ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 2 (2014)

УДК 512.548

# ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ $n$-АРНЫХ ГРУПП

Н. А. Щучкин ( Волгоград )

nikolaj_shchuchkin@mail.ru

**Аннотация**

Понятие $n$-арной группы является обобщением бинарной группы, поэтому многие результаты из теории групп имеют $n$-арный аналог в теории $n$-арных групп. Но имеются существенные отличия в этих теориях. Например, множитель прямого произведения $n$-арных групп не всегда имеет изоморфную копию в этом произведении (в работе указан пример). Доказано, что в прямом произведении $\prod_{i\in I}\langle A_i, f_i\rangle$ $n$-арных групп имеется $n$-арная подгруппа, изоморфная $\langle A_j, f_j\rangle$ $(j \in I)$, тогда и только тогда, когда найдется некоторый гомоморфизм из $\langle A_j, f_j\rangle$ в $\prod_{i\in I, i\neq j}\langle A_i, f_i\rangle$. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы в прямом произведении $n$-арных групп каждый из прямых множителей имел изоморфную копию в этом произведении и пересечение этих копий одноэлементно (как в группах) – в каждом прямом множителе имеется идемпотент.

На любой $n$-арной группе можно определить бинарную группу, которая помогает изучать данную $n$-арную группу, т.е. верна теорема Глускина-Хоссу: на всякой $n$-арной группе $\langle G, f\rangle$ для элемента $e \in G$ можно определить бинарную группу $\langle G, \cdot\rangle$, в которой найдутся автоморфизм $\varphi(x) = f(e, x, c_1^{n-2})$ и элемент $d = f(\overset{(n)}{e})$ такие, что выполнены условия:

$$f(x_1^n) = x_1 \cdot \varphi(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-1}(x_n) \cdot d, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in G; \tag{1}$$

$$\varphi(d) = d; \tag{2}$$

$$\varphi^{n-1}(x) = d \cdot x \cdot d^{-1}, \quad x \in G. \tag{3}$$

Группу $\langle G, \cdot\rangle$, которая возникает в теореме Глускина-Хоссу, называют ретрактом $n$-арной группы $\langle G, f\rangle$.

Верна и обратная теорема Глускина-Хоссу: в любой группе $\langle G, \cdot\rangle$ для выбранных автоморфизма $\varphi$ и элемента $d$ с условиями (5) и (6), задается $n$-арная группа $\langle G, f\rangle$, где $f$ действует по правилу (4). Такую $n$-арную группу называют $(\varphi, d)$-определенной на группе $\langle G, \cdot\rangle$ и обозначают $der_{\varphi,d}\langle G, \cdot\rangle$.

Найдена связь между $n$-арной группой, $(\varphi, d)$-определенной на декартовом произведении групп и $n$-арными группами, которые $(\varphi_i, d_i)$-определены на множителях этого произведения: пусть $\prod_{i\in I}\langle A_i, \cdot_i\rangle$ – декартово произведение групп и $\varphi_i$, $d_i$ – автоморфизм и элемент в группе $\langle A_i, \cdot_i\rangle$ с условиями (5) и (6) для любого $i \in I$. Тогда

$$der_{\varphi,d}\prod_{i\in I}\langle A_i, \cdot_i\rangle = \prod_{i\in I} der_{\varphi_i,d_i}\langle A_i, \cdot_i\rangle,$$

где $\varphi$ – автоморфизм декартова произведения групп $\prod_{i\in I}\langle A_i, \cdot_i\rangle$, заданный покомпонентно по правилу:для любого $a \in \prod_{i\in I} A_i$, $\varphi(a)(i) = \varphi_i(a(i))$ (такой автоморфизм назовем диагональным), и $d(i) = d_i$ для любого $i \in I$.

В теории $n$-арных групп неразложимыми $n$-арными группами являются конечные примарные и бесконечные полуциклические $n$-арные группы (построенные по теореме Глускина-Хоссу на циклических группах). Мы наблюдаем $n$-арный аналог неразложимости циклических групп. Однако, в отличии от групп, конечно порожденная полуабелева $n$-арная группа не всегда разложима в прямое произведение конечного числа неразложимых полуциклических $n$-арных групп. Доказано, что любая конечно порожденная полуабелева $n$-арная группа изоморфна прямому произведению конечного числа неразложимых полуциклических $n$-арных групп (бесконечных либо конечных примарных) тогда и только тогда, когда в ретракте этой $n$-арной группы автоморфизм $\varphi$ из теоремы Глускина-Хоссу сопряжен некоторому диагональному автоморфизму.

*Ключевые слова:* $n$-арная группа, прямое произведение, автоморфизм.

*Библиография:* 18 названий.

# DIRECT PRODUCT OF $n$-ARY GROUPS

N. A. Shchuchkin (Volgograd)

nikolaj_shchuchkin@mail.ru

**Abstract**

The notion of $n$-ary group is a generalization of the binary group so many of the results from the theory of groups have $n$-ary analogue in theory of $n$-ary groups. But there are significant differences in these theories. For example, multiplier of the direct product of $n$-ary groups does not always have isomorphic copy in this product (in paper there is an example). It is proved that the direct product $\prod_{i\in I}\langle A_i, f_i\rangle$ $n$-ary groups has $n$-ary subgroup isomorphic to $\langle A_j, f_j\rangle$ $(j \in I)$, then and only when there is a homomorphism of $\langle A_j, f_j\rangle$ in $\prod_{i\in I, i\neq j}\langle A_i, f_i\rangle$. Were found necessary and sufficient conditions for in direct product of $n$-ary groups, each of the direct factors had isomorphic copy in this product and the intersection of these copies singleton (as well as in groups) – each direct factor has a idempotent.

For every $n$-ary group, can define a binary group which helps to study the $n$-ary group, that is true Gluskin-Hossu theorem: for every $n$-ary group of $\langle G, f\rangle$ for an element $e \in G$ can define a binary group $\langle G, \cdot\rangle$, in which there will be an automorphism $\varphi(x) = f(e, x, c_1^{n-2})$ and an element $d = f(\overset{(n)}{e})$ such that the following conditions are satisfied:

$$f(x_1^n) = x_1 \cdot \varphi(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-1}(x_n) \cdot d, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in G; \tag{4}$$

$$\varphi(d) = d; \tag{5}$$

$$\varphi^{n-1}(x) = d \cdot x \cdot d^{-1}, \quad x \in G. \tag{6}$$

Group $\langle G, \cdot \rangle$, which occurs in Gluskin-Hossu theorem called retract $n$-ary groups $\langle G, f \rangle$.

Converse Gluskin-Hossu theorem is also true: in any group $\langle G, \cdot \rangle$ for selected automorphism $\varphi$ and element $d$ with the terms (5) and (6), given $n$-ary group $\langle G, f \rangle$, where $f$ defined by the rule (4). A $n$-ary group called $(\varphi, d)$-defined on group $\langle G, \cdot \rangle$ and denote $der_{\varphi,d}\langle G, \cdot \rangle$.

