeliseevag@mpei.ru

Кириченко Павел Владимирович — Национальный исследовательский университет «МЭИ». (г. Москва).

e-mail: kirichenkov@mpei.ru

Аннотация

В предложенной работе выполнено построение регуляризованной асимптотики решения сингулярно возмущенной неоднородной смешанной задачи на полуоси, возникающей при квазиклассическом переходе в уравнении Шредингера в координатном представлении. Выбранный в работе профиль потенциальной энергии приводит к особенности в спектре предельного оператора в виде сильной точки поворота. Опираясь на идеи асимптотического интегрирования задач с нестабильным спектром С.А. Ломова и А.Г. Елисеева, указано каким образом и из каких соображений следует вводить регуляризирующие функции и дополнительные регуляризирующие операторы, подробно описан формализм метода регуляризации для поставленной задачи, проведено обоснование этого алгоритма и построено асимптотическое решение любого порядка по малому параметру.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, асимптотическое решение, метод регуляризации, точка поворота.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

А. Г. Елисеев, П.В. Кириченко. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной смешанной задачи на полуоси для уравнения типа Шредингера при наличии сильной точки поворота у предельного оператора // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 50–68.

¹Результаты Елисеева А. Г. были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 1.

UDC 517.955.8

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-50-68

Regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed mixed problem on the semiaxis for an equation of Schrodinger type in the presence of a strong turning point for the limit operator

A. G. Eliseev, P. V. Kirichenko

Eliseev Alexander Georgievich — doctor of physical and mathematical science, associate professor, National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (Moscow).

e-mail: yeliseevag@mpei.ru

Kirichenko Pavel Vladimirovich — National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (Moscow).

e-mail: kirichenkopv@mpei.ru

Abstract

In the proposed work we construct a regularized asymptotics for the solution of a singularly perturbed inhomogeneous mixed problem on the half-axis arising from a semiclassical transition in the Schrodinger equation in the coordinate representation. The potential energy profile chosen in the paper leads to a singularity in the spectrum of the limit operator in the form strong the turning point. Based on the ideas of asymptotic integration of problems with an unstable spectrum by S.A. Lomov and A.G. Eliseev, it is indicated how and from what considerations regularizing functions and additional regularizing operators should be introduced, the formalism of the regularization method for the problem posed is described in detail, and justification of this algorithm and an asymptotic solution of any order with respect to a small parameter is constructed.

Keywords: singularly perturbed problem, asymptotic solution, regularization method, turning point.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

A. G. Eliseev, P. V. Kirichenko, 2023, “Regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed mixed problem on the semiaxis for an equation of Schrodinger type in the presence of a strong turning point for the limit operator”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 50–68.

1. Введение

В настоящее время различным методам асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных задач посвящено огромное количество работ, их столь много, что полного обзора в статье ограниченного объема привести не представляется возможным. Отсылаем читателя к монографиям [1, 2], где приведены подробные библиографии по существующим подходам в теории сингулярных возмущений и сделан обзор о современном состоянии метода регуляризации С.А. Ломова, основные принципы которого по признанию самого автора в монографии [3] были заложены в конце пятидесятых, начале шестидесятых годов прошлого века в цикле работ [4]–[7]. Основная проблема, с которой сталкивается исследователь при применении последнего метода, связана с поиском и описанием так называемых регуляризирующих функций, которые содержат в себе все сингулярности решаемой задачи, выделяя которые, можно

оставшуюся часть решения искать в виде степенных рядов по малому параметру. Развитие метода регуляризации привело к пониманию того, что этот поиск тесно связан со спектральными характеристиками предельного оператора. В частности, установлено, каким образом следует описывать сингулярную зависимость асимптотического решения от малого параметра при выполнении условий стабильности спектра (см. [3], Глава 2, §1). При нарушении условий стабильности все обстоит значительно сложнее. Более того, до сих пор нет законченной математической теории для сингулярно возмущенных задач с нестабильным спектром, хотя с общематематических позиций их стали изучать порядка 50 лет назад. Особый интерес среди таких задач вызывают те, в которых спектральные особенности выражены в виде точечной нестабильности (см., например, [8]–[10]). В работах посвященных сингулярно возмущенным задачам некоторая часть особенностей такого вида названа точками поворота и проведена их классификация:

1) *простая точка поворота* — собственные значения предельного оператора изолированы друг от друга и одно собственное значение в отдельных точках обращается в нуль;

2) *слабая точка поворота* — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках, но при этом предельный оператор сохраняет диагональную структуру вплоть до точек пересечения, а базис из собственных векторов сохраняет гладкость;

3) *сильная точка поворота* — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках, но при этом предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову в точках пересечения, а базис собственных векторов теряет гладкость.

Приведем здесь ссылки на несколько последних исследований в рамках метода регуляризации сингулярно возмущенных задач с особенностями в спектре предельного оператора указанного вида: по простой точке поворота см. работы [9, 11, 12], по слабой точке поворота — [13, 14, 15], сильной точке поворота посвящена статья [16].

Типичными физическими примерами сингулярно возмущенных задач являются уравнение Навье-Стокса с малой вязкостью и уравнение Шредингера, если постоянную Планка $\hbar$ считать малой величиной². Формальный предельный переход $\hbar \rightarrow 0$ в соотношениях квантовой теории осуществляет переход от квантовой к классической механике (см., например, [17], §6), поэтому в тех случаях, когда целесообразно искать приближенные (по малому $\hbar$) решения уравнения Шредингера, говорят о квазиклассическом приближении (см. [17], Гл. 7). Описанный квазиклассический переход в нестационарном уравнении Шредингера в координатном представлении на полуоси с гамильтонианом $\hat{H}(p, x) = \hat{p}^2 + \hat{x}$ порождает сингулярно возмущенную задачу, асимптотическому интегрированию которой посвящена настоящая работа. Следует сразу отметить, что рассматриваемая нами задача содержит неоднородное уравнение, что, как станет ясно в основном тексте статьи, существенно усложняет процесс построения регуляризованного асимптотического ряда. Несмотря на то что физических квантовомеханических явлений, описываемых неоднородным уравнением Шредингера, нам при изучении обширной литературы обнаружить не удалось, считаем целесообразным поставить и решать предложенную более общую задачу, потому как, во-первых, более общее всегда можно свести к частному, а, во-вторых, представленные нами построения могут быть легко обобщены на, например, задачи для уравнений параболического типа, где неоднородные уравнения уже имеют вполне конкретный физический смысл.

