ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 1.

УДК 519.716 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-5-14

Замкнутые классы в функциональной системе полиномов с действительными коэффициентами[1]

Н. Ф. Алексиадис

Алексиадис Никос Филиппович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).
e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Аннотация

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики, поскольку они являются математическими моделями реальных и абстрактных управляющих систем.

Проблематика функциональных систем обширна. Одной из основных задач является проблема полноты, состоящая в описании таких подсистем функций, которые являются полными, т.е. из этих функций с помощью заданных операций над ними можно получить все функции.

Мы рассматриваем функциональную систему полиномиальных функций с действительными коэффициентами, где в качестве операций выступают операции суперпозиции, и для этой системы исследуем задачу о замкнутых классах (структура, базис, число конечных и бесконечных замкнутых классов). Это обусловлено тем, что проблема полноты решается с помощью (максимальных) замкнутых классов.

В настоящей статье для функциональной системы полиномиальных функций с действительными коэффициентами:

1. описаны в явном виде все конечные замкнутые классы;
2. найдено число всех конечных замкнутых классов, всех бесконечных замкнутых классов и всех замкнутых классов;
3. изучена задача о базисах замкнутых классов, а именно, установлено, что существует замкнутый класс, имеющий конечный базис, существует замкнутый класс, имеющий бесконечный базис, и существует замкнутый класс, не имеющий базиса; приведены конкретные примеры соответствующих замкнутых классов;
4. найдено число замкнутых классов, имеющих конечный базис, число замкнутых классов, имеющих бесконечный базис, и число замкнутых классов, не имеющих базиса.

Ключевые слова: функциональная система, проблема полноты, полная система, замкнутый класс, базис, полином, полиномиальная функция.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Н. Ф. Алексиадис. Замкнутые классы в функциональной системе полиномов с действительными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 5–14.

[1]Работа выполнена в МГУ им. М.В. Ломоносова

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 519.716 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-5-14

Closed classes in the functional system of polynomials with real coefficients[2]

N. Ph. Aleksiadis

Aleksiadis Nikos Philipovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; National Research University "MPEI" (Moscow).
e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Abstract

A functional system is a set of functions endowed with a set of operations on these functions. The operations allow one to obtain new functions from the existing ones.

Functional systems are mathematical models of real and abstract control systems and thus are one of the main objects of discrete mathematics and mathematical cybernetic.

The problems in the area of functional systems are extensive. One of the main problems is deciding completeness; this problem consists in the description of all subsets of functions that are complete, i.e. generate the whole set.

In our paper we consider the functional system of polynomials with real coefficients endowed with the superposition operation for this system we study the problem of closed classes (structure, basis, number of finite and infinite closed classes).

Importance of the problem of closed classes is ensured by the fact that completeness problem can frequently be solved with the help of (maximal) closed classes.

The main results concerning the functional system of polynomials with real coefficients presented in our paper are the following:

1. *all finite closed classes are described explicitly*;
2. *the number of finite closed classes, infinite closed classes and all closed classes is found*;
3. *the problem of bases of closed classes is studied, namely, it is established that there exist closed classes with a finite basis, there exist closed classes with an infinite basis, and there exist closed classes without a basis; explicit examples of the corresponding closed classes are given*;
4. *the number of closed classes with a finite basis, the number of closed classes with an infinite basis and the number of closed classes without a basis are established.*

Keywords: functional system, completeness problem, complete system, closed class, basis, polynomial, polynomial function.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
N. Ph. Aleksiadis, 2023, "Closed classes in the functional system of polynomials with real coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 5–14.

[2]The work was performed at Lomonosov Moscow State University

1. Введение

Эта статья является расширенной версией моего доклада о замкнутых классах в функциональной системе полиномов с действительными коэффициентами, сделанного на XXI Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 85-летию со дня рождения А. А Карацубы [1], и ее можно считать продолжением цикла моих работ [2]-[4] о проблеме полноты для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций.

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики и отражают следующие основные особенности реальных и абстрактных управляющих систем: функционирование (в функциональных системах - это функции), правила построения более сложных управляющих систем из заданных и описание функционирования сложных систем по функционированию их компонент (последние два момента отражены в операциях функциональных систем).

