ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 512.534.32 + 512.577 + 512.567.5 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-15-26

Конгруэнции свободного унара[1]

К. В. Будиянская, И. Б. Кожухов

Будиянская Кристина Викторовна — ООО «Ист-Вест Технолоджис» (г. Москва).
e-mail: budianskayak@yandex.ru
Кожухов Игорь Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, НИУ «МИЭТ»; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Аннотация

Получено полное описание всех конгруэнций свободного унара с произвольным множеством свободных образующих. А именно, каждая конгруэнция однозначно определяется некоторым набором параметров, каждый из которых представляет собой целое неотрицательное число или символ ∞; сформулированы ограничения на эти параметры.

Ключевые слова: полигон над полугруппой, унар, конгруэнция.

Библиография: 7 названий.

Для цитирования:
К. В. Будиянская, И. Б. Кожухов. Конгруэнции свободного унара // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 15–26.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 512.534.32 + 512.577 + 512.567.5 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-15-26

Congruences of a free unar

C. V. Budianskaia, I. B. Kozhukhov

Budianskaia Cristina Viktorovna — "East-West Technologies" LTD (Moscow).
e-mail: budianskayak@yandex.ru
Kozhukhov Igor Borisovich — professor, doctor of physical and mathematical sciences, NRU "MIET"; Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

[1]Работа поддержана грантом РНФ № 22-11-00052

Abstract

We obtain a complete description of all congruences of a free unar with arbitrary set of free generators. Namely, every congruence is characterized uniquely by a collection of parameters which are either non-negative integers or the symbol ∞; the restrictions on the parameters are formulated.

Keywords: act over senigroup, unar, congruence.

Bibliography: 7 titles.

For citation:
C. V. Budianskaia, I. B. Kozhukhov, 2023, “Congruences of a free unar”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 15–26.

1. Введение

Полигоном над полугруппой S называется множество X, на котором действует полугруппа S, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$ такое, что $x(ss') = (xs)s'$ при всех $x \in X$, $s, s' \in S$ (см. [1]). Полигон является алгебраической моделью автомата, при этом X — множество состояний, а S — полугруппа входных сигналов (см. [2]). *Унар* X — алгебра с одной унарной операцией $f : X \to X$ будет рассматриваться здесь как полигон над бесконечной циклической полугруппой $S = \{a, a^2, a^3, ...\}$, где $xa = f(x)$ для всех $x \in X$. Унар можно рассматривать как автомат с однобуквенным входным алфавитом.

Конгруэнция универсальной алгебры – отношение эквивалентности, стабильное относительно операций этой алгебры. Конгруэнции алгебры A образуют полную решётку $\operatorname{Con} A$ с наименьшим элементом $\Delta_A = \{(a, a)|a \in A\}$ и наибольшим элементом $\nabla_A = A \times A$. Хорошо известно, что решётка $\operatorname{Con} A$ является полной подрешёткой решётки $\operatorname{Eq} A$ всех отношений эквивалентности на множестве A. Часто индекс A у Δ и ∇ мы будем опускать.

Для полугруппы относительно простого строения все полигоны над ней могут быть описаны, а в ряде случаев удаётся описать и конгруэнции полигонов над этой полугруппой. Так, в работе [3] были описаны все полигоны над вполне простой полугруппой $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ и полигоны с нулём над вполне 0-простой полугруппой $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, в работе [4] получено описание правых конгруэнций вполне 0-простой полугруппы. В работах [5,6] были описаны конгруэнции полигонов над группами и полугруппами правых/левых нулей. Оказывается, все конгруэнции свободного унара также могут быть описаны, что является целью данной работы.

2. Конгруэнции свободного циклического унара

Пусть $\{X_i|i \in I\}$ – семейство полигонов над одной полугруппой S, причём $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Тогда множество $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ очевидным образом превращается в полигон над полугруппой S – это *копроизведение* полигонов X_i. В этом случае мы пишем $X = \coprod_{i \in I} X_i$. В теории унаров эту конструкцию называют прямой суммой.

Пусть S – бесконечная циклическая полугруппа, тогда $S^1 = \{1, a, a^2, \ldots\}$ – свободный циклический моноид.

Свободный циклический унар можно представлять как расширенное множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ с действием $m\, a^j = m + j$ $(m, j \in \mathbb{N})$. Очевидно, имеет место изоморфизм моноидов $(S^1, \cdot) \cong (\mathbb{N}, +)$. Свободный унар с множеством свободных образующих $\{x_i|i \in I\}$ состоит из формальных выражений вида $x_i a^j$ $(i \in I)$, $j \in \mathbb{N})$, которые мы будем обозначать $[i, j]$. Очевидно, свободный унар с произвольным множеством свободных образующих является копроизведением свободных циклических унаров.

Конгруэнции свободного циклического унара были описаны в работе [7]. Приведём это описание, но вначале введём некоторые обозначения. НОД и НОК будут обозначать *наибольший общий делитель* и *наименьшее общее кратное* соответственно. Будем считать, что НОД$(\delta, 0) = \delta$ и НОК$(\delta, 0) = 0$ при $\delta \in \mathbb{N}$. На множестве $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ порядок элементов из $\mathbb{N}$ обычный и $n < \infty$ при $n \in \mathbb{N}$. Для $\kappa, \delta \in \mathbb{N}$ таких, что $\delta > 0$, положим

$$\rho(\kappa, \delta) = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x, y \geqslant \kappa \text{ и } x \equiv y \,(\mathrm{mod}\, \delta)\} \cup \{\Delta\}.$$

Кроме того, пусть $\rho(\infty, 0) = \Delta$.