Во многом наши исследования по асимптотическому интегрированию смешанной задачи для нестационарного и неоднородного уравнения Шредингера с обозначенным выше гамильтонианом при $\hbar \rightarrow 0$ представляют собой развитие идей работы [16], где рассмотрена задача Коши для параболического уравнения с сильной точкой поворота. В дальнейшем везде в ра-

²Строго говоря, постоянная Планка $\hbar$ является размерной величиной и имеет вполне конкретное значение, и утверждение о малости $\hbar$ следует понимать в том смысле, что всегда можно выделить безразмерную комбинацию параметров, содержащую $\hbar$ в какой-то степени, малую по сравнению с другими безразмерными параметрами, не содержащими $\hbar$.

боте будем использовать обозначение ε вместо $\hbar$, что является более естественным в теории сингулярных возмущений.

2. Постановка задачи

Рассмотрим смешанную задачу на полуоси для нестационарного уравнения Шредингера ($\varepsilon \equiv \hbar$) с неоднородностью $h(x, t)$

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xu = h(x, t), & 0 < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = \psi(t), \quad \psi(0) = f(0), & 0 \leq x < +\infty, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

где выполнены условия:

- 1) $\forall k \ h^{(k)}(x, t) \in L_1 \cap C^\infty(0, +\infty) \times [0, T]$;
- 2) $\forall k \ f^{(k)}(x) \in L_1 \cap C^\infty(0, +\infty) \times [0, T]$;
- 3) $\psi(t)$ интегрируема по Риману на $[0, T]$.

Для наглядного представления о виде спектральной особенности в поставленной задаче следует перейти к матричной форме записи:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - i\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix},$$

здесь введена замена $\varepsilon \cdot \partial u / \partial x = v$. Тогда матрица предельного оператора имеет вид:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь легко заметить, что матрица $A(x)$ диагонализируема и имеет гладкий базис из собственных векторов при $x \neq 0$, а в точке пересечения собственных значений (т.е. при $x = 0$) соответствующий ей предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову и базис из собственных векторов теряет гладкость по x . Согласно указанной во введении классификации, такая спектральная особенность представляет собой сильную точку поворота.

В общем случае регуляризирующие функции необходимо строить, опираясь на каноническую форму предельного оператора, к которой можно привести с помощью гладких преобразований (см., например, работу [18]), и соответствующий базис из собственных векторов, но в предложенной задаче оператор уже имеет каноническую форму и в соответствующих построениях нет необходимости. Более того, необходимо произвести регуляризацию правой части $h(x, t)$ (это связано с тем, что предельный оператор с матрицей $A(x)$ в точке $x = 0$ необратим) и описать пограничный слой обусловленный точкой $x = 0$.

3. Формализм метода регуляризации

3.1. Регуляризирующая функция и дополнительные регуляризирующие операторы

Регуляризирующую функцию задачи (1) будем искать в стандартной форме $e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}$, для решений линейных однородных уравнений такие сингулярности были выделены ещё Ж. Лиувиллем в [19]. Итак, осуществляя подстановку $u(x, t) = v(x, t) \cdot e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}$ в соответствующее однородное уравнение задачи (1) и собирая слагаемые при одинаковых степенях ε , получим:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - x \right) v + i\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot v - 2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

Анализ последнего выражения позволяет утверждать, что для поиска $v(x, t)$ в виде регулярного ряда по ε нужно в качестве $\varphi(x, t)$ взять решение следующей задачи:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = x, \quad \varphi(x, 0) = 0. \quad (3)$$

Выбор начального условия для $\varphi(x, t)$ обусловлен нежеланием того, чтобы в дальнейшем начальное условие для $v(x, t)$ содержало сингулярную зависимость от ε . Кроме того, при таком выборе начальное условие на $v(x, t)$ наследует начальное условие задачи (1).

Задача (3) представляет собой задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, решать которую будем методом характеристик (см. [20], Гл. 5, §4, с. 268–272). Обозначив $p = \partial\varphi/\partial t$ и $q = \partial\varphi/\partial x$, получим следующую характеристическую систему для уравнения задачи (3):

$$\begin{aligned} \frac{dt}{1} = \frac{dx}{-2q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{1} = \frac{d\varphi}{p - 2q^2} = dr, \\ \text{Н.У.: } t = 0, \quad x = s, \quad \varphi = 0, \quad q = 0, \quad p = s. \end{aligned} \quad (4)$$

Начальные условия в последней системе получены параметризацией (s — параметр) начального условия задачи (3).

Интегрируя систему (4), получаем искомую поверхность в параметрическом виде:

$$t = r, \quad x = -r^2 + s, \quad \varphi = sr - \frac{2}{3}r^3.$$

Тогда окончательно для функции $\varphi(x, t)$ в явном виде имеем:

$$\varphi(x, t) = t \cdot \left(x + \frac{t^2}{3} \right). \quad (5)$$

Дополнительный регуляризирующий сингулярный оператор, связанный с точечной необратимостью предельного оператора $A(x)$, строится с помощью фундаментального решения задачи (1) на всей прямой, которое можно получить методом интегрального преобразования Фурье для однородного уравнения с дельта-функцией в начальном условии (см. **Приложение 1**). Выпишем здесь только окончательный результат:

$$\Phi(x, \xi, t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon t}} \exp \left(-\frac{it}{\varepsilon} \left(\xi + \frac{t^2}{3} \right) + i \frac{(t^2 - (x - \xi))^2}{4\varepsilon t} \right). \quad (6)$$

Построение указанного регуляризирующего оператора тесно связано с решением исходной задачи (1) при $-\infty < x < \infty$ с правой частью $h(x, t) = i \cdot \varepsilon$ и однородным начальным условием. Обозначим это решение $\sigma(x, t)$ и, опираясь на фундаментальное решение (6), будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot \Phi(x - \xi, t - \tau) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \exp \left(-i \frac{(t-\tau)x}{\varepsilon} \right) \cdot \\ \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot \exp \left(i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \cdot \left(x - \xi - \frac{(t-\tau)^2}{3} \right) + i \frac{(x - \xi - (t-\tau)^2)^2}{4\varepsilon(t-\tau)} \right). \end{aligned}$$

Для упрощения дальнейших вычислений обозначим внутренний интеграл по ξ через I_0 , а

$t - \tau \equiv \alpha$. После замены $s = x - \xi$ отдельно для I_0 получим

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} ds \cdot \exp\left(\frac{i\alpha}{\varepsilon} \cdot \left(s - \frac{\alpha^2}{3}\right) + i \frac{(s - \alpha^2)^2}{4\varepsilon\alpha}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{-i\alpha^3}{12\varepsilon}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} ds \cdot \exp\left(\frac{i\alpha s}{2\varepsilon} + \frac{is^2}{4\varepsilon\alpha}\right). \end{aligned}$$