Was found connections between $n$-ary group, $(\varphi, d)$-derived from the direct product of groups and $n$-ary groups that $(\varphi_i, d_i)$-derived on multipliers of this product: let $\prod_{i \in I}\langle A_i, \cdot_i \rangle$ – direct product groups and $\varphi_i$, $d_i$ – automorphism and an element in group $\langle A_i, \cdot_i \rangle$ with the terms of (5) and (6) for any $i \in I$. Then

$$der_{\varphi,d} \prod_{i \in I} \langle A_i, \cdot_i \rangle = \prod_{i \in I} der_{\varphi_i, d_i} \langle A_i, \cdot_i \rangle,$$

where $\varphi$ – automorphism of direct product of groups $\prod_{i\ inI}\langle A_i, \cdot_i \rangle$, componentwise given by the rule: for every $a \in \prod_{i \in I} A_i$, $\varphi(a)(i) = \varphi_i(a(i))$ (called diagonal automorphism), and $d(i) = d_i$ for any $i \in I$.

In the theory of $n$-ary groups indecomposable $n$-ary groups are finite primary and infinite semicyclic $n$-ary groups (built by Gluskin-Hossu theorem on cyclic groups). We observe $n$-ary analogue indecomposability cyclic groups. However, unlike groups, finitely generated semi-abelian $n$-ary group is not always decomposable into a direct product of a finite number of indecomposable semicyclic $n$-ary groups. It is proved that any finitely generated semi-abelian $n$-ary group is isomorphic to the direct product finite number of indecomposable semicyclic $n$-ary groups (infinite or finite primary) if and only if in retract this $n$-ary group automorphism $\varphi$ from Gluskin-Hossu theorem conjugate to some diagonal automorphism.

*Keywords:* n-ary group, direct product, automorphism.

*Bibliography:* 18 titles.

# 1. Введение

На непустом множестве $G$ рассмотрим $n$-арную операцию $f$, где $n \geqslant 2$. Алгебру $\langle G, f \rangle$ назовем $n$-арным группоидом. При $n = 2$ имеем обычный группоид. При действии $n$-арной операции $f$ для сокращения записи используют стандартные обозначения

$$f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+s}, x_{k+s+1}, \ldots, x_n) = f(x_1^k, \overset{(s)}{x}, x_{k+s+1}^n),$$

где $x_{k+1} = \ldots = x_{k+s} = x$ ($x_i^j$ - пустой символ при $i > j$, также $\overset{(0)}{x}$ - пустой символ).

$n$-Арный группоид $\langle G, f\rangle$ называют $n$-арной полугруппой, если в нем выполняется обобщенный закон ассоциативности

$$f(f(a_1^n), a_{n+1}^{2n-1}) = f(a_1^i, f(a_{i+1}^{i+n}), a_{i+n+1}^{2n-1}), \tag{7}$$

для всех $i = 1, \ldots, n-1$. При $n = 2$ имеем обычную полугруппу. В $n$-арной полугруппе $\langle G, f\rangle$ для удобства определяют новую $(k(n-1)+1)$-арную операцию $f_{(k)}$ по правилу

$$f_{(k)}(x_1^{k(n-1)+1}) = \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{k \text{ раз}}(x_1^n), x_{n+1}^{2n-1})\ldots), x_{(k-1)(n-1)+2}^{k(n-1)+1}).$$

Бинарную группу традиционно определяют как полугруппу $< G, \cdot >$, в которой разрешимы и имеют единственные решения уравнения $a \cdot x = b$ и $y \cdot a = b$ для любых $a, b \in G$. Обобщая это определение, мы получим определение $n$-арной группы. Если в $n$-арной полугруппе $\langle G, f\rangle$ разрешимы и имеют единственные решения уравнения

$$f(a_1^{i-1}, x_i, a_{i+1}^n) = b$$

относительно переменной $x_i$, где $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b$ — любые элементы из $G$, $i = 1, \ldots, n$, то ее называют $n$-арной (или полиадической) группой [1]. При $n = 2$ имеем обычную (бинарную) группу. Нас интересуют случаи, когда $n > 2$. Основы теории $n$-арных групп подробно изложены в работах [2], [3] и [4].

**Пример.** [1] Пусть $\langle G, \cdot\rangle$ – группа. На $G$ определим $n$-арную операцию $f$ по правилу

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$. Очевидно, $\langle G, f\rangle$ – $n$-арная группа. Так построенную $n$-арную группу называют производной от группы $\langle G, \cdot\rangle$.

В $n$-арной группе $\langle G, f\rangle$ для любого элемента $a \in G$ решение уравнения $f(\overset{(n-1)}{a}, x) = a$ обозначают через $\bar{a}$ и называют косым элементом для $a$. Отметим свойства косого элемента.

Свойство 1. *([5]) В $n$-арной группе $\langle G, f\rangle$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ и любого $a \in G$ верно равенство*

$$f(\overset{(i-1)}{a}, \bar{a}, \overset{(n-i)}{a}) = a.$$

Свойство 2. *([5]) В $n$-арной группе $\langle G, f\rangle$ для любого $i = 0, 1, \ldots, n-2$ и любых $a, b \in G$ верны равенства*

$$f(b, \overset{(i)}{a}, \bar{a}, \overset{(n-i-2)}{a}) = b \quad \text{и} \quad f(\overset{(i)}{a}, \bar{a}, \overset{(n-i-2)}{a}, b) = b.$$

Определение косого элемента задает в $\langle G, f\rangle$ отображение$^{-}$: $x \to \bar{x}$. С помощью этого отображения $n$-арную группу можно определить как алгебру $\langle G, f, ^{-}\rangle$ типа $(n, 1)$.

Свойство 3. *([6]) $n$-Арная полугруппа $\langle G, f\rangle$ является $n$-арной группой тогда и только тогда, когда в ней существует унарная операция$^{-}$, для которой выполняются тождества*

$$f(y, \overset{(n-3)}{x}, \bar{x}, x) = y \quad \text{и} \quad f(x, \bar{x}, \overset{(n-3)}{x}, y) = y.$$

Если $\langle G, f\rangle$ – $n$-арная группа, $M \subseteq G$, то пересечение всех $n$-арных подгрупп из $\langle G, f\rangle$, содержащих множество $M$, называют $n$-арной подгруппой, порожденной множеством $M$ и обозначают $\langle\langle M\rangle, f\rangle$.