Теорема 1. *[7, предложение 1]. Решётка конгруэнции свободного циклического унара* $\mathbb{N}$ *имеет вид* $\mathrm{Con}\,\mathbb{N} = \{\rho(\kappa, \delta) | \kappa \geqslant 0, \delta > 0\} \cup \{\rho(\infty, 0)\}$. *При этом*

$$\rho(\kappa, \delta) \wedge \rho(\kappa', \delta') = \rho(\max(\kappa, \kappa'), \textit{НОК}(\delta, \delta')),$$

$$\rho(\kappa, \delta) \vee \rho(\kappa', \delta') = \rho(\min(\kappa, \kappa'), \textit{НОД}(\delta, \delta')).$$

3. Конгруэнции свободного унара

Перейдём теперь к конгруэнциям свободного унара X с произвольным множеством свободных образующих. Согласно введённым ранее обозначениям $X = \{[i, n] \,|\, i \in I,\ n \in \mathbb{N}\}$, $[i, n] \cdot a^k = [i, n + k]$ и $X = \coprod_{i \in I} X_i$, где $X_i = \{[i, n] \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Всякая конгружнция $\rho \in \mathrm{Con}\,X$ определяет на X_i конгруэнцию $\rho_i = \rho \cap (X_i \times X_i)$ свободного циклического унара X_i. Из теоремы 1 следует, что $\rho_i = \rho(\kappa_i, \delta_i)$, то есть $\rho_i = \{([i, \kappa_i + m\delta_i + t], [i, \kappa_i + n\delta_i + t]) \,|\, m, n, t \geqslant 0\} \cup \Delta_{X_i}$ при некоторых $\kappa_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\delta_i \geqslant 0$, причём $\kappa_i \in \mathbb{N}$, если $\delta_i > 0$. Итак, на каждом X_i конгруэнция ρ "вырезает" конгруэнцию ρ_i вида $\rho(\kappa_i, \delta_i)$, но возможно также, что некоторые $[i, m]$ и $[j, n]$ при $i \neq j$ лежат в одном ρ-классе. Определим на множестве I следующее отношение:

$$\sigma = \{(i, j) \in I \times I \,|\, \exists m, n \in \mathbb{N},\ ([i, m], [j, n]) \in \rho\}.$$

Проверим, что σ – отношение эквивалентности на множестве I. Рефлексивность и симметричность отношения σ очевидны, проверим транзитивность. Пусть (i, j), $(j, k) \in \sigma$. Тогда $[i, m] \,\rho\, [j, n]$ и $[j, p] \,\rho\, [k, q]$ при некоторых $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Если $n = p$, то $[i, m] \,\rho\, [k, q]$ ввиду транзитивности отношения ρ, а значит, $(i, k) \in \sigma$. Пусть $n \neq p$. Без ограничения общности мы можем считать, что $p > n$. Тогда $p = n + r$ при некотором $r > 0$. Так как ρ – конгруэнция, то $[i, m]a^r \,\rho\, [j, n]a^r$, то есть $[i, m + r] \,\rho\, [j, n + r]$. Отсюда получаем: $[i, m + r] \,\rho\, [j, n + r] = [j, p] \,\rho\, [k, q]$. Следовательно, $[i, m + r] \,\rho\, [k, q]$, а значит, $(i, j) \in \sigma$. Таким образом, σ транзитивно. Следовательно, $\sigma \in \mathrm{Eq}\, I$.

Пусть σ осуществляет разбиение множества I на классы эквивалентности $K \in I/\sigma$. Тогда, полагая $X_K = \bigcup_{i \in K} X_i$ и $\rho_K = \rho \cap (X_K \times X_K)$, будем иметь

$$\rho = \bigcup_{K \in I/\sigma} \rho_K. \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть* $\rho \in \mathrm{Con}\, X$, $(i, j) \in \sigma$, $i \neq j$ *и* κ_i, δ_i, κ_j, δ_j, *— параметры, определяющие конгруэнции* $\rho_i = \rho \cap (X_i \times X_i)$ *и* $\rho_j = \rho \cap (X_j \times X_j)$, *т.е.* $\rho_i = \rho(\kappa_i, \delta_i)$, $\rho_j = \rho(\kappa_j, \delta_j)$. *Тогда* $\delta_i = \delta_j$.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда $\delta_i = 0$. Покажем, что тогда также $\delta_j = 0$. Пусть это не так, т.е. $\delta_j > 0$. Так как $(i, j) \in \sigma$, то $(x, y) \in \rho$ при некоторых $x \in X_i$, $y \in X_j$.

Имеем: $x = [i,m]$, $y = [j,n]$. Отсюда получаем: $[i,m]\,\rho\,[j,n]\,\rho\,[j,n+\delta_j]\,\rho\,[i,m+\delta_j]$. Это означает, что $[i,m]\,\rho\,[i,m+\delta_j]$, что противоречит равеству $\delta_i = 0$.

Далее будем считать, что $\delta_i, \delta_j > 0$. Так как $[i,m]\,\rho\,[j,n]\,\rho\,[j,n+\delta_j]\,\rho\,[i,m+\delta_j]$, то $\delta_j \vdots \delta_i$. Аналогично доказывается, что $\delta_i \vdots \delta_j$. Следовательно, $\delta_i = \delta_j$. □

Зафиксируем конгруэнцию $\rho \in \operatorname{Con} X$ и пусть $\rho \cap (X_i \times X_j) \neq \emptyset$ для некоторых $i \neq j$. Пусть

$$m = \min\{m' | \exists t\ [i,m']\,\rho\,[j,t]\},\ q = \min\{q' | [i,m]\,\rho\,[j,q'], \tag{2}$$

$$n = \min\{n' | \exists t\ [i,t]\,\rho\,[j,n']\},\ p = \min\{p' | [i,p']\,\rho\,[j,n]. \tag{3}$$

Будем говорить, что между X_i и X_j *связь I-го типа*, если $[i,m]\,\rho\,[j,n]$, и *II-го типа* в противном случае. Эти же слова будем применять и к элементам из I: если X_i и X_j имеют связь I-го (или II-го) типа, то будем говорить, что i и j имеют связь I-го (соотв., II-го) типа.

Так как на каждом X_i строение конгруэнции ρ известно (а именно, $\rho|_{X_i} = \rho(\kappa_i, \delta_i)$), то следует сосредоточиться на выяснении строения отношений $\rho \cap (X_i \times X_j)$ при $i \neq j$.

Начнём с наиболее простого случая: когда σ-класс K таков, что $\delta_i = 0$ при некотором $i \in K$ (а значит, по лемме 1 $\delta_i = 0$ при всех $i \in K$). В этом случае $\rho|_{X_i} = \Delta_{X_i}$ при $i \in K$, и остаётся определить отношения $\rho \cap (X_i \times X_j)$ при $i \neq j$.