Функциональные системы обладают определенной спецификой, состоящей в рассмотрении задач и подходов, возникающих при их исследовании с позиции математической кибернетики, математической логики и алгебры. Так, с позиции математической кибернетики функциональные системы рассматриваются как модели, описывающие функционирование сложных кибернетических систем; с позиции математической логики – как модели логик, т.е. системы предложений с логическими операциями над ними; с позиции алгебры – как универсальные алгебры.

В качестве обобщений реальных функциональных систем могут, в принципе, рассматриваться и универсальные алгебры, однако, в этом случае теряются основные достоинства реальных систем и, прежде всего, такие, как конструктивность множества и операций.

Содержательная связь функциональных систем с реальными кибернетическими моделями управляющих систем, с одной стороны, определяет серию существенных требований, которые накладываются на функциональные системы, а с другой стороны, порождает класс важных задач, имеющих как теоретическое, так и прикладное значение.

При изложении материала в основном используется терминология книг [8] и [12].

Несмотря на то, что мы используем стандартные обозначения и общеизвестные понятия дискретной математики (в частности, теории функциональных систем), с целью корректного понимания изложенного, все-таки следует уточнить некоторые моменты.

Функциональная система (ф.с.) $\mathbf{F}$ – это пара вида $\mathbf{F} = (F, O)$, где F – множество функций, а O множество операций над функциями из F, при этом каждая операция из O замкнута относительно множества F.

Для произвольного подмножества A множества F обозначим через $[A]$ множество всех функций из F, которые получаются из функций множества A с помощью конечного числа применения операций из O. Множество $[A]$ называется *замыканием множества* A.

Множество $A\,(A \subseteq F)$ называется *замкнутым* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = A$.

Замкнутое множество принято называть *замкнутым классом.*

Множество $A\,(A \subseteq F)$ называется *полным* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = F$.

Полное множество принято называть *полной системой.*

Полная система называется *базисом* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если никакая ее собственная подсистема не является полной в $\mathbf{F}$, т.е. базис – это минимальная полная система в ф.с. $\mathbf{F}$.

Аналогично определяются полная система и базис любого замкнутого класса в $\mathbf{F}$.

Проблематика теории функциональных систем обширна. Одной из основных проблем является *проблема полноты, состоящая в описании всех подмножеств A множества функций F, которые являются полными в ф.с.* $\boldsymbol{F} = (F, O)$, *т.е.* $[A] = F$.

Как известно, изучение проблемы полноты осуществлялось путем исследования конкретных функциональных систем: 2-значная логика (Пост [15]), 3-значная логика (Яблонский [13]), 4-значная логика (Мальцев [9]), k-значная логика (Розенберг [16], Саломаа [10], Слупецкий [17], Яблонский [14]), автоматные функции (Бабин [5], Кудрявцев [7], Часовских [11]), счетнозначные логики (Гаврилов [6]). В этих функциональных системах решение проблемы полноты было сведено к описанию всех предполных классов (максимальных замкнутых классов). Метод решения проблемы полноты в терминах предполных классов стал после этого одним из основных (можно сказать, стал традицией).

При исследовании центральной проблемы теории функциональных систем – проблемы полноты одной из основных задач является задача о замкнутых классах. В настоящей работе решается эта задача для функциональной системы полиномиальных функций с действительными коэффициентами, которая играет ключевую роль не только в самой дискретной математике и математической кибернетике, но и во многих других областях математики, например, в теории функций (аппроксимационные теоремы Чебышева и Вейерштрасса), в вычислительной математике и технике (построение и анализ вычислительных чипов и нейронных сетей). Актуальность полученных результатов также состоит и в развитии самой теории функциональных систем как в плане охвата новых модельных объектов типа полиномиальных функций, так и в вычленении позитивных результатов, а также в отсечении негативных ситуаций.

Введем несколько стандартных обозначений, необходимых для дальнейшего изложения.

N — множества всех натуральных чисел,

R — множества всех действительных чисел.

$|A|$ — мощность множества A.

c_0 — мощность счетного множества.

$c = 2^{c_0}$ — мощность континуум.