Свойство 4. *([4]) Если $\langle G, f\rangle$ – $n$-арная группа ($n \geqslant 3$), $M \subseteq G$, $M \neq \emptyset$, то*

$$\langle M\rangle = \{f_{(k)}(a_1^{k(n-1)+1}) \mid a_i \in M \cup \overline{M}, k = 0, 1, \ldots\},$$

*где $\overline{M} = \{\bar{a} \mid a \in M\}$.*

Свойство 5. *Образ косого элемента к элементу $a$ при гомоморфизме $n$-арных групп $\varphi$ является косым элементом к образу $a$, т.е.*

$$\varphi(\bar{a}) = \overline{\varphi(a)}.$$

Доказательство. Так как $f(\overset{(n-1)}{\varphi(a)}, \varphi(\bar{a})) = \varphi(f(\overset{(n-1)}{a}, \bar{a})) = \varphi(a)$, то $\varphi(\bar{a}) = \overline{\varphi(a)}$. Свойство доказано. □

Элемент $a$ из $n$-арной группы $\langle G, f\rangle$ называется идемпотентом, если $f(\overset{(n)}{a}) = a$. Очевидно, для идемпотента $a$ верно равенство $\bar{a} = a$.

На любой $n$-арной группе можно определить бинарную группу, которая помогает изучать данную $n$-арную группу, т.е. верна

Теорема 1. *[7], [8] (Теорема Глускина-Хоссу) На всякой $n$-арной группе $\langle G, f\rangle$ для произвольно заданного элемента $e \in G$ можно определить бинарную операцию $a \cdot b = f(a, c_1^{n-2}, b)$, где последовательность элементов $c_1^{n-2}$ из $G$ является обратной для $e$ (т.е. $f(e, c_1^{n-2}, x) = x$ для любого $x \in G$) так, что $\langle G, \cdot\rangle$ – группа. Кроме того, найдутся автоморфизм $\varphi(x) = f(e, x, c_1^{n-2})$ и элемент $d = f(\overset{(n)}{e})$ этой группы такие, что выполнены условия:*

$$f(x_1^n) = x_1 \cdot \varphi(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-1}(x_n) \cdot d, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in G; \tag{8}$$

$$\varphi(d) = d; \tag{9}$$

$$\varphi^{n-1}(x) = d \cdot x \cdot d^{-1}, \quad x \in G. \tag{10}$$

Отметим очевидный факт: элемент $e$ из теоремы 1 является единицей в группе $\langle G, \cdot \rangle$.

Группу $\langle G, \cdot \rangle$, которая возникает в теореме 1, называют ретрактом $n$-арной группы $\langle G, f \rangle$ и обозначают $ret_e\langle G, f \rangle$. Известно [7],[8], что любые два ретракта одной и той же $n$-арной группы изоморфны.

Предложение 1. *Пусть $n$-арная группа $\langle G, f \rangle$ порождается множеством $M$. Тогда ретракт $ret_e\langle G, f \rangle$ из теоремы* 1 порождается множеством

$$M \cup \overline{M} \cup \varphi(M \cup \overline{M}) \cup \ldots \cup \varphi^{n-1}(M \cup \overline{M}) \cup \{d\}.$$

Доказательство. Пусть $b \in G$. Согласно свойству 4, $b = f_{(k)}(a_1^{k(n-1)+1})$, где $a_i \in M \cup \overline{M}$, $i = 1, \ldots, k(n-1)+1$. По теореме 1 строим ретракт $ret_e\langle G, f \rangle$. Согласно условию 8, имеем

$$b = f_{(k)}(a_1^{k(n-1)+1}) =$$

$$= a_1 \cdot \varphi(a_2) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-1}(a_n) \cdot d \cdot \varphi(a_{n+1}) \cdot \ldots \cdot \varphi(a_{(k-1)(n-1)+2}) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-1}(a_{k(n-1)+1}) \cdot d.$$

Предложение доказано. $\square$

Следствие 1. *Ретракт конечно порожденной $n$-арной группы конечно порожден.*

Верна и обратная теорема Глускина-Хоссу:

Теорема 2. *[7],[8] В любой группе $\langle G, \cdot \rangle$ для выбранных автоморфизма $\varphi$ и элемента $d$ с условиями (9) и (10), задается $n$-арная группа $\langle G, f \rangle$, где $f$ действует по правилу (8).*

$n$-Арную группу $\langle G, f \rangle$, которая возникает в теореме 2, называют $(\varphi, d)$-определенной на группе $\langle G, \cdot \rangle$ и обозначают $der_{\varphi,d}\langle G, \cdot \rangle$.

Теорема 3. *Для группы $\langle G, \cdot \rangle$ с единицей $e$ для выбранных автоморфизма $\varphi$ и элемента $d$ с условиями (9) и (10) верно равенство*

$$\langle G, \cdot \rangle = ret_e der_{\varphi,d}\langle G, \cdot \rangle.$$

Доказательство. По теореме 2 строим $n$-арную группу $\langle G, f \rangle = der_{\varphi,d}\langle G, \cdot \rangle$, где $n$-арная операция $f$ действует по правилу (8).

Для единицы $e$ группы $\langle G, \cdot \rangle$ в $n$-арной группе $\langle G, f \rangle$ выбираем обратную последовательность $\overset{n-3}{e}, \bar{e}$. Так как

$$f(\overset{(n-1)}{e}, d^{-1}) = e \cdot \varphi(e) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-2}(e) \cdot \varphi^{n-1}(d^{-1}) \cdot d = \varphi^{n-1}(d)^{-1} \cdot d = d^{-1} \cdot d = e,$$

то $\bar{e} = d^{-1}$.

Для любых $a, b \in G$, используя (9) и (10), получим

$$f(a, \overset{(n-3)}{e}, \bar{e}, b) = a \cdot \varphi(e) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-3}(e) \cdot \varphi^{n-2}(\bar{e}) \cdot \varphi^{n-1}(b) \cdot d =$$
$$= a \cdot \varphi^{n-2}(d^{-1}) \cdot d \cdot b = a \cdot \varphi^{n-2}(d)^{-1} \cdot d \cdot b = a \cdot d^{-1} \cdot d \cdot b = a \cdot b.$$

Таким образом, бинарные операции в группах $\langle G, \cdot \rangle$ и $ret_e der_{\varphi,d} \langle G, \cdot \rangle$ совпадают. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Для $n$-арной группы $\langle G, f \rangle$ верно равенство*

$$\langle G, f \rangle = der_{\varphi,d} ret_e \langle G, f \rangle$$

*для любого $e \in G$, где автоморфизм $\varphi$ и элемент $d$ группы $ret_e \langle G, f \rangle$ определены по правилу, указанному в теореме* 1.

Доказательство. Пусть для $e \in G$ обратная последовательность будет $\overset{n-3}{e}, \bar{e}$. По теореме 1 на $n$-арной группе $\langle G, f \rangle$ строим группу $ret_e \langle G, f \rangle$, где бинарная операция $\cdot$ действует по правилу: для любых $a, b \in G$

$$a \cdot b = f(a, \overset{(n-3)}{e}, \bar{e}, b).$$

Кроме того, отображение $\varphi$, действующее по правилу $\varphi(x) = f(e, x, \overset{(n-3)}{e}, \bar{e})$ для любого $x \in G$, является автоморфизмом группы $ret_e \langle G, f \rangle$. Элемент $d = f(\overset{(n)}{e})$ и автоморфизм $\varphi$ удовлетворяют условиям (8), (9) и (10).