Для $i, j \in K$ таких, что $i \neq j$, положим

$$\mu_{ij} = \min\{t | \exists u\ \ [i,t]\,\rho\,[j,u]\}. \tag{4}$$

Зафиксируем какой-либо элемент из K и обозначим его символом 0. Для каждогл $i \in K \setminus \{0\}$ положим

$$\mu_i = \mu_{0i},\ \nu_i = \mu_{i0}. \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть K – σ-класс, для которого $\delta_i = 0$ для какого-либо (а значит, и для всех) $i \in K$. Тогда $[i,\mu_{ij}]\,\rho\,[j,\mu_{ji}]$ при $i \neq j$ из K.*

Доказательство. Имеем: $[i,\mu_{ij}]\,\rho\,[j,q]$, $[j,\mu_{ji}]\,\rho\,[i,p]$ при некоторых $p, q \geqslant 0$.

Из определения (4) чисел μ_{ij}, μ_{ji} получаем: $p \geqslant \mu_{ij}$, $q \geqslant \mu_{ji}$. Имеем:

$$[i,\mu_{ij}]\,\rho\,[j,q] = [j,\mu_{ji} + (q-\mu_{ji})\,\rho\,[i,p+(q-\mu_{ji})].$$

Так как $\delta_i = 0$, то $\mu_{ij} = p+q-\mu_{ji}$. То есть $(p-\mu_{ij})+(q-\mu_{ji}) = 0$. Так как $p-\mu_{ij}, q-\mu_{ji} \geqslant 0$, то $p = \mu_{ij}$, $q = \mu_{ji}$. Следовательно, $[i,\mu_{ij}]\,\rho\,[j,\mu_{ji}]$ □

Заметим, что из определений (4), (5) и леммы 2 следует, что

$$[0,\mu_i]\,\rho\,[i,\nu_i]. \tag{6}$$

Лемма 3. *Пусть i, j – различные ненулевые элементы из K и $\delta_i = 0$. Тогда:*
(i) если $\mu_i > \mu_j$, то $\mu_{ij} = \nu_i$, $\mu_{ji} = \mu_i + \nu_j - \mu_j$;
(ii) если $\mu_i < \mu_j$, то $\mu_{ij} = \nu_i + \mu_j - \mu_i$, $\mu_{ji} = \nu_j$;
(iii) если $\mu_i = \mu_j$, то $\nu_i - \mu_{ij} = \nu_j - \mu_{ji} \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $\mu_i > \mu_j$. Тогда $\mu_i = \mu_j + \tau$ при некотором $\tau > 0$.

По лемме 2 $[0,\mu_i]\,\rho\,[i,\nu_i]$ и $[0,\mu_j]\,\rho\,[j,\mu_j]$. Покажем, что $\mu_{ij} = \nu_i + \tau$, $\mu_{ji} = \nu_j$. Имеем: $[i,\nu_i+\tau]\,\rho\,[0,\mu_i+\tau = [0,\mu_j]\,\rho\,[j,\nu_j]$. Ввиду минимальности μ_{ij} (см. формулы (4) имеем: $\mu_{ij} \leqslant \nu_i + \tau$ и $\mu_{ji} \leqslant \nu_j$. Пусть $\mu_{ij} < \nu_i + \tau$. Тогда $\mu_{ij} \geqslant \nu_i + (\tau - 1)$, а значит, $\nu_i + \tau - 1 = \mu_{ij} + \xi$ при некотором $\xi \geqslant 0$. Используя лемму 2, получим:

$$[i,\nu_i+\tau-1] = [i,\mu_{ij}+\xi]\,\rho\,[j,\mu_{ji}+\xi].$$

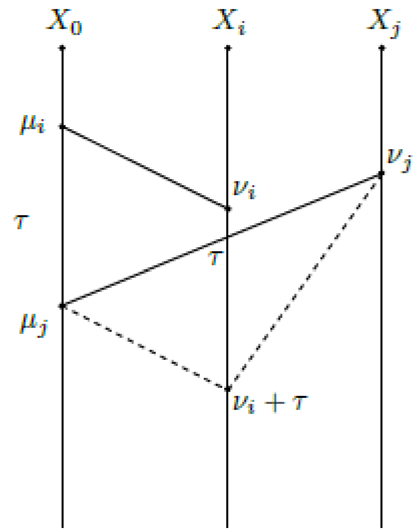

Рис. 1: Леммы 3,4

Отсюда $[i,\nu_i+\tau]\,\rho\,[j,\mu_{ji}+\xi+1]$. Но $[i,\nu_i+\tau]\,\rho\,[j,\nu_j]$. Так как $\delta_j=0$, то $\nu_j=\mu_{ji}+\xi+1$. Следовательно,

$$[0,\mu_i+\tau-1]\,\rho\,[i,\nu_i+\tau-1]\,\rho\,[j,\mu_{ji}+\xi]=[j,\nu_j-1],$$

а это противоречит минимальности ν_j. Таким образом, $\mu_{ij}=\nu_i+\tau=\nu_i+\mu_j-\mu_i$.

По лемме 2 $[i,\mu_{ij}]\,\rho\,[j,\mu_{ji}]$. Следовательно,

$$[j,\mu_{ji}]\,\rho\,[i,\mu_{ij}]=[i,\nu_i+\tau]\,\rho\,[0,\mu_i+\tau]=[0,\mu_j]\,\rho\,[j,\nu_j],$$

т.е. $[j,\mu_{ji}]\,\rho\,[j,\nu_j]$. Так как $\delta_j=0$, то $\mu_{ji}=\nu_j$, а значит, выполнено (i). Утверждение (ii) доказывается аналогично.

Пусть теперь $\mu_i=\mu_j$. Имеем: $[i,\nu_i]\,\rho\,[0,\mu_i]=[0,\mu_j]\,\rho\,[j,\nu_j]$. Отсюда ввиду минимальности μ_{ij} и μ_{ji} следует, что $\nu_i\geqslant\mu_{ij}$ и $\nu_j\geqslant\mu_{ji}$. Поэтому $\nu_i=\mu_{ij}+\tau$ при некотором $\tau\geqslant 0$. Далее получаем:

$$[j,\nu_j]\,\rho\,[i,\nu_i]=[i,\mu_{ij}+\tau]\,\rho\,[j,\mu_{ji}+\tau].$$

Так как $\delta_j=0$, то $\nu_j=\mu_{ji}+\tau$. Следовательно, $\nu_j-\mu_{ji}=\tau=\nu_i-\mu_{ij}$, что докахывает утверждение (iii). $\square$

Мы всё ещё предполагаем, что K – σ-класс, для которого $\delta_i=0$. Для ненулевых элементов $i\neq j$ из K таких, что $\mu_i=\mu_j$, положим $\varepsilon_{ij}=\nu_i-\mu_{ij}$. По лемме 3 $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}\geqslant 0$. Отметим ещё одно неравенство, которое является непосредственным следствием определения параметров $\varepsilon:$

$$\varepsilon_{ij}\leqslant\min\{\nu_i,\nu_j\}. \tag{7}$$

Следующая лемма описывает отношения $\rho\cap(X_i\times X_j)$ при известных значениях параметров μ,ν,ε.