Теперь выделим в показателе экспоненты подинтегрального выражения полный квадрат

$$\frac{i\alpha s}{2\varepsilon} + \frac{is^2}{4\varepsilon\alpha} = \frac{i}{4\varepsilon\alpha} (s^2 + 2\alpha^2 s + \alpha^4 - \alpha^4) = \frac{i}{4\varepsilon\alpha} ((s + \alpha)^2 - \alpha^4) = \frac{i(s + \alpha^2)^2}{4\varepsilon\alpha} - \frac{i\alpha^3}{4\varepsilon},$$

и, сделав замену $z = (s + \alpha^2)/(2\sqrt{\varepsilon\alpha})$, выписываем результат для I_0 :

$$I_0 = \exp\left(\frac{-i\alpha^3}{3\varepsilon}\right) \cdot 2\sqrt{\varepsilon\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2}.$$

Получившийся интеграл вычислен в **Приложении 1**, его значение равно $\sqrt{\pi/2}(1 + i)$. Возвращаясь к исходным обозначениям, для искомого $\sigma(x, t)$ будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= \frac{1 - i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} \cdot \exp\left(-i \frac{(t - \tau)x}{\varepsilon}\right) \cdot \exp\left(-i \frac{(t - \tau)^3}{3\varepsilon}\right) \cdot 2\sqrt{\varepsilon(t - \tau)} \cdot \\ &\cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 + i) = \int_0^t d\tau \cdot \exp\left(-i \frac{(t - \tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t - \tau)^2}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

Полученный результат позволяет определить тот самый дополнительный регулярирующий оператор $\hat{\sigma}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$, основная задача которого — вложить правую часть уравнения задачи (1) в образ предельного оператора, в следующем виде:

$$\hat{\sigma}(\cdot) = \int_0^t d\tau(\cdot) \exp\left(-\frac{i\varphi(x, t - \tau)}{\varepsilon}\right),$$

где функция $\varphi(x, t)$ определена в (5). При этом действие этого оператора на функцию $f(t)$ запишется как свертка:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(f(t)) &= \int_0^t d\tau \cdot f(\tau) \cdot \exp\left(-i \frac{(t - \tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t - \tau)^2}{3}\right)\right) \equiv \\ &\equiv f(t) * \exp\left(-\frac{it}{\varepsilon} \cdot \left(x + \frac{t^2}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

А основным свойством, которое устанавливается непосредственной подстановкой, является следующее:

$$L_\varepsilon \hat{\sigma}(f(t)) = i\varepsilon f(t), \quad \text{где } L_\varepsilon \equiv i\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x. \quad (7)$$

Очевидно также, что это свойство является прямым следствием того, из каких соображений была найдена функция $\sigma(x, t)$, порождающая дополнительный регулярирующий оператор $\hat{\sigma}(\cdot)$, т.е. того факта, что $L_\varepsilon \sigma(x, t) = i\varepsilon$.

Осталось выделить сингулярную зависимость от ε , описывающую пограничный слой при $x = 0$. В основе построения соответствующего сингулярного оператора лежит решение исходной задачи для однородного уравнения с однородным начальным условием, где в качестве граничного условия выбрана функция "единичного скачка" (функция Хевисайда) $\theta(t)$. Указанное решение $\chi(x, t)$ может быть получено с помощью преобразования Лапласа или интегрального преобразования Фурье (последняя возможность реализована в **Приложении 2**) и имеет вид:

$$\chi(x, t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t d\tau \left(\sqrt{t-\tau} + \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \right) \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} + \frac{i(t-\tau)}{4\varepsilon} \left(t-\tau - \frac{x}{t-\tau} \right)^2}. \quad (8)$$

Последнее соотношение позволяет ввести по аналогии с оператором $\hat{\sigma}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$ регуляризирующий оператор $\hat{\chi}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$ в следующем виде:

$$\hat{\chi}(\cdot) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t d\tau(\cdot) \left(\sqrt{t-\tau} + \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \right) \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} + \frac{i(t-\tau)}{4\varepsilon} \left(t-\tau - \frac{x}{t-\tau} \right)^2},$$

тогда его действие на функцию $f(t)$ запишется опять же как свертка:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(f(t)) &= \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t d\tau \cdot f(\tau) \cdot \left(\sqrt{t-\tau} + \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \right) \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} + \frac{i(t-\tau)}{4\varepsilon} \left(t-\tau - \frac{x}{t-\tau} \right)^2} \equiv \\ &\equiv f(t) * \left(\frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \left(\sqrt{t} + \frac{x}{t^{3/2}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{it^3}{3\varepsilon} + \frac{it}{4\varepsilon} \left(t - \frac{x}{t} \right)^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Последний результат приведём к более простому виду, сделав замену $z = x / \left(2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)} \right)$. После несложных преобразований получим:

$$\hat{\chi}(f(t)) = (1-i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f \left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} \right) \cdot e^{-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2}. \quad (9)$$

В таком виде нетрудно явным вычислением установить основные свойства введенного дополнительного сингулярного оператора:

$$L_\varepsilon \hat{\chi}(f(t)) = 0, \quad \hat{\chi}(f(t)) \Big|_{x=0} = f(t) \quad (10)$$

Опять же эти свойства становятся очевидными, если учесть из каких соображений был построен оператор $\hat{\chi}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$.

3.2. Построение регуляризованного асимптотического ряда

Построенные в предыдущем разделе регуляризирующая функция $e^{-i\varphi/\varepsilon}$ и дополнительные регуляризирующие операторы $\hat{\sigma}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$, $\hat{\chi}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$ позволяют рассчитывать, что оставшаяся часть решения можно искать в виде степенных рядов по ε . Вид, в котором будем искать решение исходной задачи (1), поясняет последнюю фразу:

$$u(x, t, \varepsilon) = e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, t) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=-1}^{\infty} [\hat{\sigma}(z_k(t)) + \hat{\chi}(y_k(t))] \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(x, t) \cdot \varepsilon^k, \quad (11)$$

здесь начало суммирования с $k = -1$ во втором ряде обусловлено свойством (7) и необходимостью регуляризации правой части $h(x, t)$ задачи (1) на нулевом шаге по ε .

Учитывая соотношения (2) и свойства построенных операторов (7), (10), подставим (11) в задачу (1). При этом получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{-i\varphi/\varepsilon} \left(i \sum_{k=0}^{\infty} \dot{v}_k \varepsilon^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} v_k'' \varepsilon^{k+2} - 2it \sum_{k=0}^{\infty} v_k' \varepsilon^{k+1} \right) + i \sum_{k=0}^{\infty} z_{k-1} \cdot \varepsilon^k + \\ + i \sum_{k=0}^{\infty} \dot{\omega}_k \cdot \varepsilon^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k'' \cdot \varepsilon^{k+2} - x \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \cdot \varepsilon^k = h(x, t), \\ \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, 0) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(x, 0) \cdot \varepsilon^k = f(x), \\ e^{-it^3/(3\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} v_k(0, t) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\int_0^t d\tau \cdot z_k(\tau) \cdot e^{-i(t-\tau)^3/(3\varepsilon)} \right) \cdot \varepsilon^k + \\ + \sum_{k=-1}^{\infty} y_k(t) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(0, t) \cdot \varepsilon^k = \psi(t), \end{array} \right. \quad (12)$$

здесь $v_k = v_k(x, t)$, $\omega_k = \omega_k(x, t)$, а $z_k = z_k(t)$, $y_k = y_k(t)$, точкой обозначена частная производная по времени, штрихом — частная производная по координате.

