

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 510.53, 512.54.05

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-40-49

Проблема разрешимости позитивной теории произвольной группы алгоритмически неразрешима¹

В. Г. Дурнев, А. И. Зеткина

Дурнев Валерий Георгиевич — Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова (г. Ярославль).

e-mail: durnev@uniyar.ac.ru

Зеткина Алена Игоревна — Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова (г. Ярославль); Воронежский государственный университет (г. Воронеж).

e-mail: a.zetkina1@uniyar.ac.ru

Аннотация

В статье доказано, что невозможно построить алгоритм, позволяющий по произвольному конечному заданию группы определить, разрешима ли ее позитивная теория. Указанное групповое свойство не является марковским, поэтому к нему не применима фундаментальная теорема Адяна – Рабина.

Ключевые слова: позитивная формула, позитивная теория группы, позитивная теория класса групп, алгоритмическая разрешимость, алгоритмическая неразрешимость.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

В. Г. Дурнев, А. И. Зеткина. Проблема разрешимости позитивной теории произвольной группы алгоритмически неразрешима // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 40–49.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 510.53, 512.54.05

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-40-49

The problem of solvability of a positive theory of an arbitrary group is algorithmically unsolvable

V. G. Durnev, A. I. Zetkina

Durnev Valeriy Georgievich — Yaroslavl State University (Yaroslavl).

e-mail: a.zetkina1@uniyar.ac.ru

Zetkina Alena Igorevna — Yaroslavl State University (Yaroslavl); Voroneg State University (Voroneg).

e-mail: a.zetkina1@uniyar.ac.ru

Abstract

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19 - 52 - 26006).

In paper proved that it is impossible to build an algorithm that allows you to determine from an arbitrary finite task of the group whether it is solvable her positive theory. The specified group property is not Markov, so the fundamental Adyan-Rabin theorem does not apply to it.

Keywords: positive formula, positive group theory, positive group class theory, algorithmic solvability, algorithmic insolubility.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

V. G. Durnev, A. I. Zetkina, 2023, "The problem of solvability of a positive theory of an arbitrary group is algorithmically unsolvable", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 40–49.

100-летию со дня рождения
М. Н. Добровольского посвящается

1. Проблема распознавания группового свойства α

По произвольному конечному заданию группы образующими и определяющими соотношениями определить, обладает ли эта группа свойством α .

Напомним, что групповое свойство α называется *инвариантным*, если из того, что для группы G выполнено свойство α , а группа H изоморфна группе G следует, что и для группы H выполнено свойство α . Инвариантное групповое свойство α называется *марковским*, если существует конечно определенная группа G_α^+ , для которой выполнено свойство α и существует конечно определенная группа G_α^- , которая не вложима ни в какую конечно определенную группу, для которой выполнено свойство α . Можно привести очень много интересных примеров марковских свойств. Например, " G - единичная группа", " G - конечная группа", " G - периодическая группа", " G - циклическая группа", " G - абелева группа", " G - нильпотентная группа", " G - разрешимая группа", "на группе G - выполняется нетривиальное тождество", " G - простая группа", " G - финитно аппроксимируемая группа", "в группе G - разрешима проблема равенства", " G - свободная группа", " G - группа без кручения", "группа G $\exists$ -эквивалентна свободной неабелевой группе", "группа G $\forall$ -эквивалентна свободной неабелевой группе", "группа G элементарно эквивалентна свободной неабелевой группе" и т.д. Поэтому особый интерес представляет **фундаментальная теорема С.И. Адяна** [1], [2] – **М.О. Рабина** [3].

ТЕОРЕМА 1 (Адян – Рабин). *Проблема распознавания любого марковского группового свойства алгоритмически неразрешима.*

2. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания разрешимости позитивной теории произвольной группы

