ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 1.

УДК 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-27-39

Нелинейный метод угловых пограничных функций в задачах с кубическими нелинейностями

А. И. Денисов, И. В. Денисов

Денисов Алексей Игоревич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: den_tspu@mail.ru
Денисов Игорь Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: den_tspu@mail.ru

Аннотация

В прямоугольнике $\Omega = \{(x,t)\,|\,0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = F(u,x,t,\varepsilon), \quad (x,t)\in\Omega,$$

$$u(x,0,\varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t,\varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1,t,\varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Предполагается, что в угловых точках прямоугольника функция F относительно переменной u является кубической. Для построения асимптотики решения задачи используется нелинейный метод угловых пограничных функций, который предполагает выполнение следующих шагов:

1) разбиение области на части;
2) построение в каждой подобласти нижних и верхних решений задачи;
3) непрерывная стыковка нижних и верхних решений на общих границах подобластей;
4) последующее сглаживание кусочно-непрерывных нижних и верхних решений.

В настоящей работе удалось построить барьерные функции, пригодные сразу во всей области. Вид барьерных функций определяются с помощью погранслойных функций, являющихся решениями обыкновенных дифференциальных уравнений, а также с учетом необходимых свойств искомых решений. В результате построено полное асимптотическое разложение решения при $\varepsilon \to 0$ и обоснована его равномерность в замкнутом прямоугольнике.

Ключевые слова: пограничный слой, асимптотическое приближение, сингулярно возмущенное уравнение.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
А. И. Денисов, И. В. Денисов. Нелинейный метод угловых пограничных функций в задачах с кубическими нелинейностями // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 27–39.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-27-39

Nonlinear method of angular boundary functions in problems with cubic nonlinearities

A. I. Denisov, I. V. Denisov

Denisov Alexey Igorevich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: den_tspu@mail.ru

Denisov Igor Vasil'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: den_tspu@mail.ru

Abstract

In the rectangle $\Omega = \{(x,t)\,|\,0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ we consider an initial-boundary value problem for a singularly perturbed parabolic equation

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = F(u,x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in \Omega,$$

$$u(x,0,\varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(0,t,\varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1,t,\varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

It is assumed that at the corner points of the rectangle the function F with respect to the variable u is cubic. To construct the asymptotics of the solution to the problem, the nonlinear method of angular boundary functions is used, which involves the following steps:

1) splitting the area into parts;

2) construction in each subdomain of lower and upper solutions of the problem;

3) continuous joining of the lower and upper solutions on the common boundaries of the subdomains;

4) subsequent smoothing of piecewise continuous lower and upper solutions.

In the present work, we succeeded in constructing barrier functions suitable for the entire region at once. The form of barrier functions is determined using boundary-layer functions that are solutions of ordinary differential equations, as well as taking into account the necessary properties of the desired solutions. As a result, a complete asymptotic expansion of the solution for $\varepsilon \to 0$ is constructed and its uniformity in a closed rectangle is justified.

Keywords: boundary layer, asymptotic approximation, singularly perturbed equation.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

A. I. Denisov, I. V. Denisov, 2023, "Nonlinear method of angular boundary functions in problems with cubic nonlinearities" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 27–39.

1. Введение

Исследования сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений в областях с негладкими границами привели к созданию метода угловых пограничных функций. Сначала в 1972 году В. Ф. Бутузов рассмотрел разностные уравнения (см. [1]), для решения которых потребовалось введение углового пограничного слоя и угловых пограничных функций. В 1978 году метод был успешно распространен на сингулярно возмущенные параболические задачи (см. [2]).

Впоследствии В. Ф. Бутузовым и его учениками с помощью этого метода были исследованы многочисленные прикладные задачи. Однако, при рассмотрении нелинейных уравнений ставились краевые условия второго рода (задача Неймана), вследствие чего не учитывалась исходная нелинейность задачи и для построения угловых пограничных функций получались линейные параболические задачи, решение которых не вызывало трудностей.

В теории и практике применения дифференциальных уравнений в частных производных основной интерес представляют задачи с краевыми условиями первого рода (задача Дирихле). При рассмотрении таких задач в областях с угловыми точками границы угловой погранслой определяется из нелинейных задач, решение которых представляет основную проблему. К таким задачам в 1991 году одному из авторов удалось применить метод верхних и нижних решений. Используя погранслойные функции, получающиеся как решения обыкновенных дифференциальных уравнений, были построены нижние и верхние решения для нелинейных уравнений в частных производных, определяющих угловые пограничные функции (см. [3]). В первых работах рассматривались простейшие квадратичные нелинейности. Впоследствии был сделан переход к нелинейностям общего вида, а для построения угловых пограничных функций был предложен способ, предполагающий следующие шаги:

1) разбиение области на части; 2) построение в каждой подобласти нижних и верхних решений задачи; 3) непрерывная стыковка нижних и верхних решений на общих границах подобластей; 4) последующее сглаживание кусочно-непрерывных нижних и верхних решений.