Лемма 4. *Пусть K – σ-класс, для которого $\delta_i=0$. Тогда для $i,j\in K\setminus\{0\}$ и $s,t\in\mathbb{N}$*

$$[i,s]\,\rho\,[j,t]\Leftrightarrow\begin{cases}s-(\nu_i+\mu_j-\mu_i)=t-\nu_j\geqslant 0 \text{ при } \mu_i>\mu_j,\\ s-\nu_i=t-(\nu_j+\mu_i)-\mu_j\geqslant 0 \text{ при } \mu_i<\mu_j,\\ s-\nu_i=t-\nu_j\geqslant-\varepsilon_{ij} \text{ при } \mu_i=\mu_j.\end{cases} \tag{8}$$

Кроме того,

$$[0,s]\,\rho\,[i,t]\Leftrightarrow s-\mu_i=t-\nu_i\geqslant 0.$$

Доказательство. Очевидно, при $i \neq j$

$$[i,s]\,\rho\,[j,t] \Leftrightarrow s-\mu_{ij}=t-\mu_{ji}\geqslant 0.$$

Отсюда с учётом леммы 3 получается первая эквивалентность. Вторая эквивалентность следует из формул (5), (6). □

Следующая лемма отмечает важные свойства параметра ε.

Лемма 5. *Пусть i,j,k – различные элементы из $K\setminus\{0\}$ и $\mu_i=\mu_j=\mu_k$. Тогда*

$$|\{\varepsilon_{ij},\varepsilon_{jk},\varepsilon_{ik}\}|\leqslant 2 \tag{10}$$

и

$$\varepsilon_{ik}\geqslant \min\{\varepsilon_{ij},\varepsilon_{jk}\}. \tag{11}$$

Доказательство. Обозначим: $a=\varepsilon_{ij}$, $b=\varepsilon_{jk}$, $c=\varepsilon_{ik}$. Докажем вначале неравенство (11). Предположим, что оно не выполняется. Тогда $c<\min\{a,b\}$. Отсюда $a,b\geqslant c+1$. Так как $c+1\leqslant a$, то по лемме 4 $[i,\nu_i-c-1]\,\rho\,[j,\nu_j-c-1]$ и $[j,\nu_j-c-1]\,\rho\,[k,\nu_k-c-1]$. Ввиду транзитивности отношения ρ получаем: $[i,\nu_i-c-1]\,\rho\,[k,\nu_k-c-1]$. Отсюда снова по лемме 4 $(\nu_i-c-1)-\nu_i=(\nu_k-c-1)-\nu_k\geqslant -c$, что является противоречием.

Таким образом, неравенство (11) доказано. Неравенство (10) состоит в том, что числа a,b,c не могут быть различными. Оно следует из (11), так как, если a,b,c различны и, скажем, $a<b<c$, то это будет противоречить уже доказанному неравенству $a\geqslant\min\{b,c\}$. □

Лемму 5 можно образно переформулировать следующим образом: "треугольники" со "сторонами" a,b,c все равнобедренные, причём "основание" не меньше " боковой стороны". При этом неравенство треугольника может не выполняться.

Нам удобно будет множество I рассматривать как граф, вершины которого i,j соединены ребром в том и только том случае, если между i и j имеется связь, т.е. $(i,j)\in\sigma$. При этом каждый σ-класс будет являться полным подграфом этого графа и в то же время компонентой связности.

Пусть K – σ-класс, для которого $\delta_i=0$ при $i\in K$. Напишем на каждом ребре (i,j) число ε_{ij}. Эти числа должны удовлетворять неравенствам (10),(11). Пример правильного распределения надписей на рёбрах показан на рисунке 2. Правда, на этом рисунке не указаны значения ν_i, поэтому мы не можем гарантировать выполнение неравенства (7).

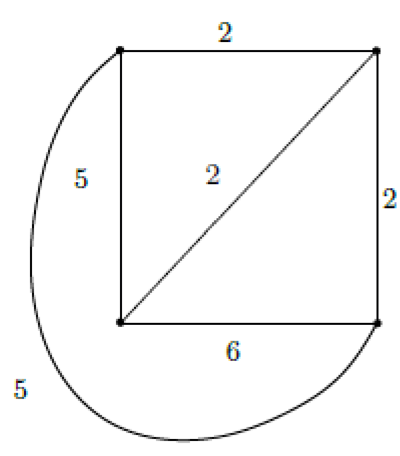

Рис. 2: Параметры ε

Лемма 6. *Если между i и j имеет место связь I-го типа и $\delta_i > 0$, то $m \leqslant \kappa_i$, $n \leqslant \kappa_j$, $\kappa_i - m = \kappa_j - n$ и для любых s, t*

$$[i,s]\,\rho\,[j,t] \Leftrightarrow \begin{cases} \text{либо } s \geqslant \kappa_i,\ t \geqslant \kappa_j \text{ и } s - t \equiv m - n \pmod{\delta}, \\ \text{либо } s \geqslant m,\ t \geqslant n \text{ и } s - t = m - n. \end{cases} \tag{12}$$

(Здесь $\delta = \delta_i = \delta_j$ – см. лемму 1).

Доказательство. Предположим, что $m > \kappa_i$. Тогда найдётся такое $t \geqslant 0$, что $\kappa_i + t\delta \geqslant m$. Следовательно, $\kappa_i + t\delta = m + u$ при некотором $u \geqslant 0$. Теперь получаем:

$$[i,\kappa_i]\,\rho\,[i,\kappa_i + t\delta] = [i, m+u]\,\rho\,[j, n+u],$$

что противоречит минимальности числа m. Итак, $m \leqslant \kappa_i$. Аналогично доказывается, что $n \leqslant \kappa_j$.