Существуют интересные примеры немарковских свойств, как алгоритмически разрешимых, так и алгоритмически неразрешимых. Например, немарковскими являются свойства " G совпадает со своим коммутантом", " G хопфова". Первое свойство алгоритмически разрешимо, а второе – алгоритмически неразрешимо: в работе [4] D.J. Collings доказал алгоритмическую неразрешимость проблемы распознавания хопфовости для конечно определенных групп, а в работах [5], [6] и [7] C.F. Miller III и P.E. Schupp доказали, что любая конечно определенная группа вложима в некоторую хопфову конечно определенную группу, значит свойство групп "Быть хопфовой группой" не является марковским.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элементарная теория с константами $Th_G(G)$ группы G – это множество всех замкнутых (не содержащих свободных вхождений переменных) формул Φ вида

$$(Q_1 x_1)(Q_2 x_2) \dots (Q_n x_n) \Psi,$$

$$\text{где } \Psi = \bigvee_{i=1}^k ((\bigwedge_{j \in A_i} w_{ij} = u_{ij}) \& (\bigwedge_{t \in B_i} v_{it} \neq z_{it})),$$

$w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it}$ – слова в алфавите переменных и констант $\{x_1, \dots, x_n\} \cup G$,

A_i и B_i – множества (возможно пустые), а $Q_1, \dots, Q_n$ – кванторы $\forall$ или $\exists$,

истинных на группе G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элементарная теория без констант $Th(G)$ группы G – это множество всех замкнутых (не содержащих свободных вхождений переменных) формул Φ вида

$$(Q_1 x_1)(Q_2 x_2) \dots (Q_n x_n) \Psi,$$

$$\text{где } \Psi = \bigvee_{i=1}^k ((\bigwedge_{j \in A_i} w_{ij} = u_{ij}) \& (\bigwedge_{t \in B_i} v_{it} \neq z_{it})),$$

$w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it}$ – слова в алфавите переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$,

A_i и B_i – множества (возможно пустые), а $Q_1, \dots, Q_n$ – кванторы $\forall$ или $\exists$,

истинных на группе G .

При этом $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ называется кванторной приставкой формулы Φ , $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ – тип кванторной приставки, а Ψ – бескванторной частью формулы Φ .

Если зафиксировать тип кванторной приставки $(Q_1 x_1)(Q_2 x_2) \dots (Q_n x_n)$ рассматриваемых формул Φ не накладывая при этом никаких ограничений на их бескванторную часть Ψ , то получим понятие элементарной $Q_1 Q_2 \dots Q_n Th_G(G)$ -теории группы G (с константами)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Формула Φ называется позитивной, если ее бескванторная часть Ψ не содержит отрицаний, т.е. имеет вид

$$\bigvee_{i=1}^k (\bigwedge_{j \in A_i} w_{ij} = u_{ij}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Позитивной теорией с константами $Th_G^+(G)$ группы G называется подмножество ее элементарной теории с константами $Th_G(G)$, состоящее из всех замкнутых позитивных формул Φ (истинных на группе G).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Позитивной теорией без констант $Th^+(G)$ группы G называется подмножество ее элементарной теории без констант $Th(G)$, состоящее из всех замкнутых позитивных формул Φ (истинных на группе G).

Если зафиксировать тип кванторной приставки $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ рассматриваемых позитивных формул Φ из $Th_G^+(G)$ не накладывая при этом никаких ограничений на их позитивную бескванторную часть Ψ , то получим понятие позитивной $Q_1 Q_2 \dots Q_n Th_G^+(G)$ -теории с константами группы G .

Аналогичным образом определяется понятие позитивной $Q_1 Q_2 \dots Q_n Th^+(G)$ -теории без констант группы G .

Если элементарные теории без констант групп G и H совпадают ($Th(G) = Th(H)$), то группы G и H называются элементарно эквивалентными или элементарно неотличимыми.

Если элементарные $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ -теории без констант групп G и H совпадают ($Q_1 Q_2 \dots Q_n Th(G) = Q_1 Q_2 \dots Q_n Th(H)$), то группы G и H называются элементарно $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ -эквивалентными или элементарно $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ -неотличимыми.

Если *позитивные теории без констант* групп G и H совпадают ($Th^+(G) = Th(H)^+$), то группы G и H называются *позитивно эквивалентными* или *позитивно неотличимыми*.

Если *позитивные $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ -теории без констант* групп G и H совпадают ($Q_1 Q_2 \dots Q_n Th^+(G) = Q_1 Q_2 \dots Q_n Th^+(H)$), то группы G и H называются *позитивно $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ -эквивалентными* или *позитивно $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ -неотличимыми*.