Согласно теореме 2 на группе $ret_e \langle G, f \rangle$ можно построить $n$-арную группу $der_{\varphi,d} ret_e \langle G, f \rangle$, у которой $n$-арная операция действует по правилу (8). Значит, $n$-арные группы $\langle G, f \rangle$ и $der_{\varphi,d} ret_e \langle G, f \rangle$ совпадают. Теорема доказана. □

## 2. Прямое произведение $n$-арных групп

Как и в теории универсальных алгебр (см., например, [9]), определяется прямое призведение $n$-арных групп. Пусть $\langle A_i, f_i \rangle$ $(i \in I)$ – конечный или бесконечный набор $n$-арных групп. На декартовом произведении множеств

$$A = \prod_{i \in I} A_i = \{a : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid a(i) \in A_i\}$$

определим $n$-арную операцию $f$ по правилу: для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$f(a_1^n)(i) = f_i(a_1(i), \ldots, a_n(i)), \quad i \in I.$$

Непосредственной проверкой доказывается, что $n$-арный группоид $\langle A, f \rangle$ будет $n$-арной группой, которую называют прямым произведением $n$-арных групп $\langle A_i, f_i \rangle$ и обозначают

$$\langle A, f \rangle = \prod_{i \in I} \langle A_i, f_i \rangle.$$

Отметим, что в прямом произведении бинарных групп каждый из прямых множителей изоморфен некоторой подгруппе этого произведения. Для $n$-арных групп это не так. Например, на циклической группе $(b)$ порядка 4 определим (согласно теореме 2) две тернарные группы $der_{\varphi,1}(b)$ и $der_{\varphi,b^2}(b)$, где автоморфизм $\varphi$ группы $(b)$ определяется по правилу: $\varphi(b^s) = b^{3s}$. В тернарной группе $der_{\varphi,1}(b)$ каждый элемент является идемпотентом (проверяется непосредственно), а в прямом произведении $der_{\varphi,1}(b) \times der_{\varphi,b^2}(b)$ нет идемпотентов, так как их нет в $der_{\varphi,b^2}(b)$ (проверяется непосредственно). Значит, нет изоморфного вложения из $der_{\varphi,1}(b)$ в $der_{\varphi,1}(b) \times der_{\varphi,b^2}(b)$, так как гомоморфный образ идемпотента должен быть идемпотентом. Однако, второй прямой множитель $der_{\varphi,b^2}(b)$ имеет изоморфную копию $der_{1_{\{1\}},1}\{1\} \times der_{\varphi,b^2}(b)$ в прямом произведении $der_{\varphi,1}(b) \times der_{\varphi,b^2}(b)$ (отображение $\psi(b^s) = (1, b^s)$ является изоморфным вложением тернарной группы $der_{\varphi,b^2}(b)$ в $der_{\varphi,1}(b) \times der_{\varphi,b^2}(b)$).

Последнее замечание наводит на мысль: для того, чтобы множитель прямого произведения $n$-арных групп имел изоморфную копию в этом произведении, надо накладывать некоторые условия. И эти условия найдены в следующей теореме.

Теорема 5. *В прямом произведении $\prod_{i\in I}\langle A_i, f_i\rangle$ $n$-арных групп имеется $n$-арная подгруппа, изоморфная $\langle A_j, f_j\rangle$ $(j \in I)$, тогда и только тогда, когда найдется некоторый гомоморфизм из $\langle A_j, f_j\rangle$ в*

$$\prod_{i\in I, i\neq j} \langle A_i, f_i\rangle. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\psi$ — изоморфное вложение $n$-арной группы $\langle A_j, f_j\rangle$ в $\prod_{i\in I}\langle A_i, f_i\rangle$. Проекция $\psi_B$, где $B = \prod_{i\in I, i\neq j} A_i$, изоморфизма $\psi$ на (11) будет гомоморфизмом. Действительно, для любых $a_{1j}^{nj} \in A_j$, если $\psi(a_{sj}) = b_s(i), i \in I$, $s = 1, \ldots, n$, то для каждого $i \in I$ получим

$$\psi(f_j(a_{1j}^{nj}))(i) = f(\psi(a_{1j}), \ldots, \psi(a_{nj}))(i) = f(b_1(i), \ldots, b_n(i))(i) =$$

$$= f_i(b_1(i), \ldots, b_n(i)).$$

Тогда для всех $i \in I$, кроме $i = j$, имеем

$$\psi_B(f_j(a_{1j}^{nj}))(i) = f_i(b_1(i), \ldots, b_n(i)) = f'(b_1(i), \ldots, b_n(i))(i) =$$

$$= f'(\psi_B(a_{1j}), \ldots, \psi_B(a_{nj}))(i),$$

где $f'$ – $n$-арная операция в (11).

Обратно, для гомоморфизма $\varphi$ из $\langle A_j, f_j\rangle$ в (11) зададим отображение $\psi : A_j \to \prod_{i\in I} A_i$ по правилу: для любого $a \in A_j$, если $\varphi(a)(i) = b(i)$ для всех $i \in I$, кроме $i = j$, то для $i = j$ полагаем $\psi(a)(j) = a$, а для всех остальных $i \in I \setminus \{j\}$ полагаем $\psi(a)(i) = \varphi(a)(i) = b(i)$. Для $a_1, a_2 \in A_j$, $a_1 \neq a_2$ имеем $\psi(a_1) \neq \psi(a_2)$, т.е. отображение $\psi$ будет инъективным. Кроме того, для любых $a_1^n \in A_j$, если $\varphi(a_s)(i) = b_s(i)$, $s = 1, \ldots, n$, и

$$\varphi(f_j(a_1^n))(i) = f'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))(i) = f_i(b_1(i), \ldots, b_n(i))$$

для всех $i \in I \setminus \{j\}$, то для всех $i \in I \setminus \{j\}$

$$\psi(f_j(a_1^n))(i) = \varphi(f_j(a_1^n))(i) = f_i(b_1(i), \ldots, b_n(i)) =$$

$$= f_i(\varphi(a_1)(i), \ldots, \varphi(a_n)(i)) = f_i(\psi(a_1)(i), \ldots, \psi(a_n)(i))$$

и $\psi(f_j(a_1^n))(j) = f_j(a_1^n) = f_j(\psi(a_1)(j), \ldots, \psi(a_n)(j))$. Значит, $\psi$ – изоморфное вложение $n$-арной группы $\langle A_i, f_i\rangle$ в прямое произведение $\prod_{i\in I}\langle A_i, f_i\rangle$. Теорема доказана. $\square$

Аналогичная теорема для двух абелевых $n$-арных групп имеется в [10].