Выделив в (12) группы слагаемых при регуляризирующей функции и без нее, приходим к серии итерационных задач:

$$\left\{ \begin{array}{l} iz_{k-1}(t) + i\dot{\omega}_{k-1}(x, t) + \omega_{k-2}''(x, t) - x \cdot \omega_k(x, t) = \delta_0^k \cdot h(x, t), \\ i\dot{v}_k(x, t) + v_{k-1}''(x, t) - 2itv_k'(x, t) = 0, \\ v_k(x, 0) + \omega_k(x, 0) = \delta_0^k \cdot f(x), \\ e^{-it^3/(3\varepsilon)} v_{k-1}(0, t) + \int_0^t d\tau \cdot z_{k-1}(\tau) \cdot e^{-i(t-\tau)^3/(3\varepsilon)} + \\ + y_{k-1}(t) + \omega_{k-1}(0, t) = \delta_1^k \cdot \psi(t), \quad k = \overline{0, \infty}. \end{array} \right. \quad (13)$$

Отметим, что при отрицательных индексах у функций $v_k(x, t)$ и $\omega_k(x, t)$ их необходимо считать равными нулю (этих слагаемых просто нет в ряде (11)).

Для начала рассмотрим итерационную задачу на нулевом шаге (т.е. при $k = 0$ в (13)):

$$\left\{ \begin{array}{l} iz_{-1}(t) - x \cdot \omega_0(x, t) = h(x, t), \\ i\dot{v}_0(x, t) - 2itv_0'(x, t) = 0, \\ v_0(x, 0) + \omega_0(x, 0) = f(x), \\ \int_0^t d\tau \cdot z_{-1}(\tau) \cdot e^{-i(t-\tau)^3/(3\varepsilon)} + y_{-1}(t) = 0. \end{array} \right. \quad (14)$$

Для разрешимости первого уравнения из системы (14) достаточно положить

$$z_{-1}(t) \equiv -ih(0, t). \quad (15)$$

Тогда для $\omega_0(x, t)$ получим гладкое решение:

$$\omega_0(x, t) = \frac{h(x, t) - h(0, t)}{-x}, \quad (16)$$

что в свою очередь приводит к задаче Коши для определения функции $v_0(x, t)$:

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} - 2t \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0, \quad v_0(x, 0) = \frac{h(x, 0) - h(0, 0)}{x} + f(x).$$

Последняя задача легко решается обычными методами интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$v_0(x, t) = f(x + t^2) + \frac{h(x + t^2, 0) - h(0, 0)}{x + t^2}. \quad (17)$$

Выражение для $z_{-1}(t)$ в (15) и граничное условие в системе (14) позволяют выписать соотношение для $y_{-1}(t)$:

$$y_{-1}(t) = i \int_0^t d\tau \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon}} \cdot h(0, \tau). \quad (18)$$

Здесь отметим, что функция $z_0(t)$ и $y_0(t)$ на нулевом шаге не определяются, выражения для них будут получены на следующем итерационном шаге. Этот факт не позволяет нам пока выписать главный член асимптотики.

Переходим теперь к задаче с $k = 1$ в (13):

$$\begin{cases} iz_0(t) + i\dot{\omega}_0(x, t) - x \cdot \omega_1(x, t) = 0, \\ i\dot{v}_1(x, t) + v_0''(x, t) - 2itv_1'(x, t) = 0, \\ v_1(x, 0) + \omega_1(x, 0) = 0, \\ e^{-\frac{it^3}{3\varepsilon}} \cdot v_0(0, t) + \int_0^t d\tau \cdot z_0(\tau) \cdot e^{-i\frac{(t-\tau)^3}{3\varepsilon}} + y_0(t) + \omega_0(0, t) = \psi(t). \end{cases} \quad (19)$$

Подставляя $\omega_0(x, t)$ из (16) в первое уравнение этой системы, убеждаемся, что для его разрешимости нужно положить

$$z_0(t) \equiv -ih_1(0, t), \quad \text{где } h_1(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} \right) \quad (20)$$

Тогда аналогично предыдущему итерационному шагу для $\omega_1(x, t)$ также получим гладкое решение

$$\omega_1(x, t) = \frac{h_1(x, t) - h_1(0, t)}{-x},$$

а для $v_1(x, t)$ из (20) — задачу Коши для квазилинейного неоднородного уравнения в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - 2t \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} = f_1(x + t^2), \quad v_1(x, 0) = \frac{h_1(x, 0) - h_1(0, 0)}{x},$$

здесь введено обозначение:

$$f_1(x + t^2) \equiv i \cdot v_0''(x, t) = i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(f(x + t^2) + \frac{h(x + t^2, 0) - h(0, 0)}{x + t^2} \right).$$

Выпишем здесь только окончательное решение последней задачи, опуская подробности:

$$v_1(x, t) = t \cdot f_1(x + t^2) + \frac{h_1(x + t^2, 0) - h_1(0, 0)}{x + t^2}$$

Осталось подставить $\omega_0(x, t)$ из (16), $v_0(x, t)$ из (17) и $z_0(t)$ из (20) в граничные условия системы (19), что приводит к возможности определить $y_0(t)$. Будем иметь

$$\begin{aligned} y_0(t) = \psi(t) - e^{-\frac{it^3}{3\varepsilon}} \cdot \left(f(t^2) + \frac{h(t^2, 0) - h(0, 0)}{t^2} \right) + \left(\frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} \right) \Big|_{x=0} + \\ + i \int_0^t d\tau \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon}} \cdot h_1(0, \tau). \end{aligned} \quad (21)$$

Ещё раз обратим внимание читателя на то, что полностью определить все слагаемые перед ε^1 в ряде (11) удастся только на следующем итерационном шаге — осталось найти $z_1(t)$ и $y_1(t)$. Последнее можно сделать, рассмотрев условия разрешимости первого уравнения в системе (13) при $k = 2$. В результате будем иметь:

$$z_1(t) \equiv -ih_2(0, t),$$

$$\text{где } h_2(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h_1(x, t) - h_1(0, t)}{x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} \right),$$

а функция $h_1(x, t)$ определена в (20).