Если группа H является подгруппой группы G ($H \leq G$), то можно естественным образом определить равенства $Th_H(H) = Th_H(G)$, $Q_1 Q_2 \dots Q_n Th_H(H) = Q_1 Q_2 \dots Q_n Th_H(G)$, $Th_H^+(H) = Th_H^+(G)$ и $Q_1 Q_2 \dots Q_n Th_H^+(H) = Q_1 Q_2 \dots Q_n Th_H^+(G)$.

Ю.И. Мерзляков в работе [8] установил, в частности, *позитивную эквивалентность (позитивную неотличимость) любых двух свободных нециклических групп*. Более того, он доказал, что для любых $2 \leq n \leq m$ выполняется равенство $Th_{F_n}^+(F_n) = Th_{F_n}^+(F_m)$. Г.С. Сасердот в работе [9] частично усилил результат Ю.И. Мерзлякова – он доказал, что если A и B – неединичные группы и порядок одной из них больше 2, то их свободное произведение $A * B$ позитивно эквивалентно свободной группе F_2 ($Th^+(A * B) = Th^+(F_2)$).

Н.А. Перязев в работе [10] получил критерии позитивной неотличимости алгебраических систем и на этой основе в работе [11] доказал, что для любых двух свободных моноидов M_n и M_m (свободных полугрупп с единицей) рангов n и m соответственно при $2 \leq n \leq m$ выполняется равенство $Th_{M_{n-2}}^+(M_n) = Th_{M_{n-2}}^+(M_m)$.

В.Н. Ремесленников в работе [12] исследовал $\exists$ -свободные группы, т.е. группы $\exists$ -теории без констант которых совпадают с $\exists$ -теорией без констант свободной нециклической группы (свободной группы F_2), и установил, что для конечно порожденных групп это понятие равносильно понятию ω -аппроксимируемости свободными группами.

Так как групповое свойство “группа G является $\exists$ -свободной” – марковское, то по фундаментальной теореме С.И. Адяна – М.О. Рабина проблема его распознавания алгоритмически неразрешима, т.е. невозможно построить алгоритм, позволяющий по произвольному конечно-му заданию группы образующими и определяющими соотношениями определить, является ли эта группа $\exists$ -свободной, т.е. совпадает ли ее $\exists$ -теория без констант с $\exists$ -теорией без констант свободной нециклической группы F_2 .

Нас будут интересовать немарковские свойства групп: “*позитивная теория без констант $Th^+(G)$ группы G алгоритмически разрешима*”, *позитивная $Q_1 Q_2 \dots Q_n Th^+(G)$ -теория без констант группы G алгоритмически разрешима*.

Эти свойства не являются марковскими, так как по теореме Г.С. Сасердота [9] для любой группы G группа $G * F_2$, как и любая группа, имеющая среди гомоморфных образов группу вида $A * B$, где A и B – неединичные группы и по крайней мере одна из них содержит не менее трех элементов, позитивно эквивалентна свободной нециклической группе. Значит любая конечно определенная группа вложима в конечно определенную группу, позитивная теория которой совпадает с позитивной теорией свободной нециклической группы, а значит, как доказал Г.С. Маканин в работе [13] алгоритмически разрешима.

ТЕОРЕМА 2. *Невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольной конечно определенной группе G определить, разрешима ли ее позитивная теория.*

ТЕОРЕМА 3. *Невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольной конечно определенной группе G определить, разрешима ли ее позитивная $\forall^2 \exists^m$ -теория.*

Обозначим через $F_2(\mathfrak{N}_2)$ свободную нильпотентную группу ранга 2 степени нильпотентности 2. Как свободная группа многообразия $\mathfrak{N}_2$ нильпотентных групп степени нильпотентности ≤ 2 она имеет задание

$$\langle\langle a, b \mid [[x, y], z] = 1 \rangle\rangle.$$

Для нас особую важность будет иметь тот факт, что группа $F_2(\mathfrak{N}_2)$ является *конечно определенной* с заданием

$$\langle \langle a, b \mid [[a, b], a] = 1, [[a, b], b] = 1 \rangle \rangle,$$

где $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ – коммутатор элементов a и b .