Так появился нелинейный метод угловых пограничных функций. На основании последних исследований (см. [4–11]) стало возможным завершить формирование этого метода и оформить его в виде законченной теории, имея в виду дальнейшее применение этого метода к многочисленным прикладным задачам.

Для обоснования построенной асимптотики решения вместо применявшегося в первых работах способа впоследствии был использован универсальный метод дифференциальных неравенств, предложенный Н. Н. Нефедовым (см. [12]).

В настоящей работе с помощью нелинейного метода угловых пограничных функций решается задача с кубическими нелинейностями в угловых точках границы.

2. Постановка задачи

Обозначим через Ω прямоугольник $\{(x,t)\,|\,0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$. Рассмотрим начально-краевую задачу вида

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = F(u,x,t,\varepsilon), \quad (x,t)\in\Omega, \tag{1}$$

$$u(x,0,\varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2}$$

$$u(0,t,\varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1,t,\varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3}$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. *Функции* $F(u,x,t,\varepsilon)$, $\phi(x)$, $\psi_1(t)$ *и* $\psi_2(t)$ *являются достаточно гладкими и в угловых точках прямоугольника* Ω *выполняются условия согласованности начально-краевых значений*

$$\varphi(0) = \psi_1(0), \quad \varphi(1) = \psi_2(0).$$

Условие 2. *Вырожденное уравнение* $F(u,x,t,0) = 0$ *в замкнутом прямоугольнике* $\overline{\Omega}$ *имеет решение, которое обозначается как* $u = \bar{u}_0(x,t)$.

Заметим, что в силу нелинейности это уравнение может иметь и другие решения.

Условие 3. *Производная* $F'_u(\bar{u}_0\,(x,t),x,t,0) > 0$ *в замкнутом прямоугольнике* $\overline{\Omega}$.

Условие 4. *Начальная задача*

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\bar{u}_0(x,0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \Pi_0(x,0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x,0),$$

имеет решение $\Pi_0(x,\tau)$ *при* $\tau \geqslant 0$, *удовлетворяющее условию* $\Pi_0(x,\infty) = 0$ (*здесь параметр* $x \in [0,1]$).

Условие 5. *Для систем*

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \quad a^2\frac{dz_2}{dy} = F(\bar{u}_0(k,t) + z_1, k, t, 0), \tag{4}$$

прямые $z_1 = \psi_{1+k}(t) - \bar{u}_0(k,t)$ *пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя* $(z_1,z_2) = (0,0)$ *при* $y \to \infty$ (*здесь* t - *параметр,* $k = 0$ *или* 1).

В силу условий 1–3 точка $(z_1,z_2) = (0,0)$ является точкой покоя типа седла систем (4).

При сделанных предположениях нельзя гарантировать существование решения задачи (1)–(3). Кроме этого, даже если решение задачи существует, его явное представление, как правило, получить не удается. Поэтому для доказательства существования решения задачи (1)–(3) требуются дополнительные условия, которые будут сформулированы ниже.

3. Алгоритм решения задачи

Решение задачи (1)–(3) ищется в виде асимптотического ряда по параметру $\varepsilon \to 0$, состоящего из шести частей:

$$u(x,t,\varepsilon) = \bar{u} + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*). \tag{5}$$

Здесь $\bar{u}$– регулярная часть асимптотики, играющая роль внутри прямоугольника Ω, Π, Q и Q^*– погранслойные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника Ω соответственно $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$, P и P^*– угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника Ω соответственно $(0,0)$ и $(1,0)$.