Продолжая по аналогии описанный процесс для $k = 2, 3, \dots$ в (13), можно найти все члены ряда (11). В конце данного раздела, опираясь на (15), (16), (17), (18), (20) и (21), выпишем главный член асимптотики:

$$\begin{aligned} u_{\text{гл.}}(x, t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\hat{\sigma}(z_{-1}(t)) + \hat{\chi}(y_{-1}(t)) \right) + \hat{\sigma}(z_0(t)) + \hat{\chi}(y_0(t)) + e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \cdot v_0(x, t) + \omega_0(x, t) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[-i \int_0^t d\tau \cdot h(0, \tau) \cdot e^{-i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t-\tau)^2}{3} \right)} + (1+i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \int_0^{\infty} d\tau \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} \right) \cdot \right. \\ &\cdot e^{-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2 - \frac{i(t-x^2/(4\varepsilon z^2) - \tau)^3}{3\varepsilon}} \cdot h(0, \tau) \left. \right] + \int_0^t d\tau \cdot \frac{\dot{h}(x, \tau) - \dot{h}(0, \tau)}{x} \Big|_{x=0} \cdot e^{-i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t-\tau)^2}{3} \right)} + \\ &+ (1-i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} \right) \cdot e^{-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2} \left[\psi(t - x^2/(4\varepsilon z^2)) - e^{-\frac{i(t-x^2/(4\varepsilon z^2))^3}{3\varepsilon}} \cdot \right. \\ &\cdot \left(f\left(\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right)^2 \right) + \frac{h\left(\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right)^2, 0 \right) - h(0, 0)}{\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right)^2} \right) + \frac{h\left(x, t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right) - h\left(0, t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right)}{x} \Big|_{x=0} - \\ &- \int_0^{t-x^2/(4\varepsilon z^2)} d\tau \cdot e^{-\frac{i(t-x^2/(4\varepsilon z^2) - \tau)^3}{3\varepsilon}} \cdot \frac{\dot{h}(x, \tau) - \dot{h}(0, \tau)}{x} \Big|_{x=0} \left. \right] + \\ &+ e^{-\frac{it(x+t^2/3)}{\varepsilon}} \cdot \left(f(x+t^2) + \frac{h(x+t^2, 0) - h(0, 0)}{x+t^2} \right) - \frac{h(x, t) - h(0, t)}{x}. \end{aligned}$$

Для практического использования можно учесть полученную в лемме 1 оценку (см. **Приложение 3**). Тогда формула главного члена упрощается:

$$\begin{aligned} u_{\text{гл.}} &= \frac{i}{\varepsilon} \left[- \int_0^t d\tau \cdot h(0, \tau) \cdot e^{-i \frac{(t-\tau)(x+(t-\tau)^2/3)}{\varepsilon}} + \int_0^t d\tau \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon}} \cdot h(0, \tau) \cdot \text{ierfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}} \right) \right] + \\ &+ \int_0^t d\tau \cdot \frac{\dot{h}(x, \tau) - \dot{h}(0, \tau)}{x} \Big|_{x=0} \cdot e^{-i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t-\tau)^2}{3} \right)} + \\ &+ \left[\psi(t) - e^{-\frac{it^3}{3\varepsilon}} \cdot \left(f(t^2) + \frac{h(t^2, 0) - h(0, 0)}{t^2} \right) + \frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} \Big|_{x=0} - \right. \\ &- \left. \int_0^t d\tau \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon}} \cdot \frac{\dot{h}(x, \tau) - \dot{h}(0, \tau)}{x} \Big|_{x=0} \right] \cdot \text{ierfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}} \right) + \\ &+ e^{-\frac{it(x+t^2/3)}{\varepsilon}} \cdot \left(f(x+t^2) + \frac{h(x+t^2, 0) - h(0, 0)}{x+t^2} \right) - \frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} + \underline{O} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x} \right). \end{aligned}$$

4. Оценка остаточного члена

Пусть члены ряда (11) определены в результате решения итерационных задач (13) для $0 \leq k \leq n+1$. Запишем соотношение для остатка:

$$u(x, t, \varepsilon) = e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^n v_k(x, t) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=-1}^n \left(\hat{\sigma}(z_k(t)) + \hat{\chi}(y_k(t)) \right) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=0}^n \omega_k(x, t) \cdot \varepsilon^k + \varepsilon^{n+1} \cdot R_n(x, t, \varepsilon). \quad (22)$$

Подставим (22) в задачу (1). Учитывая решения итерационных задач и сокращая на ε^{n+1} , для остаточного члена получим задачу:

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial R_n}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 R_n}{\partial x^2} - x \cdot R_n = -H(x, t, \varepsilon), \\ R_n(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad R_n(0, t, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

где $H(x, t, \varepsilon) = e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon} \cdot v_n''(x, t) \cdot \varepsilon + x \cdot \omega_{n+1}(x, t) + \varepsilon \cdot \omega_n''(x, t)$ при $x > 0$, $0 < t \leq T$. Доопределим эту функцию тождественным нулём при $x \leq 0$. Тогда, используя фундаментальное решение (6), для $R_n(x, t, \varepsilon)$ в (23) получим:

$$R_n = -\frac{1-i}{2i\varepsilon\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)}{\varepsilon} \left(\xi + (t-\tau)^2/3 \right) + i \frac{(x-\xi-(t-\tau)^2)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}} \cdot H(\xi, \tau, \varepsilon).$$

Выделив во внутреннем интеграле полный квадрат в показателе экспоненты, сделаем замену переменной интегрирования ξ на:

$$y = \frac{\xi - x + (t - \tau)}{2\sqrt{\varepsilon(t - \tau)}} - i\sqrt{\frac{(t - \tau)^3}{\varepsilon}}.$$

Тогда последнее выражение для остаточного члена переписется в виде:

$$R_n = \frac{i+1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \int_0^t d\tau \cdot e^{-i\frac{(t-\tau)}{\varepsilon}(x-(t-\tau))} \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot e^{iy^2} \cdot H(y, \tau, \varepsilon).$$

Теперь, учитывая условия 1) и 2) в постановке задачи (1) и тот факт, что итерационные задачи решены вплоть до шага $k = n+1$, легко построить оценку по модулю для остатка:

$$|R_n| = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot |H(y, \tau, \varepsilon)| \leq \frac{T \cdot M}{\varepsilon \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{C}{\varepsilon} \quad \text{для } (x, t) \in (\mathbf{R} \times [0, T]).$$

Осталось представить остаточный член в виде:

$$R_n = u_{n+1} + \varepsilon \cdot R_{n+1},$$

Тогда окончательно получим

$$|R_n| \leq |u_{n+1}| + \varepsilon \cdot \frac{C}{\varepsilon} \leq C.$$

Тем самым доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Об оценке остатка (асимптотическая сходимость).*

Пусть дана смешанная задача (1) и выполнены условия 1), 2). Тогда верна оценка

$$\left\| u(x, t, \varepsilon) - e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^n v_k(x, t) \cdot \varepsilon^k - \sum_{k=-1}^n \left(\hat{\sigma}(z_k(t)) + \hat{\chi}(y_k(t)) \right) \cdot \varepsilon^k - \sum_{k=0}^n \omega_k(x, t) \cdot \varepsilon^k \right\|_{C(\mathbf{R}^{(+)} \times [0, T])} \leq \mathbb{C} \cdot \varepsilon^{n+1},$$

где $\mathbb{C} \geq 0$ — константа, не зависящая от ε , а $v_k(x, t)$, $z_k(t)$, $y_k(t)$, $\omega_k(x, t)$ получены из решения итерационных задач при $0 \leq k \leq n + 1$.