ЛЕММА 1. *Существует такое n , что позитивная $\forall^2\exists^n$ -теория без констант группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$ ($\forall^2\exists^n Th^+(F_2(\mathfrak{N}_2))$) алгоритмически неразрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственным следствием **фундаментального результата** М. Дэвиса – Дж. Робинсон – П. Путнама – Ю.В. Матиясевича [14] является следующее утверждение:

по произвольному рекурсивно перечислимому множеству U натуральных чисел можно построить такую формулу $\Phi_U(x_1)$ вида

$$(\exists x_2 \dots x_p) \Psi, \text{ где } \Psi = \big\&_{i=1}^m \varphi_i$$

и каждая из формул φ_i имеет один из следующих видов:

$$x_i + x_j = x_t, \quad x_i \cdot x_j = x_t, \quad x_i = x_t, \quad x_i = c_t,$$

где c_t – целое число, что для произвольного натурального числа n справедлива эквивалентность:

$n \in U$ тогда и только тогда, когда формула $\Phi_U(n)$ истинна на кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z} \models \Phi_U(n)$).

А.И. Мальцев в работе [15] ввел предикат

$$R(x_1, x_2, x_3) = (\exists z_1 z_2) \Psi, \text{ где}$$

$$\Psi = \left(\big\&_{i=1}^2 [a_i, z_i] = x_i \& [z_1, a_2] = 1 \& [z_2, a_1] = 1 \& [z_1, z_2] = x_3 \right)$$

и доказал, что для произвольных целых чисел t, s и r :

формула $R(c^t, c^s, c^r)$, где $c = [a_2, a_1] = a_2^{-1}a_1^{-1}a_2a_1$ – коммутатор элементов a_1 и a_2 , истинна на группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$ тогда и только тогда, когда $r = ts$.

Приведем некоторые хорошо известные факты о группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$. Ее центр совпадает с коммутантом и является бесконечной циклической группой, порожденной, например, коммутатором $c = [a_2, a_1] = a_2^{-1}a_1^{-1}a_2a_1$. Для любых трех элементов u, v и w группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$ выполняются равенства $[uv, w] = [u, w][v, w]$ и $[w, uv] = [w, u][w, v]$. Для любых целых чисел n и m выполняются равенства

$$[a_2^n, a_1^m] = [a_2, a_1]^{nm} = [a_2^{nm}, a_1] = [a_2, a_1^{nm}] = [a_1, a_2]^{-nm} = [a_1^{-nm}, a_2] = [a_1, a_2^{-nm}].$$

Поэтому для произвольного элемента g группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$ справедливы эквивалентности

$$\begin{aligned} g \text{ степень элемента } c &\iff g \text{ принадлежит коммутанту группы } F_2(\mathfrak{N}_2) &\iff \\ &\text{на группе } F_2(\mathfrak{N}_2) \text{ истинна формула } (\exists u)g = [u, a_1] &\iff \\ &\text{на группе } F_2(\mathfrak{N}_2) \text{ истинна формула } (\exists u)g = [u, a_2] &\iff \\ &\text{на группе } F_2(\mathfrak{N}_2) \text{ истинна формула } (\exists u)(\exists v)g = [u, v] &\iff \\ &g \text{ принадлежит центру группы } F_2(\mathfrak{N}_2) &\iff \end{aligned}$$

$$\text{на группе } F_2(\mathfrak{N}_2) \text{ истинна формула } \big\&_{i=1}^2 [x, a_i] = 1.$$

Обозначим через $\mathbb{Z}(x)$, например, формулу $\bigwedge_{i=1}^2 [x, a_i] = 1$ или формулу $(\exists u)(\exists v)x = [u, v]$. Тогда для произвольного элемента g группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$ справедлива эквивалентность

$$g \text{ степень элемента } c \iff \text{на группе } F_2(\mathfrak{N}_2) \text{ истинна формула } \mathbb{Z}(g).$$

Для произвольного рекурсивно перечислимого множества U натуральных чисел преобразуем формулу $\Phi_U(x_1)$, относящуюся к кольцу целых чисел $\mathbb{Z}$, в формулу $\Phi_U^{(1)}(x_1)$, относящуюся к группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$, полагая

$$\Phi_U^{(1)}(x_1) = (\exists x_2 \dots x_p)(\Psi_1, \& \bigwedge_{i=2}^p \mathbb{Z}(x_i)),$$

где Ψ_1 получается из Ψ заменой каждой подформулы φ вида $x_t + x_s = x_r$ на $x_t x_s = x_r$, вида $x_t x_s = x_r$ на $R(x_t, x_s, x_r)$, вида $x_t = m_s$ на $x_t = c^{m_s}$. Подформулы вида $x_t = x_s$ не меняются.