Формальная процедура построения регулярной части асимптотики и погранслойных функций хорошо отработана (см. [13]) и мы приведем ее схематично. В уравнении (1) функция F заменяется выражением, аналогичным (6):

$$F(u,x,t,\varepsilon) = \bar{F} + (\Pi F + QF + Q^*F) + (PF + P^*F). \tag{6}$$

Выражения (5) и (6) подставляются в уравнение (1), которое разделяется на части: регулярную, погранслойные и угловые. Регулярная часть асимптотики $\bar{u}$ строится в виде ряда по степеням ε:

$$\bar{u}(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k\,\bar{u}_k(x,t).$$

Погранслойная часть асимптотики вводится для устранения невязок регулярной части с начальным и граничными условиями. Погранслойные функции Π, Q и Q^* ищутся в виде рядов

$$\Pi(x,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\Pi_k(x,\tau),\quad Q(\xi,t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kQ_k(\xi,t),\quad Q^*(\xi_*,t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kQ_k^*(\xi_*,t),$$

где

$$\xi=\frac{x}{\varepsilon},\quad \xi_*=\frac{1-x}{\varepsilon},\quad \tau=\frac{t}{\varepsilon^2}.$$

– растянутые переменные.

С целью устранения невязок с начальным и граничными условиями вблизи угловых точек $(0,0)$ и $(1,0)$ прямоугольника Ω вводятся угловые пограничные функции $P(\xi,\tau,\varepsilon)$ и $P^*(\xi_*,\tau,\varepsilon)$, нахождение которых доставляет основные трудности при решении поставленной задачи. Эти функции ищутся в виде рядов

$$P(\xi,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kP_k(\xi,\tau),\quad P^*(\xi_*,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kP_k^*(\xi_*,\tau).$$

Задача для определения $P_0(\xi,\tau)$ ставится в первой четверти $\mathbb{R}_+^2$ плоскости растянутых переменных (ξ,τ) и имеет вид

$$a^2\frac{\partial^2P_0}{\partial\xi^2}-\frac{\partial P_0}{\partial\tau}=F\left(\bar u_0+\Pi_0+Q_0+P_0\right)-F\left(\bar u_0+\Pi_0\right)-F\left(\bar u_0+Q_0\right),\tag{7}$$

$$P_0(0,\tau)=-\Pi_0(0,\tau),\quad P_0(\xi,0)=-Q_0(\xi,0),\tag{8}$$

$$P_0(\xi,\tau)\to0\quad\text{при}\quad \xi+\tau\to\infty,\tag{9}$$

где для краткости используются обозначения

$$F(u)=F(u,0,0,0),\quad \bar u_0=\bar u_0(0,0),\quad \Pi_k=\Pi_k(0,\tau),\quad Q_k=Q_k(\xi,0),\quad P_k=P_k(\xi,\tau).$$

Для функций $P_k(\xi,\tau),\ k\geqslant1$, в области $\mathbb{R}_+^2$ получаются линейные задачи

$$a^2\frac{\partial^2P_k}{\partial\xi^2}-\frac{\partial P_k}{\partial\tau}=F'\left(\bar u_0+\Pi_0+Q_0+P_0\right)P_k+h_k,\tag{10}$$

$$P_k(0,\tau)=-\Pi_k(0,\tau),\quad P_k(\xi,0)=-Q_k(\xi,0),\tag{11}$$

$$P_k(\xi,\tau)\to0\quad\text{при}\quad \xi+\tau\to\infty,\tag{12}$$

где неоднородности $h_k=h_k(\xi,\tau)$ удовлетворяют экспоненциальным оценкам вида

$$|h_k(\xi,\tau)|\leqslant C\exp(-\kappa(\xi+\tau)),\tag{13}$$

если подобным оценкам удовлетворяют функции $P_0,\dots,P_{k-1}$. Здесь C и κ – некоторые положительные числа.

Если число $\varphi(0,0)-\bar u_0(0,0)=0$, то решением задачи для $\Pi_0(x,\tau)$ при $x=0$ будет функция $\Pi_0(0,\tau)\equiv0$, решением задачи для $Q_0(\xi,t)$ при $t=0$ будет функция $Q_0(\xi,0)\equiv0$. Решением задачи (7)–(9) будет функция $P_0(\xi,\tau)\equiv0$, а коэффициент $F'\left(\bar u_0+\Pi_0+Q_0+P_0\right)$ в задачах (10)–(12) будет постоянным и положительным:

$$F'\left(\bar u_0+\Pi_0+Q_0+P_0\right)=F'(\bar u_0)>0.$$

В этом случае решения задач (10)–(12) выписываются в явном виде и для них получаются экспоненциальные оценки вида (13).