Равенство $\kappa_i - m = \kappa_j - n$ докажем методом “ от противного”. Пусть, например, $\kappa_i - m > \kappa_j - n$. Так как $[i,m]\,\rho\,[j,n]$, то

$$[i, m + \kappa_j - n]\,\rho\,[j, n + \kappa_j - n] = [j, \kappa_j]\,\rho\,[j, \kappa_j + \delta]\,\rho\,[i, m + \kappa_j - n + \delta].$$

Так как $m + \kappa_j - n < \kappa_i$, то мы получаем противоречие с определением числа κ_i. Тем самым равенство $\kappa_i - m = \kappa_j - n$ можно считать доказанным. Осталось доказать эквивалентность (12).

($\Rightarrow$). Пусть $[i,s]\,\rho\,[j,t]$. По определению параметров m и n имеем: $s \geqslant m$, $t \geqslant n$. Если $s \geqslant \kappa_i$, то

$$[j,t]\,\rho\,[i,s]\,\rho\,[i,s+\delta]\,\rho\,[j,t+\delta],$$

поэтому $t \geqslant \kappa_j$. Ввиду симметрии имеем:

$$s \geqslant \kappa_i \Leftrightarrow t \geqslant \kappa_j. \tag{13}$$

Далее получаем:

$$[j,t]\,\rho\,[i,s]\,\rho\,[i, m + (s-m)]\,\rho\,[j, n + (s-m)],$$

откуда $t \equiv n + s - m \pmod{\delta}$, а значит, $s - t \equiv m - n \pmod{\delta}$.

Рассмотрим вначале случай, когда $s < \kappa_i$ (тем не менее, по ранее доказанному $s \geqslant m$). Ввиду (13) $t < \kappa_j$. Предположим, что $s - m \neq t - n$, и приведём это предположение к противоречию. Имеем:

$$[j,t]\,\rho\,[i,s] = [i, m + (s-m)]\,\rho\,[j, n + (s-m)].$$

Так как $t \neq n + s - m$, то $t \geqslant \kappa_j$, что противоречит ранее установленному.

($\Leftarrow$). Проверим вначале, что $[i,\kappa_i]\,\rho\,[j,\kappa_j]$. Действительно,

$$[i,\kappa_i] = [i, m + (\kappa_i - m)]\,\rho\,[j, n + (\kappa_i - m)] = [j, n + (\kappa_j - n)] = [j, \kappa_j].$$

Пусть $s \geqslant \kappa_i$, $t \geqslant \kappa_j$ и $s - t \equiv m - n \pmod{\delta}$. Так как $\kappa_i - \kappa_j = m - n$, то $s - \kappa_i \equiv t - \kappa_j \pmod{\delta}$. Без ограничения общности можно считать, что $s - \kappa_i \geqslant t - \kappa_j$. Тогда $s - \kappa_i = t - t_j + r\delta$ при некотором $r \geqslant 0$. Отсюда получаем:

$$[i,s]\,\rho\,[i, \kappa_i + (s - \kappa_i)]\,\rho\,[j, \kappa_j + (s - \kappa_i)] = [j, t + r\delta]\,\rho\,[j,t].$$

Пусть $s \geqslant m$, $t \geqslant n$ и $s - t = m - n$. Тогда

$$[i,s]\,\rho\,[i, m + (t-n)]\,\rho\,[j, n + (t-n)] = [j,t].$$

Лемма доказана. □

Перейдём теперь к рассмотрению связей II-го типа. Параметры m, n, p, q определены формулами (2) и (3). Для связей II-го типа обязательно $\delta_i > 0$, $([i,m],[j,n]) \notin \rho$, $p > m$ и $q > n$.

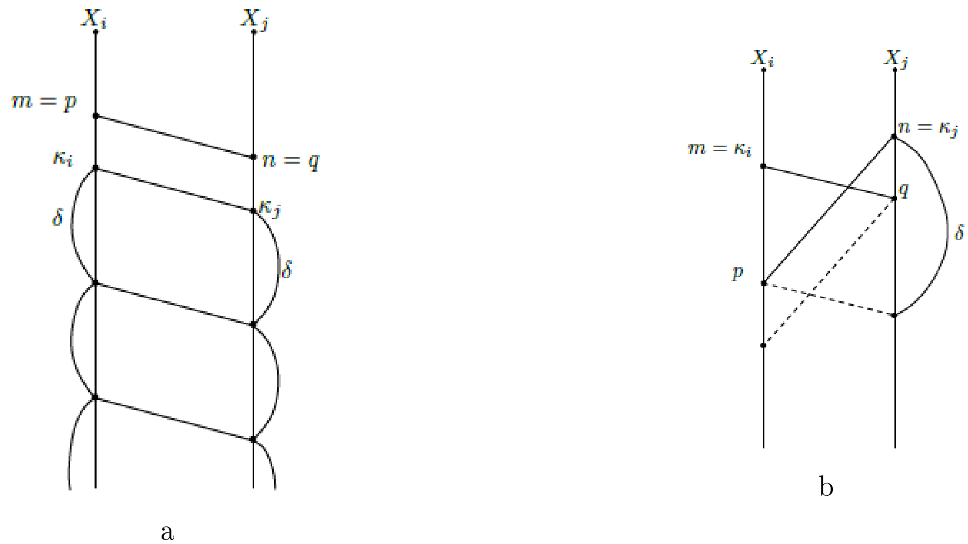

Рис. 3: Типы связи: (a) связь I–го типа; (b) связь II–го типа

Лемма 7. *Если между X_i и X_j имеет место связь II-го типа, то $m = \kappa_i$ и $n = \kappa_j$.*

Доказательство. Так как $p > m$ и $q > n$, то $p + q > m + n$. Далее, так как $[i, m]\,\rho\,[j, q]$, то $[i, m + (p - m)]\,\rho\,[j, q + (p - m)]$. То есть $[i, p]\,\rho\,[j, p + q - m]$. Но $[i, p]\,\rho\,[j, m]$, поэтому $[j, p + q - m]\,\rho\,[j, n]$. Так как $p + q - m > n$, то $n \geqslant \kappa_j$ и $\delta_j > 0$. Аналогично доказывается, что $m \geqslant \kappa_i$. По лемме 1 $\delta_i = \delta_j$. Положим $\delta = \delta_i = \delta_j$.