2^c — мощность гиперконтинуум.

Для удобства изложения полагаем, что $0^0 = 1$.

2. Основные результаты

Определим наш основной объект исследования — функциональную систему полиномов с действительными коэффициентами.

Выражение вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$, где $n, k_1, k_2, \ldots, k_n \in N$, а $c \in R$, называется *мономом с действительным коэффициентом*, зависящим от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой c, т.е. мономом с действительным коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с действительными коэффициентами называется *полиномом с действительным коэффициентом.*

Обозначим через $F_{PR}^{(n)}(n = 0, 1, 2, \ldots)$ множество всех функций из R^n в R, задаваемых полиномами с действительными коэффициентами и зависящих от n переменных, при этом $F_{PR}^{(0)} = R$, а через F_{PR} множество всех функций, задаваемых полиномами с действительными коэффициентами, т.е. $F_{PR} = \cup_{n=0}^{\infty} F_{PR}^{(n)}$. Эти функции назовем *полиномиальными функциями с действительными коэффициентами.*

Полиномиальные функции с действительными коэффициентами будем называть также *pr-функциями* или *pr-полиномамы* [3].

[3] p – первая буква слова polynomial, r – первая буква слова real

Более того, вместо термина "полиномиальная функция" будем говорить просто "полином", т.е. мы отождествляем функцию и формулу, задающую эту функцию.

Говорят, что pr-функция $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ *существенно зависит от переменной* x_i, если существуют такие два набора $(c_1, \ldots, c_{i-1}, a, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ и $(c_1, \ldots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ значений переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$, что

$$f(c_1, \ldots, c_{i-1}, a, c_{i+1}, \ldots, c_n) \neq f(c_1, \ldots, c_{i-1}, a, b_{i+1}, \ldots, c_n).$$

В этом случае мы говорим, что x_i является *существенной переменной* pr-функции

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Если x_i не является существенной переменной функции $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, то она называется *фиктивной переменной* функции $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ две pr-функции и пусть x_i фиктивная переменная функции $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Если для любых $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_n$ значений переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$ имеем

$$f(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_n) = g(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n),$$

то говорят, что $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ получается из $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ *изъятием (удалением) фиктивной переменной* x_i и, наоборот, $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ получена из $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ *добавлением фиктивной переменной* x_i.

Две функции называются *равными*, если одна из них может быть получена из другой путем добавления или изъятия некоторых фиктивных переменных.

Замечание 1. *В дальнейшем будем считать, что вместе с функцией f заданы и все равные ей функции, т.е. функции рассматриваем с точностью до фиктивных переменных.*

Замечание 2. *Если дана конечная система функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$ (где $m \geq 1$), то можно считать, что все они зависят от одних и тех же переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т.е. имеют вид*

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Замечание 3. *Если дана функция, отличная от константы, то путем отождествления переменных из нее можно получить равную ей функцию, все переменные которой являются существенными.*

Обозначим через F_{PR} множество всех полиномов с действительными коэффициентами.

Функциональная система полиномов с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{PR}$ – это пара $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$, где F_{PR} – множество всех полиномов с действительными коэффициентами, а O – множество операции суперпозиции. *Операции суперпозиции* включают в себя: перестановку переменных, переименование переменных, отождествление переменных, введение фиктивной переменной, удаление фиктивной переменной, подстановку одной функции в другую.

Следует отметить, что приведенное определение функциональной системы полиномов с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция pr-функций из F_{PR} является опять pr-функцией из F_{PR}.

Следующие две теоремы дают исчерпывающий ответ о структуре и числе конечных замкнутых классов в ф.с. $\mathbf{F}_{PR}$.