Если число $\varphi(0,0) - \bar{u}_0(0,0) \neq 0$, то, вообще говоря, не известно имеет или нет задача (7)–(9) решение и удовлетворяет ли решение в случае существования экспоненциальной оценке вида (13). Кроме этого, в задачах (10)–(12) коэффициент $F'\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0\right)$ может в зависимости от вида функции F и величины $\varphi(0,0)$ принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Даже в случае разрешимости задач (7)–(9) и (10)–(12) доказательство того, что задача (1)–(3) имеет решение, все равно остается проблемой. Это связано с тем, что, не зная явного вида функции $P_0(\xi,\tau)$, мы не можем знать явного вида коэффициента $F'\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0\right)$, который может оказаться как положительным, так и отрицательным. Это обстоятельство, вообще говоря, не позволяет обосновать построенную асимптотику решения.

Таким образом, в результате реализации метода угловых погранфункций для исследования задачи (1)–(3) мы перешли к задачам (7)–(9) и (10)–(12). Дальнейшие исследования предполагают разрешение, по крайней мере, трех основных проблем:

1) Имеет ли задача (7)–(9) решение, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида (13)?

2) Если задача (7)–(9) имеет решение, удовлетворяющее экспоненциальной оценке вида (13), то имеют ли задачи (10)–(12) решения, удовлетворяющие подобным оценкам?

3) Если задачи (7)–(9) и (10)–(12) разрешимы, т. е. если ряд (5) может быть построен, то имеет ли задача (1)–(3) решение, для которого этот ряд будет асимптотическим представлением при $\varepsilon \to 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$?

Задачи для угловых погранфункций $P_k^*(\xi_*,\tau)$, $k \geqslant 0$, ставятся аналогично.

В дальнейшем для определенности считается, что в каждой угловой точке граничное значение φ больше корня вырожденного уравнения $\bar{u}_0$. (Случай $\varphi < \bar{u}_0$ сводится к предыдущему с помощью замены u на $-u$.)

Для доказательства существования решения задачи (7)–(9) используется метод верхних и нижних решений (см. [14-16]), который заключается в том, что задача

$$L(Z) = 0 \quad \text{в области } D,$$

$$Z = h \quad \text{на границе } \partial D$$

имеет решение Z в границах

$$Z_- \leqslant Z \leqslant Z_+,$$

если в области D выполняются неравенства

$$L(Z_+) \leqslant 0, \quad L(Z_-) \geqslant 0, \quad Z_- \leqslant Z_+,$$

а на ее границе

$$Z_- \leqslant h \leqslant Z_+.$$

Для удобства введем обозначения

$$L(Z) := a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z\right) + F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0\right) + F\left(\bar{u}_0 + Q_0\right).$$

Тогда задача (7)–(9) примет вид

$$L(P_0) = 0 \quad \text{в области} \quad \mathbb{R}^2_+, \tag{14}$$

$$P_0(0,\tau) = -\Pi_0(0,\tau), \quad P_0(\xi,0) = -Q_0(\xi,0), \tag{15}$$

$$P_0(\xi,\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty. \tag{16}$$

4. Основные результаты

Будем предполагать, что в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω, где $k = 0$ или 1, функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k, 0).$$

В работе [9] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1–5 и в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω, где $k = 0$ или 1, функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \textit{где числа} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k, 0) > 0.$$

Если граничные значения $\varphi(k) > \bar{u}_0$, то для достаточно малых ε задача (1)–(3) имеет решение $u(x, t, \varepsilon)$, для которого ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Big(\bar{u}_k(x, t) + \Pi_k(x, \tau) + Q_k(\xi, t) + Q_k^*(\xi_*, t) + P_k(\xi, \tau) + P_k^*(\xi_*, \tau) \Big)$$

является асимптотическим представлением при $\varepsilon \to 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$.

Заметим, что в условиях теоремы 1 функция $F(u)$ на промежутке $u > \bar{u}_0$ возрастает и выпукла вниз.

Теперь рассмотрим случай, когда в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω, где $k = 0$ или 1, функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где числа} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k, 0) < 0.$$

В этом случае функция $F(u)$ при $u > \bar{u}_0$ сначала выпукла вверх, в точке $u = 0$ имеет перегиб и далее становится выпуклой вниз. В отличие от предыдущего, когда предполагалось, что $\bar{u}_0 > 0$, "старая"техника не работает. В работе [10] для верхнего решения удалось получить достаточно оптимальный результат, учитывающий влияние точки перегиба.