Тогда для произвольного натурального числа n справедлива эквивалентность:

$$n \in U \text{ тогда и только тогда, когда формула } \Phi_U^{(1)}(c^n) \text{ истинна на группе } F_2(\mathfrak{N}_2) \\ (F_2(\mathfrak{N}_2) \models \Phi_U^{(1)}(c^n)).$$

Приведем формулу $\Phi_U^{(1)}(x_1)$ к предваренной нормальной форме, заменим x_1 на x и переименуем переменные, получим формулу $\Phi_U^{(2)}(x)$ вида

$$(\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2) = 1 \right)$$

такую, что для произвольного натурального числа n справедлива эквивалентность:

$$n \in U \text{ тогда и только тогда, когда формула } \Phi_U^{(2)}(c^n) \text{ истинна на группе } F_2(\mathfrak{N}_2) \\ (F_2(\mathfrak{N}_2) \models \Phi_U^{(2)}(c^n)).$$

Полагаем

$$\Phi_U(x) = (\forall z_1 z_2)(\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, x_n, z_1, z_2) = 1 \right).$$

Тогда для произвольного натурального числа n справедлива эквивалентность:

$$n \in U \text{ тогда и только тогда, когда формула } \Phi_U(c^n) \text{ истинна на группе } F_2(\mathfrak{N}_2) \\ (F_2(\mathfrak{N}_2) \models \Phi_U(c^n)).$$

Взяв в качестве множества U рекурсивно перечислимое, но не рекурсивное множество, получим, что при некотором n алгоритмически неразрешима позитивная $\forall^2 \exists^n$ -теория группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$. $\square$

Так как справедливы эквивалентности

$$\begin{aligned} \text{формула } (\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2) = 1 \right) \text{ истинна на группе } F_2(\mathfrak{N}_c) &\iff \\ \text{на группе } F_2(\mathfrak{N}_{c+1}) \text{ истинна формула } (\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m \bigwedge_{j=1}^2 [w_i(x, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2), a_j] = 1 \right) & \\ \text{формула } (\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2) = 1 \right) \text{ истинна на группе } F_2(\mathfrak{N}_c) &\iff \\ \text{при любом } p \geq 2 \text{ на группе } F_p(\mathfrak{N}_c) \text{ истинна формула } (\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, \right. & \\ \left. x_n, a_1, a_2) = 1 \right), & \end{aligned}$$

то по индукции легко получим, что при некотором n при любых $p \geq 2$ и $c \geq 2$ алгоритмически неразрешима позитивная $\forall^2 \exists^n$ -теория группы $F_p(\mathfrak{N}_c)$.

Заметим, что попытки дальнейшего усиления доказанных утверждений наталкиваются на некоторые препятствия.

Так как формула вида

$$(\forall z_1)(\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, x_n, z_1) = 1 \right)$$

истинна на группе $F_m(\mathfrak{N}_c)$ тогда и только тогда, когда на бесконечной циклической группе $F_1 = \langle \langle a_1 \rangle \rangle$ истинна формула

$$(\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, x_n, a_1) = 1 \right),$$

то при любом n , при любых p и с позитивная $\forall \exists^n$ -теория группы $F_p(\mathfrak{N}_c)$ алгоритмически разрешима.

Так как формула вида

$$(\forall z_1) \dots (\forall z_p)(\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_p) = 1 \right)$$

истинна на группе $F_p(\mathfrak{N}_c)$ тогда и только тогда, когда на этой группе истинна формула

$$(\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_p) = 1 \right),$$

то проблема истинности на группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$ для формул вида

$$(\forall z_1)(\forall z_2)(\exists x_1 \dots x_n) w(x, x_1, \dots, x_n, z_1, z_2) = 1$$

сводится к вопросу об истинности на этой группе формул вида

$$(\exists x_1 \dots x_n) w(x, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2) = 1,$$

т.е. к вопросу о разрешимости в этой группе для систем из одного уравнения. Последняя проблема алгоритмически разрешима, так как из однозначной представимости элементов группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$ в виде $a_1^u a_2^v c^z$, где u, v и z – целые числа, следует возможность свести эту проблему к вопросу о существовании целочисленного решения у системы из двух линейных и одного квадратичного уравнений с целыми коэффициентами. А последний вопрос алгоритмически разрешим.