Теорема 1. *В ф.с. $\mathbf{F}_{PR}$ существуют только следующие конечные замкнутые классы:*

1) *C, где C – произвольное конечное подмножество множества R;*

2) *$I_1 = \{x\}, I_2 = \{x; -x\}$;*

3) *$C \cup I_1, \{\pm c_1, \cdots, \pm c_k\} \cup I_2$, где $\pm c_1, \cdots, \pm c_k \in R$, а C, I_1 и I_2 определяются соответственно в предыдущих пунктах.*

Доказательство. Очевидно, что каждое из перечисленных множеств является конечным замкнутым классом в $\mathbf{F}_{PR}$. Покажем, что в $\mathbf{F}_{PR}$ не существует других конечных замкнутых классов, отличных от перечисленных. Для этого достаточно доказать, что если замкнутый класс содержит $pr-$функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$, отличную от константы, $g(x)=x$ и $h(x)=-x$, то он содержит бесконечное число попарно различных $pr-$функций.

Пусть A – произвольный замкнутый класс, который содержит такую $pr-$функцию $f=f(x_1,\ldots,x_n)$. Поскольку $f(x_1,\ldots,x_n)$ отлична от константы, то она имеет существенную переменную; не ограничивая общность, можно считать, что существенными переменными функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ являются переменные $x_1,\ldots,x_n$ $(n\geq 1)$.

Далее, возможны два случая:

1. $n=1$, т.е. f имеет одну существенную переменную. Можно считать, что $f=f(x)$.

Так как функция f отлична от $g(x)$ и $h(x)$, то очевидно, что последовательность функций

$$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$$

состоит из попарно различных функций и все они принадлежат множеству A (поскольку A – замкнутый класс).

2. $n\geq 2$, т.е. $f(x_1,\ldots,x_n)$ имеет более одной существенной переменной. Без ограничения общности можно считать, что функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных $x_1,\ldots,x_n$ (см. замечание (3)).

Тогда очевидно, что если в функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ на место переменной x_1 подставим функцию $f(y_1,\ldots,y_n)$ (где $\{y_1,\ldots,y_n\}\cap\{x_1,\ldots,x_n\}=\varnothing$), то получим функцию

$$f(f(y_1,\ldots,y_n),x_2\ldots,x_n),$$

существенно зависящую от всех своих $2n-1$ переменных; затем, если в функции

$$f(f(y_1,\ldots,y_n),x_2\ldots,x_n)$$

на место переменной y_1 подставим функцию $f(z_1,\ldots,z_n)$, где

$$\{z_1,\ldots,z_n\}\cap\{y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_n\}=\varnothing,$$

то получим функцию

$$f(f(f(z_1,\ldots,z_n),y_2,\ldots,y_n),x_2\ldots,x_n),$$

существенно зависящую от всех своих $3n-2$ переменных и т.д.

Итак, имеем бесконечную последовательность функций

$$f(x_1,\ldots,x_n), f(f(y_1,\ldots,y_n),x_2\ldots,x_n), f(f(f(z_1,\ldots,z_n),y_2,\ldots,y_n),x_2\ldots,x_n),\ldots,$$

которая состоит из попарно различных функций (поскольку числа существенных переменных этих функций попарно различны) и все они принадлежат множеству A (т.к. A – замкнутый класс). Следовательно, A содержит бесконечное число попарно различных функций. □

На вопрос сколько конечных замкнутых классов вышеприведенных видов, ответ дает следующая теорема.

Теорема 2. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_{PR}$

1) *число всех конечных замкнутых классов равно* c;

2) *число всех бесконечных замкнутых классов равно* 2^c;

3) *число всех замкнутых классов равно* 2^c;

Доказательство. 1) Справедливость первого утверждения непосредственно следует из теоремы (1), в которой перечислены все замкнутые классы в ф.с. $\mathbf{F}_{PR}$.

2) Понятно, что чтобы доказать мощность некоторого множества A равна $|A| = 2^c$, достаточно показать, что $|A| \geq 2^c$ и $|A| \leq 2^c$.

С одной стороны, поскольку любое бесконечное подмножество $G = \{c_1, c_2, c_3, \ldots\}$ множества действительных чисел R является замкнутым классом (легко проверить, что $[G] = G$), то число всех бесконечных замкнутых классов не меньше 2^c, так как мощность множества всех действительных чисел равна c, а, как известно, мощность множества всех бесконечных подмножеств множества мощности c равна 2^c. Но, с другой стороны, это число не может больше 2^c, так как $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$ является функциональной системой мощности c, т.е. $|F_{PR}| = c$ и, следовательно, число всех подмножеств множества $|F_{PR}|$ равно 2^c.