Теперь найдем необходимые и достаточные условия для того, чтобы в прямом произведении $n$-арных групп каждый из прямых множителей имел изоморфную копию в этом произведении и пересечение этих копий одноэлементно (как в группах).

Теорема 6. *Все $n$-арные группы $\langle A_i, f_i\rangle$, $i \in I$, изоморфны некоторым $n$-арным подгруппам прямого произведения $\prod_{i\in I}\langle A_i, f_i\rangle$, пересечение которых одноэлементно, тогда и только тогда, когда в каждой $n$-арной группе $\langle A_i, f_i\rangle$ имеется идемпотент.*

Доказательство. Пусть пересечение всех изоморфных копий $n$-арных групп $\langle A_i, f_i\rangle$ $(i \in I)$ в $\prod_{i\in I}\langle A_i, f_i\rangle$ равно $\{e\}$. Тогда $\{e\}$ будет $n$-арной подгруппой в $\prod_{i\in I}\langle A_i, f_i\rangle$ (пересечение $n$-арных подгрупп является $n$-арной подгруппой), а значит, $e$ – идемпотент. Если $\psi_i$ – изоморфное вложение $n$-арной группы $\langle A_i, f_i\rangle$ в $\prod_{i\in I}\langle A_i, f_i\rangle$, то $\psi_i^{-1}(e)$ будет идемпотентом в $\langle A_i, f_i\rangle$ (гомоморфный образ идемпотента является идемпотентом).

Обратно, пусть в каждой $n$-арной группе $\langle A_i, f_i\rangle$, $i \in I$, имеется идемпотент $e_i$. Очевидно, элемент $e \in \prod_{i\in I, i\neq j} A_i$, определенный по правилу $e(i) = e_i$ для всех $i \in I \setminus \{j\}$, будет идемпотентом в прямом произведении (11). Тогда для каждого $j \in I$ имеем тривиальный гомоморфизм $\varphi_j$ из $n$-арной группы $\langle A_j, f_j\rangle$ в прямое произведение (11), т.е. для каждого $x \in A_j$ имеем $\varphi_j(x)(i) = e_i$ для всех $i \in I \setminus \{j\}$. Согласно теореме 5, каждая $n$-арная группа $\langle A_j, f_j\rangle$, $j \in I$, изоморфна некоторой $n$-арной подгруппе $\langle C_j, f\rangle = \prod_{i\in I}\langle B_i, f_i\rangle$ прямого произведения $\prod_{i\in I}\langle A_i, f_i\rangle$, где $B_j = A_j$ и $B_i = \{e_i\}$ для всех $i \in I \setminus \{j\}$. Причем, $\bigcap_{j\in I} C_j = e$. Теорема доказана. $\square$

Аналогичная теорема для двух абелевых $n$-арных групп имеется в [10].

В следующей теореме отметим некоторые свойства, выполнимые в прямом произведении $n$-арных групп.

Теорема 7. *В прямом произведении $\langle A, f\rangle = \prod_{i\in I}\langle A_i, f_i\rangle$ $n$-арных групп верны свойства*

*1)* $\bar{a}(i) = \overline{a(i)}$ *для любого* $a \in A$ *и любого* $i \in I$ *(теорема 6.3 из [10] для абелевых* $n$*-арных групп);*

*2)* $e$ *является идемпотентом в* $\langle A, f\rangle$ *тогда и только тогда, когда для каждого* $i \in I$ *элемент* $e(i)$ *является идемпотентом в* $\langle A_i, f_i\rangle$ *(предложение 5.2 из [3]);*

*3) для* $c \in A$ *последовательность* $c_1^{n-2}$ *элементов из* $A$ *будет обратной тогда и только тогда, когда для любого* $i \in I$ *последовательность* $c_1^{n-2}(i) \in A_i$ *является обратной для* $c(i) \in A_i$ *(лемма 2.7.2 из [4]).*

Рассмотрим связь между ретрактом прямого произведения $n$-арных групп и ретрактами множителей этого произведения.

Теорема 8. *([11]) Ретракт прямого произведения* $n$*-арных групп равен прямому произведению ретрактов этих* $n$*-арных групп. Более подробно,*

$$ret_c \prod_{i\in I}\langle A_i, f_i\rangle = \prod_{i\in I} ret_{c(i)}\langle A_i, f_i\rangle.$$

Теперь рассмотрим связь между $n$-арной группой, $(\varphi, d)$-определенной на декартовом произведении групп и $n$-арными группами, которые $(\varphi_i, d_i)$-определены на множителях этого произведения.

Теорема 9. *Пусть* $\prod_{i\in I}\langle A_i, \cdot_i\rangle$ *– декартово произведение групп и* $\varphi_i$*,* $d_i$ *– автоморфизм и элемент в группе* $\langle A_i, \cdot_i\rangle$ *с условиями (9) и (10) для любого* $i \in I$*. Тогда*

$$der_{\varphi,d} \prod_{i\in I}\langle A_i, \cdot_i\rangle = \prod_{i\in I} der_{\varphi_i,d_i}\langle A_i, \cdot_i\rangle,$$

*где* $\varphi$ *– автоморфизм декартова произведения групп* $\prod_{i\in I}\langle A_i, \cdot_i\rangle$*, заданный покомпонентно по правилу:для любого* $a \in \prod_{i\in I} A_i$*,* $\varphi(a)(i) = \varphi_i(a(i))$*, и* $d(i) = d_i$ *для любого* $i \in I$*.*

Доказательство. Пусть $\langle A, \cdot\rangle = \prod_{i\in I}\langle A_i, \cdot_i\rangle$ и $\langle A, f\rangle = \prod_{i\in I} der_{\varphi_i,d_i}\langle A_i, \cdot_i\rangle$.

Покажем, что $\varphi$ и $d$ из теоремы удовлетворяют условиями (9) и (10). Так как для любого $i \in I$ автоморфизм $\varphi_i$ и элемент $d_i$ в группе $\langle A_i, \cdot_i\rangle$ удовлетворяют условиями (9) и (10), то для любого $i \in I$ имеем

$$\varphi(d)(i) = \varphi_i(d(i)) = \varphi_i(d_i) = d_i = d(i),$$

т.е. $\varphi(d) = d$. Кроме того, для любого $x \in \prod_{i\in I} A_i$ имеем

$$\varphi^{n-1}(x)(i) = \varphi_i^{n-1}(x(i)) = d_i \cdot_i x(i) \cdot_i d_i^{-1} = d(i) \cdot_i x(i) \cdot_i d(i)^{-1} = (d \cdot x \cdot d^{-1})(i)$$

для любого $i \in I$, т.е. $\varphi^{n-1}(x) = d \cdot x \cdot d^{-1}$. Доказали, что $\varphi$ и $d$ удовлетворяют условиями (9) и (10).