Докажем невозможность строгих неравенств $m > \kappa_i$, $n > \kappa_j$. Предположим, что $m > \kappa_i$, и приведём это предположение к противоречию. Найдём такое $r > 0$, что $\kappa_i + r\delta \geqslant m$. Затем найдём $t \geqslant 0$, для которого $\kappa_i + r\delta = m + t$. Имеем: $[i, \kappa_i]\,\rho\,[i, \kappa_i + r\delta] = [i, m + t]\,\rho\,[j, q + t]$, при этом $\kappa_i < m$, а это противоречит минимальности числа m. Таким образом, $m = \kappa_i$. Аналогично доказывается, что $n = \kappa_j$. □

Лемма 8. *В условиях леммы 7 $(p + q) - (m + n) = \delta$, где $\delta = \delta_i = \delta_j$.*

Доказательство. Так как $p > m$ и $q > n$, то $p + q > m + n$. Имеем:

$$[j, n]\,\rho\,[i, p] = [i, m]a^{p-m}\,\rho\,\rho\,[j, q]a^{p-m} = [j, q + p - m].$$

Так как $q + p - m > n$, то $\delta > 0$ и $(p + q) - (m + n) = r\delta$ при некотором $r > 0$.

Докажем, что $p - m, q - n < \delta$. Понятно, что достаточно доказать первое неравенство. Предположим, что $p - m \geqslant \delta$. Тогда $p - \delta \geqslant m$. По лемме 7 $m = \kappa_i$, поэтому $[i, p - \delta]\,\rho\,[i, p]$. Отсюда получаем, что $[i, p - \delta]\,\rho\,[j, n]$, а это противоречит минимальности числа p.

Итак, $p - m, q - n < \delta$. Отсюда $(p + q) - (m + n) < 2\delta$. Но $(p + q) - (m + n) = r\delta$. Следовательно, $r = 1$, а значит, $(p + q) - (m + n) = \delta$. □

Следующая лемма описывает отношение $\rho \cap (X_i \times X_j)$ в случае наличия между i и j связи II-го типа.

Лемма 9. *Пусть $\rho \in \mathrm{Con}\,X$ осуществляет между X_i и X_j $(i \neq j)$ связь II-го типа, параметры m, n, p, q определяются формулами (2) и (3). Тогда $m = \kappa_i$, $n = \kappa_j$, $\delta_i = \delta_j > 0$ (положим $\delta = \delta_i = \delta_j$), $\delta = (p + q) - (m + n)$ и для любых s, t*

$$[i, s]\,\rho\,[j, t] \Leftrightarrow s \geqslant m,\ t \geqslant n \text{ и } t - s \equiv q - m \pmod{\delta}. \qquad (14)$$

Доказательство. Равенства $m = \varkappa_i$, $n = \varkappa_j$, $\delta_i = \delta_j$ следуют из лемм 7 и 1, неравенство $\delta > 0$ – из того, что связь II-го типа, а равенство $\delta = p + q - m - n$ – из леммы 8. Осталось доказать эквивалентность (14).

($\Rightarrow$). Пусть $[i, s]\,\rho\,[j, t]$. Из соотношений (2), (3) следует, что $s \geqslant m$, $t \geqslant n$. Имеем: $[i, s] = [i, m + (s - m)]\,\rho\,[j, q + (s - m)]$. Следовательно, $[j, t]\,\rho\,[j, q + s - m]$. Отсюда получаем, что $t \equiv q + s - m \pmod{\delta}$.

($\Leftarrow$). Пусть $s \geqslant m$, $t \geqslant n$ и $t - s \equiv q - m \pmod{\delta}$. Имеем: $t = s + q - m + r\delta$ при некотором $r \in \mathbb{Z}$.

Предположим вначале, что $r \geqslant 0$. Тогда будем иметь:

$$[j, t] = [j, s + q - m + r\delta]\,\rho\,[i, s + m - m + r\delta]\,\rho\,[i, s].$$

Пусть теперь $r < 0$. Тогда $-r > 0$, и мы получаем:

$$[j, t] = [j, s + q - m + r\delta]\,\rho\,[j, s + q - m + r\delta + (-r)\delta] = [j, q + (s - m)]\,\rho\,[i, m + (s - m)] = [i, s].$$

□

Лемма 10. *Пусть i, j, k – различные элементы из I. Если между i и j, а также между j и k связь I–го типа, то между i и k также связь I–го типа.*

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Если $\delta_i = 0$, то по лемме 1 также $\delta_j = \delta_k = 0$, поэтому связь между i и k может быть только I-го типа. Пусть теперь $\delta_i > 0$. Тогда по лемме 6 $[i, \varkappa_i]\,\rho\,[j, \varkappa_j]$ и $[j, \varkappa_j]\,\rho\,[k, \varkappa_k]$. Ввиду транзитивности отношения ρ получаем, что $[i, \varkappa_i]\,\rho\,[k, \varkappa_k]$, а значит, между i и k связь I-го типа. □

Для дальнейшего исследования конгруэнций свободного унара $X = \coprod_{i \in I} X_i$, нам надо найти ограничения на параметры $\varkappa_i, \delta_i, m, n, p, q$. Из лемм 6 и 7 следует, что в случае наличия между X_i и X_j связи I-го типа $[i, \varkappa_i]\,\rho\,[j, \varkappa_j]$, а для связи II-го типа с $\delta_i > 0$ имеет место соотношение $([i, \varkappa_i], [j, \varkappa_j]) \notin \rho$. Далее, для связи I-го типа при $\delta_i > 0$ введём ещё некоторые параметры, аналогичные введённым ранее в случае $\delta_i = 0$. А именно, положим $\mu_{ij} = m$, $\mu_{ji} = n$, $\varepsilon_{ij} = \varkappa_i - m = \varkappa_j - n$ (последнее равенство имеет место ввиду леммы 6). Очевидно, параметр ε симметричный, т.е. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Кроме того,

$$\varepsilon_{ij} \leqslant \min\{\varkappa_i, \varkappa_j\}. \tag{15}$$

Следующая лемма аналогична лемме 5, доказанной ранее в случае $\delta > 0$.