Теорема 2. *Пусть функция $F(u)$ имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \textit{где} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0.$$

Если граничное значение $\varphi = \varphi(0)$ находится в промежутке

$$\bar{u}_0 < \varphi \leq \frac{\bar{u}_0}{2} < 0, \tag{17}$$

то функция

$$Z_+(\xi, \tau) = -\frac{\Pi_0(0, \tau) Q_0(\xi, 0)}{\varphi - \bar{u}_0}$$

является верхним решением задачи (14)–(16).

Для нижнего решения был получен сравнительно слабый результат.

Теорема 3. *Пусть функция $F(u)$ имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \textit{где} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0.$$

Если граничное значение $\varphi = \varphi(0)$ находится в промежутке

$$\bar{u}_0 < \varphi \leq 0{,}88 \bar{u}_0 < 0,$$

то функция

$$Z_-(\xi,\tau) = -2\sqrt{\Pi_0(0,\tau)Q_0(\xi,0)}$$

является нижним решением задачи (14)–(16).

В результате последних исследований было построено нижнее решение в виде одной барьерной функции, которая учитывает влияние точки перегиба в той же мере, что и верхний барьер.

Теорема 4. *Пусть функция $F(u)$ имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0,0) < 0.$$

Если граничное значение $\varphi = \varphi(0)$ удовлетворяет условию (17):

$$\bar{u}_0 < \varphi \le \frac{\bar{u}_0}{2} < 0,$$

то функция

$$Z_-(\xi,\tau) = -C\,exp(-k(\xi+\tau)),$$

где C и k – некоторые положительные числа, является нижним решением задачи (14)–(16).

Доказательство. Сначала нужно доказать неравенство

$$L(Z_-) = (a^2k+1)kZ_- - F(\bar{u}_0+\Pi_0+Q_0+Z_-) + F(\bar{u}_0+\Pi_0) + F(\bar{u}_0+Q_0) \ge 0. \qquad (18)$$

Для рассматриваемой функции $F(u)$ имеем

$$F(\bar{u}_0+u) = u^3 + 3\bar{u}_0u^2 + 3\bar{u}_0^2u,$$

$$\begin{aligned} L(Z_-) = (a^2k+1)kZ_- - (\Pi_0+Q_0+Z_-)^3 - 3\bar{u}_0(\Pi_0+Q_0+Z_-)^2 - 3\bar{u}_0^2(\Pi_0+Q_0+Z_-) + \\ +\Pi_0^3 + 3\bar{u}_0\Pi_0^2 + 3\bar{u}_0^2\Pi_0 + Q_0^3 + 3\bar{u}_0Q_0^2 + 3\bar{u}_0^2Q_0 = \\ = (a^2k+1)kZ_- - \left((\Pi_0+Q_0+Z_-)^3 - \Pi_0^3 - Q_0^3\right) - \\ -3\bar{u}_0\left((\Pi_0+Q_0+Z_-)^2 - \Pi_0^2 - Q_0^2\right) - 3\bar{u}_0^2\left((\Pi_0+Q_0+Z_-) - \Pi_0 - Q_0\right) = \\ = (a^2k+1)kZ_- - \left(3\Pi_0^2Q_0 + 3\Pi_0Q_0^2 + 3(\Pi_0+Q_0)^2Z_- + 3(\Pi_0+Q_0)Z_-^2 + Z_-^3\right) - \\ -3\bar{u}_0\left((2\Pi_0Q_0 + 2(\Pi_0+Q_0)Z_- + Z_-^2\right) - 3\bar{u}_0^2Z_- = \\ = \left[a^2k^2 + k - 3\bar{u}_0^2 - 3(\Pi_0+Q_0)(\Pi_0+Q_0+2\bar{u}_0) - 3(\Pi_0+Q_0+\bar{u}_0)Z_- - Z_-^2\right]Z_- - \\ -3(\Pi_0+Q_0)(\Pi_0+Q_0+2\bar{u}_0). \end{aligned}$$

Так как $\Pi_0, Q_0 \in (0, \varphi-\bar{u}_0]$, то $\Pi_0+Q_0+2\bar{u}_0 \in (2\bar{u}_0, 2\varphi]$, где $\varphi < 0$. Поэтому

$$-3(\Pi_0+Q_0)(\Pi_0+Q_0+2\bar{u}_0) > 0.$$

Чтобы удовлетворить неравенству (18), в выражении для $L(Z_-)$ достаточно иметь

$$a^2k^2 + k - 3\bar{u}_0^2 - 3(\Pi_0+Q_0)(\Pi_0+Q_0+2\bar{u}_0) - 3(\Pi_0+Q_0+\bar{u}_0)Z_- - Z_-^2 < 0.$$