Согласно теореме 2 $n$-арная операция $f'$ в $n$-арной группе

$$\langle A, f'\rangle = der_{\varphi,d} \prod_{i\in I}\langle A_i, \cdot_i\rangle$$

действует по правилу: для любых $x_1, \dots, x_n \in \prod_{i \in I} A_i$

$$f'(x_1^n) = x_1 \cdot \varphi(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-1}(x_n) \cdot d.$$

А значит, для любого $i \in I$ получим

$$f'(x_1^n)(i) = (x_1 \cdot \varphi(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi^{n-1}(x_n) \cdot d)(i) =$$

$$= x_1(i) \cdot_i \varphi(x_2)(i) \cdot_i \ldots \cdot_i \varphi^{n-1}(x_n)(i) \cdot_i d(i).$$

С другой стороны, в каждой $n$-арной группе $der_{\varphi_i, d_i}\langle A_i, \cdot_i \rangle$ $n$-арная операция $f_i$ (согласно теореме 2) действует по правилу

$$f_i(x_{1i}, \dots, x_{ni}) = x_{1i} \cdot_i \varphi_i(x_{2i}) \cdot_i \ldots \cdot_i \varphi_i^{n-1}(x_{ni}) \cdot_i d_i$$

для любых $x_{1i}, \dots, x_{ni} \in A_i$. Тогда

$$f(x_1^n)(i) = f_i(x_1(i), \dots, x_n(i)) = x_1(i) \cdot_i \varphi_i(x_2(i)) \cdot_i \ldots \cdot_i \varphi_i^{n-1}(x_n(i)) \cdot_i d_i =$$

$$= x_1(i) \cdot_i \varphi(x_2)(i) \cdot_i \ldots \cdot_i \varphi^{n-1}(x_n)(i) \cdot_i d(i).$$

Мы показали, что действия $n$-арных операций $f$ и $f'$ на $A = \prod_{i \in I} A_i$ совпадают. Теорема доказана. □

## 3. Абелевы и полуабелевы $n$-арные группы.

$n$-Арными аналогами абелевой группы являются абелева и полуабелева $n$-арные группы.

$n$-Арная группа называется абелевой [12], если в ней верны тождества

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

для любой подстановки $\sigma \in S_n$.

Теорема 10. *[10] $n$-Арная группа $\langle G, f \rangle$ является абелевой тогда и только тогда, когда ретракт $ret_c\langle G, f \rangle$ является абелевой группой и в этой группе автоморфизм $\varphi$ из теоремы Глускина-Хоссу (теорема* 1) является тождественным.

$n$-Арная группа называется полуабелевой [12], если в ней верно тождество

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = f(x_n, x_2, \dots, x_{n-1}, x_1). \tag{12}$$

Очевидно абелева $n$-арная группа будет полуабелевой. Обратно неверно. Примером полуабелевой, но не абелевой, $n$-арной группы служит тернарная группа $\langle B_n, f \rangle$ всех отражений правильного $n$-угольника из примера (см. [13]).

Теорема 11. *(см., например, [4]) $n$-Арная группа является полуабелевой тогда и только тогда, когда ее ретракт является абелевой группой.*

Имеется критерий изоморфизма полуабелевых $n$-арных групп.

Теорема 12. *([14]) Две полуабелевы $n$-арные группы*

$$\langle G_1, f_1\rangle = der_{\varphi_1,d_1}\langle G_1, \cdot\rangle \ \text{и}\ \langle G_2, f_2\rangle = der_{\varphi_2,d_2}\langle G_2, \bullet\rangle$$

*изоморфны тогда и только тогда, когда найдутся изоморфизм $\sigma$ из $\langle G_1, \cdot\rangle$ в $\langle G_2, \bullet\rangle$ и элемент $u \in G_2$ такие, что*

$$\sigma(d_1) = u \bullet \varphi_2(u) \bullet \ldots \bullet \varphi_2^{n-2}(u) \bullet d_2, \tag{13}$$

$$\sigma(\varphi_1(x)) = \varphi_2(\sigma(x)) \quad \text{для всех}\ \ x \in G_1. \tag{14}$$

# 4. Полуциклические $n$-арные группы.

$n$-Арную группу $\langle G, f\rangle$ называют полуциклической [4], если ретракт $ret_c\langle G, f\rangle$ этой $n$-арной группы является циклической группой. Очевидно, все полуциклические $n$-арные группы являются полуабелевыми (теорема 11).

## 4.1. Конечные полуциклические $n$-арные группы.

Рассмотрим конечную циклическую группу $\langle a\rangle$ порядка $k$. Выберем тождественный автоморфизм $\varphi_0 = 1_{\langle a\rangle}$ группы $\langle a\rangle$ и элемент $d = a^l$, где $0 \leqslant l < k$. Обратная теорема Глускина-Хоссу (теорема 2) определяет полуциклическую $n$-арную группу $\langle\langle a\rangle, f\rangle = der_{1_{\langle a\rangle},a^l}\langle\langle a\rangle, \cdot\rangle$ с операцией

$$f(a^{s_1}, \ldots, a^{s_n}) = a^{s_1+\ldots+s_n+l}. \tag{15}$$

Выберем теперь на конечной циклической группе $\langle a\rangle$ порядка $k$ любой автоморфизм $\varphi$, отличный от тождественного автоморфизма $\varphi_0$, т.е. $\varphi(a) = a^m$, где $1 < m < k$ и $m$ взаимно прост с $k$. Понятно, что $k > 2$, иначе для $k = 1, 2$ автоморфизм группы $\langle a\rangle$ только один – тождественный. Пусть $d = a^l$ - элемент группы $\langle a\rangle$, для которого $lm \equiv l \pmod k$ (согласно условию (9)). Чтобы выполнялось (10) для любого $x = a^s$, $s = 0, 1, \ldots, k-1$, надо для $m$ потребовать условие: показатель $m$ по модулю $k$ делит $n-1$, т.к. из равенства $a^l a^s = a^{m^{n-1}s}a^l$ следует $s \equiv m^{n-1}s \pmod k$, а это сравнение верно для всех $s = 0, 1, \ldots, k-1$, если $m^{n-1} \equiv 1 \pmod k$. Кроме того, для любого $x$ из $\langle a\rangle$ имеем $\varphi^{n-1}(x) = x$. При выполнении перечисленных требований, накладываемых на $m$ и $l$, на циклической группе $\langle a\rangle$ по обратной теореме Глускина-Хоссу (теорема 2) определяется полуциклическая $n$-арная группа $\langle\langle a\rangle, f\rangle = der_{\varphi,a^l}\langle\langle a\rangle, \cdot\rangle$ с операцией

$$f(a^{s_1}, a^{s_2}, a^{s_3}, \ldots, a^{s_{n-1}}, a^{s_n}) = a^{s_1+ms_2+m^2s_3+\ldots+m^{n-2}s_{n-1}+s_n+l}. \tag{16}$$

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 13. *(Предложение 1, [15]) . На циклической группе* $\langle a\rangle$ *порядка* $k$ *определяется полуциклическая* $n$*-арная группа* $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ *с* $n$*-арной операцией (15), где* $0 \leqslant l < k$*, либо с* $n$*-арной операцией (16) при* $k > 2$ *, где* $0 \leqslant m, l < k$*,* $m \neq 1$*,* $m$ *взаимно прост с* $k$*,* $lm \equiv l \pmod k$ *и показатель* $m$ *по модулю* $k$ *делит* $n-1$*.*

Назовем $n$-арную группу, построенную на конечной циклической группе одним из двух выше описанных способов, полуциклической типа $(k, m, l)$ ($m = 1$ в первом случае и $m \neq 1$ во втором случае). Заметим, что при $m = 1$ мы будем иметь абелеву полуциклическую $n$-арную группу, а при $m \neq 1$ полуциклическая $n$-арная группа не будет абелевой.