Лемма 11. *Пусть i, j, k – различные элементы из I и пусть связи между i, j, k I-го типа. Положим $a = \varepsilon_{ij}$, $b = \varepsilon_{jk}$, $c = \varepsilon_{ik}$. Тогда среди чисел a, b, c найдутся два одинаковых, а третье будет не меньше этих двух.*

Доказательство. Пусть $a \leqslant b$. Имеем: $[i, \varkappa_i - a]\,\rho\,[j, \varkappa_j - a]$ и $[j, \varkappa_j - b]\,\rho\,[k, \varkappa_k - b]$. Так как $a \leqslant b$, то $[i, \varkappa_j - a]\,\rho\,[j, \varkappa_j - a] = [j, \varkappa_j - b + (b - a)]\,\rho\,[k, \varkappa_k - b + (b - a)] = [k, \varkappa_k - a]$, поэтому $c \geqslant a$. Таким образом, доказано, что $c \geqslant \min\{a, b\}$, т.е. неравенство (11). Неравенство (10) следует из (11), как было показано при доказательствн леммы 5. □

Для связей II-го типа утверждение, аналогичное лемме 10, неверно. А именно, если i и j, а также j и k имеют связь II-го типа, то i и k могут иметь связь как I-го, так и II-го типа. Действительно, пусть

$$p = \min\{t | [j, \varkappa_j]\,\rho\,[i, t]\},\ \ q = \min\{t | [i, \varkappa_i]\,\rho\,[j, t],$$

$$u = \min\{t | [k, \varkappa_k]\,\rho\,[j, t]\},\ \ v = \min\{t | [j, \varkappa_j]\,\rho\,[k, t].$$

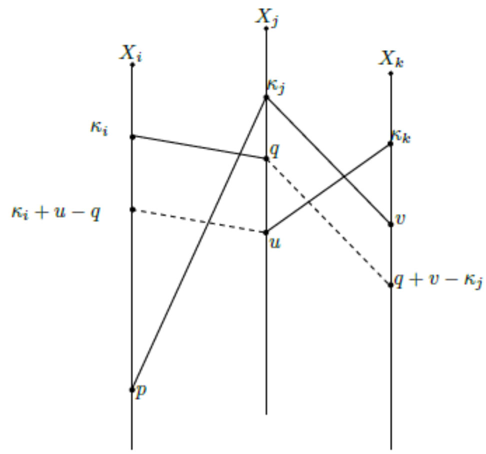

Рис. 4: Две связи II–го типа

По лемме 1 $\delta_i = \delta_j = \delta_k$, а значит, учитывая лемму 8, будет иметь место равенство $p + q - \kappa_i - \kappa_j = u + v - \kappa_j - \kappa_k$. Если $q = u$, то $[i, \kappa_i]\,\rho\,[j, q]\,\rho\,[k, \kappa_k]$, а это означает, что между i и k связь I-го типа. В случае $q \neq u$ между i и k связь II-го типа.

Пусть K – какой-либо σ-класс и $i \in K$. Положим

$$K(i) = \{j \in I|\ \text{между } i \text{ и } j \text{ связь I-го типа}\}. \tag{16}$$

Условимся считать, что если i таково, что связи между i и любым $j \in K \setminus \{i\}$ лишь II-го типа, то $K(i) = \{i\}$. Тогда K будет являться объединением попарно не пересекающихся множеств $K(i)$:

$$K = \cup\{K(i_\gamma)|\gamma \in \Gamma\}. \tag{17}$$

Следующая лемма позволяет утверждать, что если между i и j связь II-го типа, а между j и k I-го, то отношения $\rho \cap (X_i \times X_j)$ и $\rho \cap (X_j \times X_k)$ однозначно определяют отношение $\rho \cap (X_i \times X_k)$.

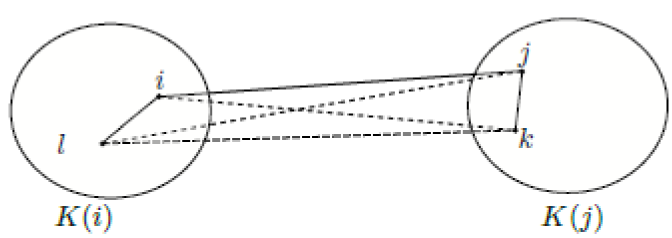

Рис. 5: Однозначность $\rho \cap (X_l \times X_k)$

Лемма 12. *Если между X_i и X_j связь II-го типа, а между X_j и X_k I-го, то между X_i и X_j связь II-го типа. Пусть $\mu_i = \min\{t|[i,t]\,\rho\,[j,\kappa_j]\}$, $\mu_j = \min\{t|[j,t]\,\rho\,[i,\kappa_i]\}$, $\mu_k = \mu_j + \kappa_k - \kappa_j$. Тогда*

$$\rho \cap ((X_i \times X_k) = \{([i,s],[i,t])|s \geqslant \kappa_i,\ t \geqslant \kappa_k \ \text{и}\ s - \kappa_i \equiv t - \mu_k \,(\mathrm{mod}\,\delta\}. \tag{18}$$

Доказательство. Напомним, что по лемме 1 $\delta_i = \delta_j = \delta_k$. Положим $\delta = \delta_i$. Так как имеется связь II-го типа, то $\delta > 0$. Тот факт, что между X_i и X_j связь II-го типа, следует из леммы 10. Пусть $[i,s]\,\rho\,[k,t]$. Так как между X_i и X_k связь II-го типа, то $s \geqslant \kappa_i$, $t \geqslant \kappa_k$. Далее получаем:

$$[k,t]\,\rho\,[i,s] = [i, \kappa_i + (s - \kappa_i)]\,\rho\,[j, \mu_j + s(-\kappa_i)]\,\rho\,[k, \mu_k + s - \kappa_i].$$

Следовательно, $\mu_k + s - \kappa_i \equiv t \pmod{\delta}$. Таким образом, $s - \kappa_i \equiv t - \mu_k \pmod{\delta}$.

Пусть теперь $s \geqslant \kappa_i$, $t \geqslant \kappa_k$ таковы, что $s - \kappa_i \equiv t - \mu_k \pmod{\delta}$. Тогда $s - \kappa_i = t - \mu_k + r\delta$ при некотором $r \in \mathbb{Z}$.