Здесь

$$\Pi_0+Q_0+\bar{u}_0 \in (\bar{u}_0, \bar{u}_0+2(\varphi-\bar{u}_0)] \quad \text{и} \quad \bar{u}_0+2(\varphi-\bar{u}_0) < 0$$

в силу условия (17). Поэтому

$$\Pi_0+Q_0+\bar{u}_0 < 0 \quad \text{и} \quad -3(\Pi_0+Q_0+\bar{u}_0)Z_- - Z_-^2 < 0,$$

однако последнее выражение стремится к нулю при $\xi+\tau \to \infty$.

Рассмотрим функцию

$$h(s) = -3s(s + 2\bar{u}_0), \quad \text{где} \quad s = \Pi_0 + Q_0 \in (0, 2(\varphi - \bar{u}_0)].$$

Парабола $h(s)$ имеет ветви, направленные вниз, пересекает ось абсцисс в точках 0 и $-2\bar{u}_0$, вершина находится в точке с координатами $(-\bar{u}_0, 3\bar{u}_0^2)$. Так как $\bar{u}_0 < \varphi \leq \frac{\bar{u}_0}{2} < 0$, то $0 < 2(\varphi - \bar{u}_0) < -\bar{u}_0$. Поэтому

$$h(2(\varphi - \bar{u}_0)) < h(-\bar{u}_0) = 3\bar{u}_0^2.$$

За счет выбора достаточно малого положительного числа k можно добиться отрицательности выражения

$$a^2k^2 + k - 3\bar{u}_0^2 - 3(\Pi_0 + Q_0)(\Pi_0 + Q_0 + 2\bar{u}_0) \leq a^2k^2 + k - 3\bar{u}_0^2 + h(2(\varphi - \bar{u}_0)) =$$

$$= a^2k^2 + k - 3\bar{u}_0^2 - 12(\varphi - \bar{u}_0))\varphi.$$

Для этого нужно взять k из промежутка

$$0 < k < \frac{-1 + \sqrt{1 + 12a^2(\bar{u}_0^2 + 4(\varphi - \bar{u}_0)\varphi)}}{2a^2}. \tag{19}$$

При таком условии $L(Z_-) > 0$ внутри области $\mathbb{R}_+^2$. Кроме этого для нижнего решения должны выполняться неравенства

$$Z_-(0, \tau) = -C\exp(-k\tau) \leq -\Pi_0(0, \tau), \tag{20}$$

$$Z_-(\xi, 0) = -C\exp(-k\xi) \leq -Q_0(\xi, 0), \tag{21}$$

$$Z_-(\xi, \tau) = -C\exp(-k(\xi + \tau)) \leq Z_+(\xi, \tau) = -\frac{\Pi_0(0, \tau)Q_0(\xi, 0)}{\varphi - \bar{u}_0}. \tag{22}$$

Воспользуемся оценками

$$0 < \Pi_0(0, \tau) \leq (\varphi - \bar{u}_0)\exp(-k_1\tau),$$

$$0 < Q_0(\xi, 0) \leq (\varphi - \bar{u}_0)\exp(-k_2\xi),$$

где $k_{1,2}$ – некоторые положительные числа. Для выполнения (20)–(22) достаточно взять

$$C \geq \varphi - \bar{u}_0, \quad 0 < k \leq min(k_1, k_2).$$

С учетом (19) получаем окончательные условия выбора C и k:

$$C \geq \varphi - \bar{u}_0, \quad 0 < k < min\left(k_1, k_2, \frac{-1 + \sqrt{1 + 12a^2(\bar{u}_0^2 + 4(\varphi - \bar{u}_0)\varphi)}}{2a^2}\right). \tag{23}$$

Это завершает доказательство теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть функция $F(u)$ имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \textit{где} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0.$$

Если граничное значение $\varphi = \varphi(0)$ удовлетворяет условию (17):

$$\bar{u}_0 < \varphi \leq \frac{\bar{u}_0}{2} < 0,$$

то задача (7)–(9) имеет решение $P_0(\xi,\tau)$, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида (13).