Аналогичное построение $n$-арных групп на аддитивной группе кольца классов вычетов по модулю $k$ имеется в [16].

Среди полуциклических $n$-арных групп типа $(k, m, l)$ могут быть изоморфные между собой $n$-арные группы. Следующая теорема является критерием изоморфизма полуциклических $n$-арных групп типа $(k, 1, l)$.

Теорема 14. *(Лемма 1, [16]) Две полуциклические* $n$*-арные группы типов* $(k, 1, l_1)$ *и* $(k, 1, l_2)$ *изоморфны тогда и только тогда, когда*

$$\text{НОД}\,(l_1, n-1, k) = \text{НОД}\,(l_2, n-1, k).$$

Следующая теорема является критерием изоморфизма полуциклических $n$-арных групп типа $(k, m, l)$ для $m \neq 1$.

Теорема 15. *(Предложение 3, [15]) Две полуциклические* $n$*-арные группы, имеющие типы* $(k, m_1, l_1)$ *и* $(k, m_2, l_2)$*, где* $m_1 \neq 1$ *и* $m_2 \neq 1$*, изоморфны тогда и только тогда, когда*

$$m_1 = m_2 \quad \text{и} \quad \text{НОД}\,(l_1, \frac{m_1^{n-1}-1}{m_1-1}, k) = \text{НОД}\,(l_2, \frac{m_2^{n-1}-1}{m_2-1}, k).$$

Покажем, что все полуциклические $n$-арные группы типа $(k, m, l)$ исчерпывают класс всех конечных полуциклических $n$-арных групп.

Теорема 16. *(Теорема 2, [15]) Любая полуциклическая* $n$*-арная группа порядка* $k$ *изоморфна полуциклической* $n$*-арной группе типа* $(k, 1, l)$*, где*

$$l \mid \text{НОД}\,(n-1, k),$$

*либо полуциклической* $n$*-арной группе типа* $(k, m, l)$ *при* $m \neq 1$*, где*

$$l \mid \text{НОД}\,(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)).$$

## 4.2. Бесконечные полуциклические $n$-арные группы

Рассмотрим теперь бесконечную циклическую группу $\langle a\rangle$, в которой всего два автоморфизма: тождественный $\varphi_0$ и $\varphi_1$, где $\varphi_1(a^s) = a^{-s}$ для любого $a^s \in \langle a\rangle$. Для $\varphi_0$ элемент $d$ из обратной теоремы Глускина-Хоссу (теорема 2) может быть любым из группы $\langle a\rangle$. Тогда, согласно этой теореме, алгебра $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ с операцией (15), где $l$ – любое целое число, является полуциклической $n$-арной группой. Назовем такую $n$-арную группу полуциклической типа $(\infty, 1, l)$. Следующая теорема является критерием изоморфизма бесконечных полуциклических $n$-арных групп типа $(\infty, 1, l)$.

Теорема 17. *(Предложение 7, [15]) Две полуциклические $n$-арные группы типов $(\infty, 1, l_1)$ и $(\infty, 1, l_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда*

$$l_1 \equiv l_2 \pmod{n-1} \;\; \textit{либо} \;\; l_1 \equiv -l_2 \pmod{n-1}. \tag{17}$$

Аналогичное построение $n$-арных групп на аддитивной группе кольца целых чисел имеется в [16]. Очевидно, $n$-арные группы типа $(\infty, 1, l)$ будут абелевыми.

Для нетождественного автоморфизма $\varphi_1$ бесконечной циклической группы $\langle a\rangle$ равенство (10) верно для любого $x = a^s \in \langle a\rangle$ только при нечетных $n$, причем элемент $d$ из обратной теоремы Глускина-Хоссу (теорема 2) может быть только единицей группы $\langle a\rangle$. Из обратной теоремы Глускина-Хоссу мы получили в следующей теореме строение не абелевой бесконечной полуциклической $n$-арной группы.

Теорема 18. *(Предложение 9, [15]) На бесконечной циклической группе $\langle a\rangle$ можно задать полуциклическую $n$-арную группу $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ для $n = 2k+1$, $k \in N$, с $n$-арной операцией*

$$f(a^{s_1}, \ldots, a^{s_n}) = a^{s_1 - s_2 + \ldots + s_{2k-1} - s_{2k} + s_{2k+1}}. \tag{18}$$

Назовем $n$-арную группу из теоремы 18 полуциклической типа $(\infty, -1, 0)$. Для таких $n$-арных групп справедливо, очевидно,

Предложение 2. *(Предложение 10, [15]) Любая полуциклическая $n$-арная группа типа $< \infty, -1, 0 >$ является идемпотентной.*

Покажем теперь, что полуциклические $n$-арные группы типов $(\infty, 1, l)$ и $(\infty, -1, 0)$ исчерпывают класс всех бесконечных полуциклических $n$-арных групп.

Теорема 19. *(Теорема 3, [15]) Любая бесконечная полуциклическая $n$-арная группа изоморфна полуциклической $n$-арной группе типа $< \infty, -1, 0 >$ либо типа $(\infty, 1, l)$, где $0 \leqslant l \leqslant \frac{n-1}{2}$.*

## 4.3. Разложения полуциклических $n$-арных групп.

Как и в теории групп, конечную $n$-арную группу, порядок которой есть степень простого числа $p$, называют $n$-арной $p$-группой. Если $n$-арная группа является $n$-арной $p$-группой для некоторого простого числа $p$, то она называется примарной. Имеем неразложимость полуциклической примарной $n$-арной группы:

Предложение 3. *(Предложение 13, [15]) Полуциклическая примарная $n$-арная группа не может быть изоморфна прямому произведению нескольких $n$-арных групп меньших порядков.*

Если же конечная полуциклическая $n$-арная группа не является примарной, то, так как любая циклическая группа является прямым произведением своих примарных неразложимых циклических подгрупп (см., например, [17], [18]), ситуация похожа на разложение циклической группы.