5. Приложение 1

Поставим задачу для поиска фундаментального решения задачи (1):

$$i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \cdot u = 0, \quad u(x, 0) = \delta(x - x_0).$$

Для решения этой задачи применим метод интегрального преобразования Фурье. Будем предполагать, что выполняются условия существования интеграла Фурье и что функция $u(x, t)$ со своими частными производными достаточно быстро стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Также предположим, что интеграл для образа Фурье искомого решения $\tilde{U}(\lambda, t)$ можно дифференцировать по переменным t и λ под знаком интеграла. В пространстве образов получим следующую задачу Коши:

$$i\varepsilon \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - i \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda} = \varepsilon^2 \cdot \lambda^2 \cdot \tilde{U}, \quad \tilde{U}(\lambda, 0) = e^{-i\lambda x_0}. \quad (24)$$

Задача (24) — задача для квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, интегрирование которой проводится обычными методами. Опуская достаточно громоздкие выкладки, выпишем здесь только её решение:

$$\tilde{U}(\lambda, t) = \exp \left(-i\varepsilon t \lambda^2 - i(x_0 + t^2)\lambda - ix_0 t/\varepsilon - it^3/(3\varepsilon) \right).$$

Теперь, используя формулу обратного преобразования Фурье, для оригинала будем иметь:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot \tilde{U}(\lambda, t) \cdot e^{i\lambda x} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp \left(-i \frac{t(x_0 + t^2/3)}{\varepsilon} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot \exp \left(i\lambda(x - x_0 - t^2) - i\varepsilon t \lambda^2 \right) \end{aligned}$$

Для вычисления получившегося интеграла выделим полный квадрат в показателе экспоненты и сделаем замену:

$$z = \sqrt{\varepsilon t} \left(\lambda + \frac{t^2 - (x - x_0)}{2\varepsilon t} \right).$$

В результате получим:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon t}} \exp \left(-i \frac{t(x_0 + t^2/3)}{\varepsilon} + i \frac{(t^2 - (x - x_0))^2}{4\varepsilon t} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot e^{-iz^2}.$$

Оставшийся интеграл может быть легко вычислен различными способами (например, методами теории вычетов) или сведён к известным значениям для интегралов Френеля $\int_0^{\infty} \cos t^2 dt = \int_0^{\infty} \sin t^2 dt = \sqrt{\pi/8}$. Окончательно для фундаментального решения будем иметь:

$$u(x, t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\epsilon t}} \exp\left(-i\frac{t}{\epsilon}\left(x_0 + \frac{t^2}{3}\right) + i\frac{(t^2 - (x-x_0))^2}{4\epsilon t}\right),$$

что с точностью до переобозначений совпадает с (6).

6. Приложение 2

Поставим задачу для поиска решения $\chi(x, t)$, позволяющее выписывать интегральное соотношение для решения однородного уравнения задачи (1) с произвольным граничным условием $\psi(t)$. Имеем:

$$i\epsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \cdot u = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = \theta(t),$$

здесь в граничном условии стоит функция Хевисайда и при $t > 0$ $\theta(t) = 1$. Доопределим неизвестную функцию $u(x, t)$ при $x < 0$ тождественным нулём и при аналогичных **Приложении 1** предположениях перейдём к задаче Коши в пространстве образов Фурье:

$$i\epsilon \frac{\partial F}{\partial t} - i \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \epsilon^2 \cdot \lambda^2 \cdot F + i\epsilon^2 \lambda, \quad F(\lambda, 0) = 0, \quad (25)$$

где введено обозначение

$$F(\lambda, t) = \int_0^{\infty} dx \cdot e^{-i\lambda x} u(x, t).$$

Запишем характеристическую систему для квазилинейного уравнения в задаче (25):

$$\frac{dt}{i\epsilon} = \frac{d\lambda}{-i} = \frac{dF}{\epsilon^2 \cdot \lambda^2 \cdot F + i\epsilon^2 \lambda}.$$

Система первых интегралов для нее имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda + \frac{t}{\epsilon} = C_1, \\ F \cdot e^{-i\epsilon^2 \lambda^3/3} - \epsilon^2 \int_{\lambda}^{\infty} dq \cdot q \cdot e^{-i\epsilon^2 q^3/3} = C_2. \end{cases}$$

Теперь уже несложно, учитывая начальное условие в (25), получить решение исходной задачи в пространстве образов:

$$F(\lambda, t) = \epsilon^2 \int_{\lambda}^{\lambda+t/\epsilon} dq \cdot q \cdot e^{\epsilon^2(\lambda^3 - q^3)/3}.$$

Замена переменной $\lambda - q = (s - t)/\epsilon$ в последнем интеграле приведёт к более удобному в дальнейшем соотношению:

$$F(\lambda, t) = \epsilon \int_0^t ds \cdot \left(\lambda + \frac{t-s}{\epsilon} \right) \cdot \exp\left(-\frac{i(t-s)^3}{3\epsilon} - i\epsilon(t-s) \left(\lambda^2 + \lambda \frac{t-s}{\epsilon} \right) \right).$$

Осталось осуществить обратное преобразование Фурье, что в итоге позволит получить решение интересующей нас задачи. Будем иметь:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot F(\lambda, t) \cdot e^{i\lambda x} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^t ds \cdot \left(\lambda + \frac{t-s}{\varepsilon} \right) \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - i\varepsilon(t-s) \left(\lambda^2 + \lambda \frac{t-s}{\varepsilon} \right) + i\lambda x \right). \end{aligned}$$

Поменяем порядок интегрирования в получившемся повторном интеграле и выделим во внутреннем интеграле по λ полный квадрат, после чего произведем замену

$$\mu = \lambda + \frac{1}{2\varepsilon} \left(t - s - \frac{x}{t-s} \right).$$

После описанных преобразований получим:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^t ds \cdot \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - \frac{i(t-s)}{4\varepsilon} \left(t - s - \frac{x}{t-s} \right)^2 \right) \cdot \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot \left(\mu + \frac{1}{2\varepsilon} \left(t - s + \frac{x}{t-s} \right) \right) \cdot \exp(-i\varepsilon(t-s)\mu^2). \end{aligned} \quad (26)$$