Доказательство. Барьерные функции для $P_0(\xi,\tau)$ имеют вид

$$-C\exp(-k(\xi+\tau)) \le P_0(\xi,\tau) \le -\frac{\Pi_0(0,\tau)Q_0(\xi,0)}{\varphi-\bar u_0}$$

и удовлетворяют оценкам вида (13). Значит, оценке того же вида удовлетворяет и $P_0(\xi,\tau)$. *Теорема доказана.*

Теорема 6. *Пусть функция $F(u)$ имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar u_0^3, \quad \text{где} \quad \bar u_0 = \bar u_0(0,0) < 0.$$

Если граничное значение $\varphi = \varphi(0)$ удовлетворяет условию (17):

$$\bar u_0 < \varphi \le \frac{\bar u_0}{2} < 0.$$

то задачи (10)–(12) имеют решения $P_k(\xi,\tau)$, удовлетворяющие экспоненциальным оценкам убывания вида (13).

Доказательство. Имеем соотношение

$$\Pi_0 + Q_0 - \frac{\Pi_0 Q_0}{\varphi-\bar u_0} = (\varphi-\bar u_0)\left(1-\left(1-\frac{\Pi_0}{\varphi-\bar u_0}\right)\left(1-\frac{Q_0}{\varphi-\bar u_0}\right)\right),$$

которое показывает, что величина

$$\bar u_0 + \Pi_0 + Q_0 - \frac{\Pi_0(0,\tau)Q_0(\xi,0)}{\varphi-\bar u_0} \in (\bar u_0;\varphi].$$

Поэтому

$$\bar u_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0 \le \bar u_0 + \Pi_0 + Q_0 - \frac{\Pi_0(0,\tau)Q_0(\xi,0)}{\varphi-\bar u_0} \le \varphi.$$

Для $u \le \varphi$ производная $F'(u) \ge F'(\varphi) > 0$, поэтому коэффициенты в задачах (10)–(12)

$$F'\left(\bar u_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0\right) \ge F'(\varphi) > 0,$$

что гарантирует разрешимость этих задач с экспоненциальной оценкой убывания. *Теорема доказана.*

Функции $P_k^*(\xi_*,\tau),\ k \geqslant 0$, определяются аналогично. Асимптотический ряд (5) оказывается полностью построенным при дополнительном условии (17).

Теорема 7. *Пусть выполнены условия 1–5 и в угловых точках $(k,0)$ прямоугольника Ω, где $k=0$ или 1, функция $F(u) = F(u,k,0,0)$ имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar u_0^3, \quad \text{где числа} \quad \bar u_0 = \bar u_0(k,0) < 0.$$

Если граничные значения $\varphi = \varphi(k)$ удовлетворяют условию (17):

$$\bar u_0 < \varphi \le \frac{\bar u_0}{2} < 0,$$

то для достаточно малых ε задача (1)–(3) имеет решение $u(x,t,\varepsilon)$, для которого ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Big(\bar u_k(x,t) + \Pi_k(x,\tau) + Q_k(\xi,t) + Q_k^*(\xi_*,t) + P_k(\xi,\tau) + P_k^*(\xi_*,\tau)\Big)$$

является асимптотическим представлением при $\varepsilon \to 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$.

Доказательство теоремы основано на разрешимости задач для пограничных функций Π_k, Q_k, Q_k^*, P_k и P_k^* при $k \geqslant 1$ и повторяет доказательство соответствующих теорем в [4–10].

Замечание. Функция F в различных угловых точках не обязательно должна иметь один и тот же вид. Все результаты работ [3–11] сохраняются, если в каждой угловой точке функция F имеет один из рассмотренных в этих работах вид.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутузов В.Ф. Асимптотика решения разностного уравнения с малыми шагами в прямоугольной области // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Т. 12. - № 3. 1972. - С. 582-597. (English transl.: Butuzov V.F. Asymptotic Properties of the Solution of a Finite-Difference Equation with Small Steps in a Rectangular Region // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1972. Vol. 12. № 3. pp. 14-34.)

2. Бутузов В.Ф., Нестеров А.В. Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 1978. № 2. - С. 49-56.

3. Денисов И.В. Об асимптотическом разложении решения сингулярно возмущенного эллиптического уравнения в прямоугольнике // Асимптотические методы теории сингулярно - возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач: Сб. научн. тр. - Бишкек: Илим, 1991. - С. 37.

4. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – Т.57. - № 2. 2017. - С. 255-274 (English transl.: Denisov I.V. Angular Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Quadratic Nonlinearity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. Vol. 57. № 2. pp. 253-271.)

5. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – Т.58. № 4. 2018. - С. 575-585. (English transl.: Denisov I.V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Monotonic Nonlinearity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. Vol. 58. № 4. pp. 562-571.)