3) Ясно, что (число всех замкнутых классов) = (число всех конечных замкнутых классов) + (число всех бесконечных замкнутых классов), т.е. (число всех замкнутых классов) = $c + 2^c = 2^c$. $\square$

А что касается базисов замкнутых классов, то оказывается, что имеют место все три случая.

Теорема 3. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_{RQ}$

1) *существует замкнутый класс, имеющий конечный базис;*

2) *существует замкнутый класс, имеющий бесконечный базис;*

3)*существует замкнутый класс, не имеющий базиса.*

Доказательство. Чтобы убедиться в этом, достаточно привести примеры соответствующих замкнутых классов.

1. Пусть $A = \{2x, 4x, 8x, \ldots, 2^n x, \ldots\}$, где n – любое положительное целое число. Ясно, что множество A является замкнутым классом в $\mathbf{F}_{RQ}$, а система $B = \{2x\}$ – его базисом. Следовательно, A замкнутый класс, имеющий конечный базис.

2. Пусть $A = \{x, 2x, 3x, \ldots, mx, \ldots\}$, где m – любое положительное целое число. Ясно, что множество A является замкнутым классом в $\mathbf{F}_{RQ}$, а система $B = \{x, 2x, 3x, 5x, \ldots, px, \ldots\}$, где p – любое простое число, является его базисом. Следовательно, A замкнутый класс, имеющий бесконечный базис.

3. Пусть $A = [T]$, где $T = \{1, x_1^2, x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_2^2 x_3^2, \ldots\}$. Покажем, что замкнутый класс A не имеет базиса.

Очевидно, что A состоит из всех $rq-$*функции* вида 1 и $x_1^{2k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{2k_n}$, где n – любое положительное целое число, а $k_1, \ldots, k_n$ – любые натуральные числа.

Допустим, что класс A имеет базис; обозначим его через B. Ясно, что $1 \in B$ и B содержит функцию, отличную от константы 1; обозначим ее через $f_1(x_1, \ldots, x_{n_1})$, где $n_1 > 0$. Пусть число переменных, которые содержит эта функция во 2-ой степени, равно $m_1 (0 \leq m_1 \leq n_1)$; не ограничивая общность, можно считать, что этими переменными являются переменные $x_1, \ldots, x_{m_1}$. Следовательно, $f_1(x_1, \ldots, x_{n_1})$ имеет вид

$$f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}) = x_1^2 \ldots x_{m_1}^2 x_{m_1+1}^{2k_{m_1+1}} \ldots x_{n_1}^{2k_{n_1}},$$

где $k_{m_1+1}, \ldots, k_{n_1}$ – некоторые натуральные числа отличные, от 0 и 1.

Очевидно, что из функций 1 и $f_1(x_1, \ldots, x_{n_1})$ с помощью операций суперпозиции невозможно получить функцию

$$g(x_1, \ldots, x_{m_1+1}) \equiv x_1^2 \ldots x_{m_1}^2 x_{m_1+1}^2.$$

Следовательно, B содержит функцию вида

$$f_2(x_1, \ldots, x_{n_2}) = x_1^2 \ldots x_{m_1}^2 x_{m_1+1}^2 \ldots x_{m_2}^2 x_{m_2}^{2l_{m_2+1}} \ldots x_{n_2}^{2l_{n_2}},$$

где n_2, m_2 – некоторые положительные целые числа, при этом $n_2 > n_1$ и $n_1 < m_2 \le n_2$, а $l_{m_2+1}, \dots, l_{n_2}$ – некоторые натуральные числа, отличные от 0 и 1.

Очевидно, что из функций $1, f_1(x_1, \dots, x_{n_1})$ и $f_2(x_1, \dots, x_{n_2})$ с помощью операций суперпозиции невозможно получить функцию $g(x_1, \dots, x_{m_2+1}) \equiv x_1^2 \dots x_{m_2}^2 x_{m_2+1}^2$.