Обозначим внутренний интеграл $I_0(x, t-s)$ и вычислим его отдельно:

$$I_0(x, t-s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot \mu \cdot e^{-i\varepsilon(t-s)\mu^2} + \frac{1}{2\varepsilon} \left(t - s + \frac{x}{t-s} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot e^{-i\varepsilon(t-s)\mu^2}.$$

В силу того, что в обратном преобразовании Фурье интеграл понимается в смысле главного значения, первое слагаемое в последнем соотношении равно нулю из-за нечетности подынтегральной функции. А второе слагаемое легко свести к интегралу $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi/2} \cdot (1-i)$, о вычислении которого было сказано в **Приложении 1**. В результате для I_0 получим:

$$I_0(x, t-s) = \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1-i}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\sqrt{t-s} + \frac{x}{(t-s)^{3/2}} \right).$$

Подставляя полученное выражение в (26), будем иметь:

$$u(x, t) = \frac{1-i}{4\sqrt{2\varepsilon\pi}} \int_0^t ds \left(\sqrt{t-s} + \frac{x}{(t-s)^{3/2}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - \frac{i(t-s)}{4\varepsilon} \left(t - s - \frac{x}{t-s} \right)^2 \right).$$

Осталось учесть известное свойство интегралов Фурье о сходимости в точке разрыва к полусумме левого и правого пределов разлагаемой в этот интеграл функции. Учитывая этот факт, последнее соотношение в точке $x=0$, $t=0$ будет давать $(\theta(0-0) + \theta(0+0))/2 = 1/2$, а для получения с помощью $u(x, t)$ решение поставленной задачи с произвольным краевым условием требуется 1. Поэтому последнее соотношение необходимо умножить на два. Окончательно получаем $\chi(x, t) \equiv 2 \cdot u(x, t)$:

$$\chi(x, t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\varepsilon\pi}} \int_0^t ds \left(\sqrt{t-s} + \frac{x}{(t-s)^{3/2}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - \frac{i(t-s)}{4\varepsilon} \left(t - s - \frac{x}{t-s} \right)^2 \right),$$

что с точностью до переобозначения переменной интегрирования совпадает с (8).

7. Приложение 3

ЛЕММА 1. Для соотношения (9), описывающего действие оператора $\hat{\chi}(\cdot)$ на функцию $f(t)$, справедлива оценка

$$\hat{\chi}(f(t)) = f(t) \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2} + \underline{O}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right) \quad \text{при } x \in [\delta, +\infty), \text{ где } \delta > 0, t \in [0, T]$$

Если для функции $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2}$ ввести обозначение $\text{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right)$,

то можно последнее соотношение переписать в виде

$$\hat{\chi}(f(t)) = f(t) \cdot \text{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) + \underline{O}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что

$$\begin{aligned} & \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) e^{-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2} = \\ & = f(t) \cdot \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2} + \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot \left[f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) - f(t)\right] e^{iz^2} + \\ & \quad + \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left[\left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) - 1\right] e^{iz^2} + \\ & \quad + \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) \left[e^{-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} - 1}\right] e^{iz^2}. \end{aligned}$$

Оценим три последних слагаемых, учитывая неравенство $0 \leq \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \leq t \leq T$. Будем иметь при $x \in [\delta, +\infty)$, $\delta > 0$:

$$1. \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot \left[f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) - f(t)\right] \cdot e^{iz^2} = \frac{(f(t) - f(0))\sqrt{\varepsilon t}}{ix} e^{i\frac{x^2}{4\varepsilon t}} + \underline{O}\left(\frac{\varepsilon t}{x^2}\right) = \underline{O}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right);$$

$$\begin{aligned} 2. & \int_{\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left[\left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) - 1\right] e^{iz^2} = \int_{\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} e^{iz^2} = \\ & = \frac{x^3}{16\varepsilon^2} \int_{\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \frac{1}{z^4} e^{iz^2} = \underline{O}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right), \quad \delta > 0, \quad x \in [\delta, +\infty); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. & \int_{\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) \left[e^{-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} - 1}\right] e^{iz^2} = \\ & = f(0) \left(1 + \frac{t}{16x}\right) \left(e^{-i\left(\frac{t^3}{12\varepsilon} + \frac{xt}{2\varepsilon}\right)} - 1\right) \frac{\sqrt{\varepsilon t}}{ix} e^{i\frac{x^2}{4\varepsilon t}} + \underline{O}\left(\frac{\varepsilon}{x^2}\right) = \underline{O}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right), \quad \delta > 0, \quad x \in [\delta, +\infty). \end{aligned}$$

Складывая все три оценки, получим

$$\hat{\chi}(f(t)) = f(t) \cdot \operatorname{ierfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}} \right) + O \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x} \right).$$

Тем самым лемма доказана. $\square$

8. Заключение

Как уже было отмечено во введении, основной проблемой метода регуляризации С.А. Ломова является поиск регуляризирующих функций. В случае спектральных особенностей у предельного оператора выделение сингулярной зависимости решения от малого параметра достаточно трудная задача. В предложенной работе для смешанной задачи на полуоси для неоднородного уравнения Шредингера со спектральной особенностью в виде сильной точки поворота регуляризация, как выяснилось, состоит из трёх частей: 1) описание пограничного слоя обусловленного точкой $t = 0$; 2) выделение сингулярностей, связанных с точечной необратимостью предельного оператора; 3) описание пограничного слоя обусловленного точкой $x = 0$. В основном тексте статьи описанные проблемы успешно разрешены путем введения регуляризирующей функции и двух дополнительных сингулярных операторов. Тем самым основные трудности метода регуляризации для поставленной задачи успешно преодолены, что подтверждается результатами наших исследований. Продолжением этих исследований является обобщение предложенного в статье подхода для построения асимптотического ряда на другие задачи математической физики с подобного рода спектральными особенностями у предельного оператора.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные уравнения и метод регуляризации: учебное пособие. — М.: Издательский дом МЭИ, 2012.
2. Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во Московского университета, 2011.
3. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
4. Ломов С. А. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих малый параметр // Тр. МЭИ, 1962, Вып. 42, С. 99–144.
5. Ломов С. А. Степенной пограничный слой в задачах с малым параметром // Докл. АН СССР, 1963, Том 148, № 3, С. 516–519.
6. Ломов С. А. О модельном уравнении Лайтхилла // Сб. науч. трудов МО СССР, 1964, № 54, С. 74–83.
7. Ломов С. А. Регуляризация сингулярных возмущений // Докл. научно-техн. конф. МЭИ, секция матем. М., 1965, С. 129–133.
8. Ломов С. А., Сафонов В. Ф. Регуляризации и асимптотические решения для сингулярно возмущенных задач с точечными особенностями спектра предельного оператора // Укр. мат. журн., 1984, Т. 36, № 2, С. 172–180.