6. Денисов И.В. О некоторых классах функций // Чебышевский сборник. Т. X. Вып. 2 (30). - Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2009. – С. 79-108.

7. Денисов А.И., Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – Т.59. № 1. 2019. - С. 102-117. (English transl.: Denisov I.V., Denisov A.I. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonlinearities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol. 59. № 1. pp. 96-111.)

8. Денисов А.И., Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – Т.59. № 9. 2019. - С. 1581-1590. (English transl.: Denisov I.V., Denisov A.I. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonmonotonic Nonlinearities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol. 59. № 9. pp. 1518–1527.)

9. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – Т.61. № 2. 2021. - С. 256-267. (English transl.: Denisov I.V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Cubic

Nonlinearities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61. № 2. pp. 242–253.)

10. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах с нелинейностями, имеющими стационарные точки // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – Т.61. № 11. 2021. - С. 1894-1903. (English transl.: Denisov I.V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems with Nonlinearities Having Stationary Points // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61. № 11. pp. 1855-1863.)

11. Денисов А.И., Денисов И.В. Математические модели процессов горения // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, 185, ВИНИТИ РАН, М., 2020. - С. 50–57.

12. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных. // Дифференц. уравнения. Т.31. № 4. 1995. - С. 719–723. (English transl.: Nefedov N.N. The Method of Differential Inequalities for Some Singularly Pertubed Partial Differential Equations // Differential Equations. 1995. Vol. 31. № 4. pp. 668–671.)

13. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1990.

14. Amann H. On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1971. Vol.21, № 2. P. 125 - 146.

15. Sattinger D.H. Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21. № 11. P. 979 - 1000.

16. Amann H. // Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe / Ed. by L. Cesari et al. - New York etc: Acad press, cop. 1978. – XIII. P. 1 - 29.

REFERENCES

1. Butuzov V.F., 1972, “Asymptotic Properties of the Solution of a Finite-Difference Equation with Small Steps in a Rectangular Region” // Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 12. № 3. pp. 14-34.

2. Butuzov V.F., Nesterov A.V., 1978, “On one singularly perturbed equation of parabolic type” // Bulletin of the Moscow University. Series 15: Computational Mathematics and Cybernetics. № . 2. S. 49-56.

3. Denisov I.V., 1991, “On the asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed elliptic equation in a rectangle” // Asymptotic methods of the theory of singularly perturbed equations and ill-posed problems: Collection of articles. scientific. tr. - Bishkek: Ilim. p. 37.

4. Denisov I.V., 2017, “Angular Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Quadratic Nonlinearity” // Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 57. No. 2. pp. 253-271.

5. Denisov I.V., 2018, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Monotonic Nonlinearity” // Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 58. No. 4. Pp. 562-571.

6. Denisov I.V., 2009, "On some classes of functions" // Chebyshevskii Sbornik. T. X. 2 (30). - Tula: Publishing house Tul. state ped. un-ta them. L.N. Tolstoy, pp. 79-108.

7. Denisov A.I., Denisov I.V., 2019, "Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonlinearities" // Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 59. No. 1. pp. 96-111.

8. Denisov A.I., Denisov I.V., 2019, "Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonmonotonic Nonlinearities" // Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 59. No. 9. Pp. 1518–1527.

9. Denisov I.V., 2021, "Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Cubic Nonlinearities" // Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 61. № 2. pp. 242–253.

10. Denisov I.V., 2021, "Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems with Nonlinearities Having Stationary Points" // Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 61. № 11. pp. 1855-1863.

11. Denisov A.I., Denisov I.V., 2020, "Mathematical models of combustion processes" // Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic reviews, 185, VINITI RAN, Moscow - P. 50–57.

12. Nefedov N.N., 1995, "The Method of Differential Inequalities for Some Singularly Pertubed Partial Differential Equations" // Differential Equations. . Vol. 31. № 4. pp. 668–671.

13. Vasilyeva A.B., Butuzov V.F., 1990, "Asymptotic methods in the theory of singular perturbations" - M.: Higher school.

14. Amann H., 1971, "On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems" // Indiana Univ. Math. J. Vol.21, № 2. P. 125 - 146.

15. Sattinger D.H., 1972, "Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems" // Indiana Univ. Math. J. V. 21. № 11. P. 979 - 1000.

16. Amann H., 1978, "Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe" / Ed. by L. Cesari et al. - New York etc: Acad press, cop. – XIII. P. 1 - 29.

Получено: 28.01.2023
Принято в печать: 24.04.2023