Следовательно, B содержит функцию вида

$$f_3(x_1, \dots, x_{n_3}) = x_1^2 \dots x_{m_2}^2 x_{m_2+1}^2 \dots x_{m_3}^2 x_{m_3+1}^{2s_{m_2+1}} \dots x_{n_3}^{2s_{n_3}},$$

где n_3, m_3 – некоторые положительные целые числа, при этом $n_3 > n_2$ и $n_2 < m_3 \le n_3$, а $s_{m_3+1}, \dots, s_{n_3}$ – некоторые натуральные числа, отличные от 0 и 1 и т.д.

Итак, B содержит бесконечное число попарно различных функций

$$1, f_1(x_1, \dots, x_{n_l}), f_2(x_1, \dots, x_{n_2}), f_3(x_1, \dots, x_{n_3}), \dots .$$

Но, с другой стороны, если рассмотрим любую бесконечную подпоследовательность этой последовательности, содержащую константу 1, то очевидно, что из функций этой подпоследовательности с помощью операции суперпозиции можно получить все функции множества T, следовательно, и все функции замкнутого класса Φ. Следовательно, собственная подсистема базиса B является полной в ф.с. $\mathbf{F}_{PR}$. Получили противоречие. Итак, замкнутый класс A не имеет базиса. □

На вопрос сколько конечных замкнутых классов, имеющие конечные базисы, имеющих бесконечные базисы или вообще не имеющих базисов, ответ дает следующая теорема.

Теорема 4. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_{PR}$

1) *число замкнутых классов, имеющих конечный базис, равно* c;
2) *число замкнутых классов, имеющих бесконечный базис, равно* 2^c;
3) *число всех замкнутых классов, не имеющих базиса, равно* 2^c.

Доказательство. 1) Любое конечное множество вида $G = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \}$, где $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$, является базисом самого этого множества G; поэтому число замкнутых классов, имеющих конечный базис, не меньше c. Но это число не может больше c, так как $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$ является функциональной системой мощности c, т.е. $|F_{PR}| = c$ и, следовательно, число всех его конечных подмножеств множества $|F_{PR}|$ равно c.

2) Любое бесконечное множество вида $G = \{c_1, c_2, , c_3, \dots\}$, где $c_1, c_2, , c_3, \dots \in R$, является базисом самого этого множества G; поэтому число замкнутых классов, имеющих бесконечный базис, не меньше 2^c. Но это число не может больше 2^c, так как $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$ является функциональной системой мощности c, т.е. $|F_{PR}| = c$ и, следовательно, число всех его бесконечных подмножеств множества $|F_{PR}|$ равно 2^c.

3)Чтобы убедиться в справедливости последнего пункта, достаточно заметить, что множество

$$A_T = [\{1, x_1^2, x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_2^2 x_3^2, \dots\} \cup T],$$

где T – произвольное бесконечное подмножество множества всех действительных чисел, не имеет базиса и, если $T_1 \ne T_2$, где T_1, T_2 – любые подмножества множества всех действительных чисел, то $A_{T_1} \ne A_{T_2}$. □

3. Заключение

В заключении коротко отметим, что цель, поставленная в начале статьи, достигнута: изучена структура замкнутых классов и их базисов; найдено число замкнутых классов и их базисов для каждого возможного типа, более того, приведены соответствующие конкретные примеры для каждого случая.