9. Елисеев А. Г., Ломов С. А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора // Математический сборник, 1986, Т. 131, № 173, С. 544–557.
10. Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. Регуляризованная асимптотика решений интегродифференциальных уравнений с частными производными с быстро изменяющимися ядрами // Уфимский математический журнал, 2018, Т. 10, № 2, С. 3–12.
11. Елисеев А. Г., Ратникова Т.А. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота. // Дифф. урав. и процессы управл., 2019, № 3, С. 63–73.
12. Елисеев А. Г. Регуляризованное решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии иррациональной «простой» точки поворота // Дифф. урав. и процессы управл., 2020, № 2, С. 15–32.
13. Кириченко П. В. Сингулярно возмущенная задача Коши для параболического уравнения при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора // Математические заметки СВФУ, 2020, № 3, С. 3–15.
14. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора // Дифф. урав. и процессы управл., 2020, № 1, с. 55–67.
15. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии "слабой" точки поворота первого порядка у предельного оператора с кратным спектром // Дифференциальные уравнения, 2022, Т. 58, № 6, С. 733–746.
16. Елисеев А. Г. Пример решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения при наличии «сильной» точки поворота // Дифф. урав. и процессы управл., 2022, № 3, с. 46–58.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики, Т. 3, Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.:ФИЗМАТЛИТ, 2008.
18. Арнольд В.И. О матрицах, зависящих от параметров // УМН, 1971, т. 26, № 2(158), С. 101–114.
19. Liouville, J. Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1837, p. 16–35.
20. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.

REFERENCES

1. Bobodzhanov A. A., Safonov V. F. 2012, “Course of higher mathematics. Singularly perturbed equations and the regularization method: a study guide” [Kurs vysshey matematiki. Singulyarno vozmushchennyye uravneniya i metod regulyaryzatsii: uchebnoye posobiye], *Moscow: National Research University MPEI*. (In Russ.)

2. Lomov S. A., Lomov I. S. 2011, “Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer” [Osnovy matematicheskoy teorii pogrannichnogo sloya], *Moscow: Moscow State University*. (In Russ.)
3. Lomov S. A. 1992, “Introduction to the General Theory of Singular Perturbations (Translations of Mathematical Monographs)”, *New York: Amer. Math. Soc.*
4. Lomov S. A. 1962, “Asymptotic behavior of solutions to second-order ordinary differential equations containing a small parameter” [Asimptoticheskoye povedeniye resheniy obyknovennykh differentsial’nykh uravneniy vtorogo poryadka, sodержashchikh малыy parametr], *Moscow: Trudi MPEI*, issue 42, P. 99–144. (In Russ.)
5. Lomov S. A. 1963, “Power series boundary layer in problems involving a small parameter”, *Sov. Math. Dokl.*, issue 4, P. 125–129.
6. Lomov S. A. 1964, “On the Lighthill Model Equation” [O model’nom uravnenii Laytkhilla], *Sb. nauch. trudov MO SSSR*, No 54, P. 74–83. (In Russ.)
7. Lomov S. A. 1965, “Regularization of singular perturbations” [Regulyarizatsiya singulyarnykh vozmushcheniy], *Moscow: Dokl. nauchno-tekhn. konf. MPEI, sektsiya matem.*, P. 129–133. (In Russ.)
8. Lomov S. A., Safonov V. F. 1984, “Regularizations and asymptotic solutions for singularly perturbed problems with point singularities of the spectrum of the limit operator” [Regulyarizatsii i asimptoticheskiye resheniya dlya singulyarno vozmushchennykh zadach s tochechnymi osobennostyami spektra predel’nogo operatora], *Ukr. mat. zhurn.*, Vol. 36, No 2, P. 172–180. (In Russ.)
9. Eliseev A. G., Lomov S. A. 1988, “The theory of singular perturbations in the case of spectral singularities of a limit operator”, *Math. USSR-Sb.*, Vol. 59, No 2, P. 541–555.
10. Bobodzhanov A. A., Safonov V. F. 2018, “Regularized asymptotics of solutions to integro-differential partial differential equations with rapidly varying kernels”, *Ufa Math. J.*, Vol. 10, No 2, P. 3–13.
11. Eliseev A. G., Ratnikova T. A. 2019, “Singularly perturbed cauchy problem in the presence of the rational simple pivot point of the limit operator”, *Differentsialnie Uravnenia i Protsesy Upravlenia*, No 3, P. 63–73.
12. Eliseev A. G. 2020, “Regularized solution of a singularly perturbed cauchy problem in the presence of irrational simple turning point”, *Differentsialnie Uravnenia i Protsesy Upravlenia*, No 2, P. 15–32.
13. Eliseev P. V. 2020, “A singularly perturbed cauchy problem for a parabolic equation in the presence of the “weak” turning point of the limit operator”, *Mathematical Notes of NEFU*, Vol.57, No 3, P. 3–15.
14. Eliseev A. G., Eliseev P. V. 2020, “Regularized asymptotics of solution a singularly perturbed Cauchy problem in the presence of the «weak» turning point at the limit operator”, *Differentsialnie Uravnenia i Protsesy Upravlenia*, No 1, P. 55–67.
15. Eliseev A. G., Eliseev P. V. 2022, “Singularly Perturbed Cauchy Problem in Which the Limit Operator has Multiple Spectrum and a Weak First-Order Turning Point”, *Differential Equations*, Vol.58, No 6, P. 727–740.

16. Eliseev A. G. 2022, “Example of Solution of a Singularly Perturbed Cauchy Problem for a Parabolic Equation in the Presence of strong Turning Point”, *Differencialnie Uravnenia i Protsesy Upravlenia*, No 3, P. 46–58.
17. Landau L. D., Lifshitz E. M. 2008, “Course of theoretical physics, Vol. 3, Quantum mechanics (non-relativistic theory)” [Kurs teoreticheskoy fiziki, T. 3, Kvantovaya mekhanika (nerelyativistskaya teoriya)], *Moscow: Fizmatlit.* (In Russ.)
18. Arnol'd V. I. 1971, “On matrices depending on parameters”, *Russian Math. Surveys*, Vol.26, No 2, P. 29–43.
19. Liouville, J. Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1837, p. 16–35.
20. Elsgolts L. E. 1969, “Differential Equations and Variational Calculus” [*Differentsial'nyye uravneniya i variatsionnoye ischisleniye*], *Moscow: Nauka.* (In Russ.)

Получено: 13.12.2022

Принято в печать: 24.04.2023