Если $r \geqslant 0$, то

$$[i,s] = [i, \kappa_i + (s-\kappa_i)]\,\rho\,[j, \mu_j + s - \kappa_i]\,\rho\,[k, \mu_k + s - \kappa_i] = [k, \mu_k + (t - \mu_k + r\delta)] = [k, t + r\delta]\,\rho\,[k,t].$$

Если $r < 0$, то $t = (s - \kappa_i) + \mu_k + (-r)\delta$, и мы получим: $t \geqslant \mu_k$, а значит,

$$[k,t] = [k, \mu_k + (s-\kappa_i) + (-r)\delta]\,\rho\,[k, \mu_k + s - \kappa_i]\,\rho\,[j, \mu_j + s(-\kappa_i)]\,\rho\,[i, \kappa_i + s - \kappa_i] = [i,s].$$

□

Теперь мы можем сформулировать основную теорему о строении произвольной конгруэнции свободного унара. В теореме описан процесс построения произвольной конгруэнции свободного унара. Этот процесс зависит от набора целых неотрицательных параметров, выбираемых в пределах определённых ограничений произвольным образом.

Теорема 2. *Всякая конгруэнция ρ свободного унара $X = \coprod_{i\in I} X_i$, где $X_i = [i, \mathbb{N}]$, может быть получена следующим образом:*

1. *выбираем произвольное отношение эквивалентности σ на множестве индексов I;*
2. *для каждого σ-класса K берём любое число $\delta \in \mathbb{N}$ и полагаем $\delta_i = \delta$ для всех $i \in K$;*
3. *пусть K – σ-класс, в котором $\delta = 0$; тогда:*
   - *полагаем $[i,s]\,\rho\,[i,t] \Leftrightarrow s = t$;*
   - *выбираем произвольным образом элемент из K – пусть он обозначен символом 0;*
   - *выбираем произвольным образом $\mu_i, \nu_i \in K \setminus \{0\}$;*
   - *для различных элементов $i, j \in K \setminus \{0\}$ выбираем любые элементы ε_{ij}, удовлетворяющим условиям (7) и (11);*
   - *ρ-эквивалентность элементов $[0,s]$ и $[i,t]$ для $i \in K \setminus \{0\}$ определяется по формуле (9);*
   - *ρ-эквивалентность элементов $[i,s]$ и $[j,t]$ при $i, j \in K \setminus \{0\}$, $i \neq j$ определяется по формуле (8);*
4. *пусть K – σ-класс, в котором $\delta > 0$; тогда:*
   - *выбираем произвольным образом $\kappa_i \in \mathbb{N}$ для каждого $i \in K$;*
   - *для $i \in K$ и $s, t \in \mathbb{N}$ полагаем $[i,s]\,\rho\,[i,t] \Leftrightarrow (s,t) \in \rho(\kappa_i, \delta_i)$;*
   - *разбиваем K на непересекающиеся подмножества $K(i_\gamma)$ – см. формулу (17) (внутри одного $K(i_\gamma)$ будут связи I-го типа, а между разными $K(i_\gamma)$ – II-го;*
   - *для каждой пары различных элементов $i, j \in K(i_\gamma)$ выбираем числа $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие неравенствам (15) и (11);*
   - *для каждой пары различных элементов $i, j \in K(i_\gamma)$ ρ-эквивалентность элементов $[i,s]$ и $[j,t]$ определяются по формуле (12) с $m = \kappa_i - \varepsilon_{ij}$, $n = \kappa_j - \varepsilon_{ij}$; если $\delta_i = 1$, то ввиду лемм 7 и 8 между i и j связь II-го типа невозможна, поэтому $K = K(i_\gamma)$, а конгруэнция ρ_K уже построена в п. 4.2) и 4.5);*
   - *строим $\rho \cap (X_{i_\xi} \times X_{i_\eta})$ для представителей классов $K(i_\gamma)$:*

- *после того, как в п. 4.6) построено $\rho \cap (X_{i_\xi} \times X_{i_\eta})$, по формуле (18) строим $\rho \cap (X_{i_\xi} \times X_j)$ для $j \in K(i_\eta)$, а затем $\rho \cap (X_i \times X_j)$ для $i \in K(i_\xi)$ по формуле, аналогичной формуле (18);*

5. *после того, как в п. 1)-4) будут построены отношения ρ_K, конгруэнция ρ будет получаться по формуле (1).*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V. Monoids, acts and categories. N.Y. – Berlin W. de Gruyter, 2000, xvii + 529 pp.
2. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М., Высш. школа, 1994, 191 с.
3. Avdeyev A. Yu., Kozhukhov I. B., 2000, “Acts over completely 0-simple semigroups” // Acta Cybernetica, Vol. 14, iss. 4, pp. 523 – 531.
4. Ohemke R. H., 1974, “Congruences and semisiplicity for Rees matrix semigroups” // Pacif. J. Math., Vol. 54, iss. 2, pp. 143 – 164.
5. Халиуллина А. Р., 2013, “Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей” // Чебышевский сборник, Том 14, Выпуск 3, с. 142 – 146.
6. Халиуллина А. Р., 2013, “Конгруэнции полигонов над группами” // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, Том 13, Выпуск 4(2), с. 133 – 137.
7. Егорова Д. П., 1978, “Структура конгруэнций унарной алгебры” // Межвуз. научн. сборник “Упорядоченные множества и решётки”, Выпуск 5, с. 11 – 44.

REFERENCES

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V., 2000, Monoids, acts and categories. N.Y. – Berlin W. de Gruyter, xvii + 529 pp.
2. Plotkin B.,I., Gringlaz L.,Ya., Gvaramiya A.,A., 1994, Elements of the algebraic theory of automata. M., Higher School, 191 pp.
3. Avdeyev A. Yu., Kozhukhov I. B., 2000, “Acts over completely 0-simple semigroups” // Acta Cybernetica, Vol. 14, Iss. 4, pp. 523 – 531.
4. Ohemke R. H., 1974, “Congruences and semisiplicity for Rees matrix semigroups” // Pacif. J. Math., Vol. 54, Iss. 2, pp. 143 – 164.
5. Khaliullina A.,R., 2013, ‘Congruences of polygons over semigroups of right zeros"// Chebyshevskii Sbornik, Vol. 14, Iss. 3, pp. 142–146.
6. Khaliullina A.,R., 2013, “Congruences of polygons over groups” // Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer Science, Vol. 13, Iss. 4(2), pp. 133 – 137.
7. Egorova D. P., 1978, “The structure of congruences of unary algebra” // Inter-university. scientific. collection “Ordered Sets and lattices”, Iss. 5, pp. 11 – 44.

Получено: 07.02.2023
Принято в печать: 24.04.2023