Г.С. Маканин [13] используя работу Ю.И. Мерзлякова [8] доказал разрешимость позитивной теории (с константами) свободной группы любого ранга и класса всех групп (без констант).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. теоремы. Воспользуемся конструкцией Ч. Миллера [5]. Пусть группа G имеет конечное задание образующими элементами и определяющими соотношениями

$$G = \langle \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1 = 1, \dots, R_m = 1 \rangle \rangle,$$

а w – произвольное слово в ее алфавите. Следуя работе [5] Ч. Миллера обозначим через G_w конечно определенную группу со следующим заданием

$$\begin{aligned} G_w = \langle \langle a_1, \dots, a_n a, b, c \mid R_1 = 1, \dots, R_m = 1, a^{-1}ba = (bc)^{-1}c(bc), \\ (ba^2)^{-1}a(ba^2) = (bc^2)^{-1}c(bc^2), a^{-3}[w, b]a^3 = c^{-3}bc^3, \\ a^{-(3+i)}a_i ba^{(3+i)} = c^{-(3+i)}bc^{(3+i)} (i = 1, 2, \dots, n) \rangle \rangle, \end{aligned}$$

где a, b и c – новые буквы.

Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Группа G_w порождается элементами b и ca^{-1} .
- 2) Если $w = 1$ в группе G , то G_w – единичная группа.
- 3) Если $w \neq 1$ в группе G , то группа G является подгруппой группы G_w .

Группа $G_w * F_2(\mathfrak{N}_2)$ имеет конечное задание, содержащее 4 образующих элемента и $(m+2)$ определяющих соотношения.

Возьмем в качестве исходной группы G группу В.В. Борисова с неразрешимой проблемой равенства с 12 определяющими соотношениями [16], тогда группа $G_w * F_2(\mathfrak{N}_2)$ имеет конечное задание вида

$$\langle\langle a, b \mid R_1 = 1, \dots, R_{14} = 1 \rangle\rangle.$$

Существует такое n , что

- 1) Если $w = 1$ в группе G , то *позитивная $\forall^2\exists^n$ -теория без констант группы $G_w * F_2(\mathfrak{N}_2) = F_2(\mathfrak{N}_2)$ алгоритмически неразрешима.*

- 3) Если $w \neq 1$ в группе G , то *по теореме Г.С. Сасердота [9] позитивная теория группы $G_w * F_2(\mathfrak{N}_2)$ совпадает с позитивной теорией свободной нециклической группы, а значит по теореме Г.С. Маканина [13] алгоритмически разрешима.*

Установлены следующие эквивалентности

$w = 1$ в группе G тогда и только тогда, когда *позитивная теория без констант группы $G_w * F_2(\mathfrak{N}_2)$ неразрешима,*

существует такое натуральное число n , что

$w = 1$ в группе G тогда и только тогда, когда *позитивная $\forall^2\exists^n$ -теория без констант группы $G_w * F_2(\mathfrak{N}_2)$ неразрешима.* Это завершает доказательство теорем. $\square$

3. Заключение

В статье доказана алгоритмическая неразрешимость немарковского свойства *позитивная теория без констант группы G алгоритмически разрешима*, а также существование такого натурального числа n , для которого алгоритмически неразрешимо немарковское свойство *позитивная $\forall^2\exists^n$ -теория без констант группы G алгоритмически разрешима*.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адян С. И. Алгоритмическая неразрешимость проблем распознавания некоторых свойств групп // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103, № 4. С. 533–535.
2. Адян С. И. Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп // Труды ММО. 1957. Т. 6. С. 231–298.
3. Rabin M. O. Recursive unsolvability of group theoretic problems // Ann. of Math. 1958. Vol. 67, № 1. P. 172–194.
4. Collings D. J. On recognizing Hopf groups // Arh. Math. 1969. Vol. 20. P. 235–240.
5. Miller C. F. III. Decision problems for groups – survey and reflections // Math. Sci. Res. Inst. Publ. 1992. Vol. 23. P. 1–59.
6. Miller C. F. III, Schupp P. E. Embeddings into Hopfian groups // Journal Algebra, 1971. Vol. 17. P. 171–176.