Автор выражает глубокую благодарность старшему научному сотруднику МГУ им. М. В. Ломоносова А. В. Галатенко за постоянную поддержку при выполнении данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексиадис Н. Ф. О замкнутых классах в функциональной системе полиномов с действительными коэффициентами // XXI Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 85-летию со дня рождения А. А Карацубы. (Тула, 17–21 мая 2022 года). Тула, 2022. С. 142-145.
2. Алексиадис Н. Ф. Алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты для полиномов с целыми коэффициентами // Вестник МЭИ, 2015, № 3, с. 110-117.
3. Алексиадис Н. Ф. О функциональной системе полиномов с рациональными коэффициентами // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, 2019, т.23, вып. 4, с. 93-114.
4. Алексиадис Н. Ф. Рациональные А-функции с рациональными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 4, С. 11–19. DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19.
5. Бабин Д. Н. О задаче полноты для автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2020. Т. 23, вып. 4. С. 82-83.
6. Гаврилов Г. П. О функциональной полноте в счетнозначной логике // Проблемы кибернетики. 1965 (М. Наука). вып. 15. С. 5-64.
7. Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных системах, связанных с автоматами //В кн.: Проблемы кибернетики. 1965 (М. Наука). вып. 13. С. 45-74.
8. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд–во МГУ, 1982. 157 с.
9. Мальцев А. И. Избранные труды. Т. II — М.: Изд–во Наука, 1976. 388 с.
10. Саломаа А. Некоторые критерии полноты для множеств функций многозначной логики //В кн.: Кибернетический сборник. 1964 (М.: Мир). Т.8. С. 7-32.
11. Часовских А. А. Проблема полноты в классах линейных автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. Т. 22, вып. 2. С. 151-154.
12. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Изд–во Наука, 1986. 384 с.
13. Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // ДАН СССР. 1954. 95. № 6. С. 1153–1156.
14. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.
15. Post E. Two-valued iterative sistems of mathematical logik. — Prinston. 1941.
16. Rosenberg Y. Uber die functionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. // Praha, Rozpravi Ceskoslovenska Acodemie Ved. v. 80, № 4. P. 393,1970.
17. Slupecki J. Kriterium pelnosci wielowar — tosciowych systemow logiki zdan. // Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsivie. 1939. Cl. III. v. 32. P. 102-128.

REFERENCES

1. Aleksiadis, N. Ph. 2022, “On closed classes in a functional system of polynomials with real coefficients”, Proc. XXI Int. Conf. “Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history”, pp. 142-145.

2. Aleksiadis, N. Ph. 2015, “Algorithmic unsolvability of the completeness problem for polynomials with integer coefficients” , Vestnik MPEI, no. 3, pp. 110-117.

3. Aleksiadis, N. Ph. 2019, “On the functional system of polynomials with rational coefficients” *Intelligent systems. Theory and applications*, Vol. 23, № 4, c. 93-114.

4. Aleksiadis, N. Ph. 2022, “Rational A-functions with rational coefficients” // *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 23, № 4, pp. 11–19. DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19.

5. Babin, D. N. 2020, “On the completeness problem for automata”, *Proc. Intelligent systems. Theory and Applications*, Vol. 23(4), pp. 82-83.

6. Gavrilov, G. P. 1965, “On functional completeness in countable logic”, *Problems of cybernetics*, Vol. 15, pp. 5-64.

7. Kudryavtsev, V. B. 1965, “On the powers of sets of discrete sets of some functional systems related to automata”, *Problems of cybernetics*, Vol. 13, pp. 45-74.

8. Kudryavtsev, V. B. 1982, “Functional systems”, Moscow: Publishing House of Mekh-mat. fac. MSU., 157 p.

9. Maltsev, A. I. 1976, “Selected works”. Vol. II — Moscow: Publishing House “Nauka”, 388 p.

10. Salomaa, A. 1963, “Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain”, II. Ibid., Ser. A I 63, 19 pp.

11. Chasavskikh, A. A. 2018, “The problem of completeness in classes of linear automata”, *Intelligent systems. Theory and Applications*, Vol. 22(2), pp. 151-154.

12. Yablonsky, S. V. 1986, “Introduction to discrete mathematics”, Moscow.:Science, 384 p.

13. Yablonsky, S. V. 1954, “On functional completeness in three-digit calculus”, *DAN USSR*, Vol. 95(6), pp. 1153–1156.

14. Yablonsky, S. V. 1958, “Functional constructions in k-valued logic”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, Vol.51, pp. 5–142.

15. Post, E. 1941,“Two-valued iterative sistems of mathematical logik”. — Prinston.

16. Rosenberg, Y.1970, “Uber die functionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken”. *Praha, Rozpravi Ceskoslovenska Acodemie Ved.*, Vol. 80, № 4, p. 393.

17. Slupecki, J. 1939, Kriterium pelnosci wielowar — tosciowych systemow logiki zdan. *Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsivie*, cl. III, v. 32, pp. 102-128.

Получено: 05.09.2022
Принято в печать: 24.04.2023