7. Miller C. F. III. On group-theoretic decision problems and their classification // *Ann. of Math. Studies*. 1971. Vol. 68. Princeton University Press.
8. Мерзляков Ю. И. Позитивные формулы на свободных группах. // *Алгебра и логика*. 1966. Т. 5, вып. 4. С. 25-42.
9. Sacerdote G. S. Almost all free products of groups have the same positive theory // *Journal Algebra*. 1973. Vol. 27, № 3. P. 475-485.
10. Перязев Н. А. Позитивная неотличимость алгебраических систем и полнота позитивных теорий // *Матем. заметки*. 1985. Т. 38, № 2. С. 208-212.
11. Перязев Н. А. Позитивные теории свободных моноидов // *Алгебра и логика*. 1993. Т. 32, № 2. С. 148- 159.
12. Ремеслеников В. Н. $\exists$ -свободные группы // *Сиб. матем. журнал*. 1989. Т. 30, № 6. С. 193-197.
13. Маканин Г. С. Разрешимость универсальной и позитивной теорий свободной группы // *Изв. АН СССР. Серия матем.* 1984. № 2. С. 35-749.
14. Матиясевич Ю. В. Диофантовость перечислимых множеств // *Докл. АН СССР*. 1970. Т. 130, № 3. С. 495-498.
15. Мальцев А. И. Об одном соответствии между кольцами и группами // *Матем. сб.* 1960. Т. 50, № 2. С. 257-266.
16. Борисов В. В. Простые примеры групп с неразрешимой проблемой тождества // *Матем. заметки*. 1969. Т. 6, вып. 5. С. 521-532.

REFERENCES

1. Adyan, S. I. 1955, "Algorithmic intractable problems of recognizing some properties of groups", *Dokl. USSR ACADEMY OF SCIENCES*, vol. 103, no. 4, pp. 533-535.
2. Adyan, S. I. 1957, "Insolubility of some algorithmic problems of group theory", *Works of MMO*, vol. 6. pp. 231-298.
3. Rabin M. O. 1958, "Recursive unsolvability of group theoretic problems", *Ann. of Math.*, vol. 67, no. 1, pp. 172-194.
4. Collings D. J. 1992, "On recognizing Hopf groups", *Arh. Math.*, vol. 20, pp. 235-240.
5. Miller C. F. III. 1992, "Decision problems for groups – survey and reflections", *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, vol. 23, pp. 1-59.
6. Miller C. F. III & Schupp P.E. 1971, "Embeddings into Hopfian groups", *Journal Algebra*, vol. 17, pp. 171-176.
7. Miller C. F. III. 1966, "On group-theoretic decision problems and their classification", *Ann. of Math. Studies*, vol. 68. Princeton University Press.
8. Merzlyakov Yu. I. 1966, "Positive formulas on free groups", *Algebra and logic*, vol. 5, issue 4. pp. 25-42.

9. Sacerdote G. S. 1973, "Almost all free products of groups have the same positive theory", *Journal Algebra*, vol. 27, no. 3, pp. 475-485.
10. Peryazev N. A. 1985, "Positive indistinguishability of algebraic systems and completeness of positive theories", *Mathem. notes*, vol. 38, no. 2, pp. 208-212.
11. Peryazev N. A. 1993, "Positive theories of free monoids", *Algebra and logic*, vol. 32, no. 2, pp. 148-159.
12. Remeslenikov V. N. 1989, " $\exists$ -free groups", *Sib. mate. magazine*, vol. 30, no. 6, pp. 193-197.
13. Makanin G. S. 1984, "Solvability of universal and positive free theories groups", *Isv. USSR ACADEMY OF SCIENCES. Matem series*, no. 2, pp. 35-749.
14. Matiyasevich Yu. V. 1970, "Diophancy of enumerated sets", *Dokl. USSR ACADEMY OF SCIENCES*, vol. 130, no. 3, pp. 495-498.
15. Maltsev A. I. 1960, "About one correspondence between rings and groups", *Mathem. Sat.*, vol. 50, no. 2, pp. 257-266.
16. Borisov V. V., 1969, "Simple examples of groups with an unsolvable identity problem" // *Mathem. notes*. 1969. Vol. 6, issue 5, pp. 521-532.
Borisov V. V. 1969, "Simple examples of groups with an intractable problem identities", *Mathem. notes*, vol. 6, no. 5, pp. 521-532.

Получено: 09.01.2023

Принято в печать: 24.04.2023