Теорема 20. *(Предложение 14, [15]) Всякая конечная полуциклическая $n$-арная группа изоморфна прямому произведению примарных полуциклических $n$-арных групп. Более точно, если $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ - полуциклическая $n$-арная группа типа $(k, m, l)$, где $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$, $p_i$ - простые числа и $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$, то*

$$\langle\langle a\rangle, f\rangle \;\cong\; \langle\langle a_1\rangle, f_1\rangle \times \langle\langle a_2\rangle, f_2\rangle \times \dots \times \langle\langle a_t\rangle, f_t\rangle, \qquad (19)$$

*где $\langle\langle a_i\rangle, f_i\rangle$ – полуциклическая $n$-арная группа типа $(p_i^{\alpha_i}, m_i, l_i)$, $m_i$ и $l_i$ – остатки от деления $m$ и $l$ на $p_i^{\alpha_i}$ соответственно, $i = 1, 2, \dots, t$.*

Как и в группах, верна

Теорема 21. *Любая бесконечная полуциклическая $n$-арная группа неразложима, т.е. она не может быть изоморфна прямому произведению двух и больше $n$-арных групп.*

Доказательство. Пусть $\langle G, f\rangle$ – бесконечная полуциклическая $n$-арная группа. Согласно теореме 19, $\langle G, f\rangle$ изоморфна полуциклической $n$-арной группе $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ типа $< \infty, -1, 0 >$ либо типа $(\infty, 1, l)$, где $0 \leqslant l \leqslant \frac{n-1}{2}$.

От противного. Пусть $\langle\langle a\rangle, f\rangle$ изоморфна прямому произведению двух $n$-арных групп $\langle B, f_1\rangle \times \langle C, f_2\rangle$. Согласно теореме 1, $\langle\langle a\rangle, \cdot\rangle = ret_e\langle\langle a\rangle, f\rangle$, где $e$ – единица группы $\langle\langle a\rangle, \cdot\rangle$, а по теореме 8,

$$ret_c(\langle B, f_1\rangle \times \langle C, f_2\rangle) = ret_{c_1}\langle B, f_1\rangle \times ret_{c_2}\langle C, f_2\rangle),$$

где $c = (c_1, c_2)$ – единица группы $ret_c(\langle B, f_1\rangle \times \langle C, f_2\rangle)$, $c_1, c_2$ – единицы групп $ret_{c_1}\langle B, f_1\rangle$ и $ret_{c_2}\langle C, f_2\rangle$ соответственно. По теореме 12, ретракты $ret_e\langle\langle a\rangle, f\rangle$ и $ret_c(\langle B, f_1\rangle \times \langle C, f_2\rangle)$ изоморфны. Получили противоречие с неразложимостью бесконечной циклической группы $\langle\langle a\rangle, \cdot\rangle$. Теорема доказана. □

# 5. Разложение конечно порожденной полуабелевой $n$-арной группы.

В теории групп известно разложение конечно порожденной абелевой группы в прямое произведение конечного числа неразложимых циклических групп, бесконечных или конечных примарных. В теории $n$-арных групп неразложимыми $n$-арными группами являются конечные примарные (предложение 3) и бесконечные (теорема 21) полуциклические $n$-арные группы. Мы наблюдаем $n$-арный аналог неразложимости циклических групп. Однако, конечно порожденная полуабелева $n$-арная группа не всегда разложима в прямое произведение конечного числа неразложимых полуциклических $n$-арных групп. Например, рассмотрим тернарную группу ($n$-арная при $n = 3$) $\langle Z_2 + Z_2, f\rangle$, $(\varphi, d)$-определенную на прямой сумме $Z_2 + Z_2$ двух циклических групп второго порядка, где $\varphi$ – любой нетождественный автоморфизм группы $Z_2 + Z_2$, $d$ – любой элемент из $Z_2 + Z_2$. Так построенная тернарная группа $\langle Z_2 + Z_2, f\rangle$ будет полуабелевой, но не абелевой (см. теорему 10). Эта тернарная группа может быть изоморфна прямому произведению двух тернарных групп меньших порядков, каждая из которых содержит два элемента. Но ретракты таких тернарных групп имеют только тождественный автоморфизм, а значит, эти тернарные группы будут абелевыми (вновь см. теорему 10). Тогда и прямое произведение этих двухэлементных тернарных групп будет абелевой тернарной группой. Значит, такого изоморфизма не может быть, т.е. $\langle Z_2 + Z_2, f\rangle$ не разложима в прямое произведение конечного числа неразложимых полуциклических тернарных групп.

На конечно порожденной полуабелевой $n$-арной группе $\langle G, f\rangle$ для произвольно заданного элемента $e \in G$ с помощью теоремы 1 строим ретракт $\langle G, \cdot\rangle$, который будет абелевой группой (теорема 11). Согласно предложению 1, эта группа будет конечно порождена. Тогда она разлагается в прямое произведение конечного числа своих неразложимых циклических подгрупп, частью конечных примарных, частью бесконечных. Пусть

$$\langle G, \cdot\rangle = \langle g_1\rangle \times \ldots \times \langle g_k\rangle.$$

Автоморфизм $\psi$ группы $\langle G, \cdot\rangle$, ограничение которого $\psi_{\langle g_i\rangle}$ на каждую циклическую подгруппу $\langle g_i\rangle$ является автоморфизмом этой подгруппы, назовем диагональным.

Теорема 22. *Любая конечно порожденная полуабелева $n$-арная группа изоморфна прямому произведению конечного числа неразложимых полуциклических $n$-арных групп (беконечных либо конечных примарных) тогда и только тогда, когда в ретракте этой $n$-арной группы автоморфизм $\varphi$ из теоремы* 1 сопряжен (в группе автоморфизмов этого ретракта) некоторому диагональному автоморфизму.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть конечно порожденная полуабелева $n$-арная группа $\langle G, f\rangle$ изоморфна прямому произведению $k$ неразложимых полуциклических $n$-арных групп $\langle\langle a_1\rangle, f_1\rangle \times \ldots \times \langle\langle a_k\rangle, f_k\rangle$, причем, пусть первые $s$ $n$-арные группы $\langle\langle a_i\rangle, f_i\rangle$, $i = 1, \ldots, s$, будут бесконечными абелевыми полуциклическими, вторые $t$ $n$-арные группы $\langle\langle a_i\rangle, f_i\rangle$, $i = s+1, \ldots, s+t$, будут бесконечными не абелевыми полуциклическими, третьи $q$ $n$-арные группы $\langle\langle a_i\rangle, f_i\rangle$, $i = s+t+1, \ldots, s+t+q$, будут примарными абелевыми полуциклическими, а остальные $k-(s+t+q)$ $n$-арные группы $\langle\langle a_i\rangle, f_i\rangle$, $i = s+t+q+1, \ldots, k$, будут примарными не абелевыми полуциклическими.

На $n$-арной группе $\langle G, f\rangle$ для произвольно заданного элемента $e \in G$ с помощью теоремы 1 строим конечно порожденную абелеву группу $\langle G, \cdot\rangle$ (см. замечание перед теоремой). Ретрактом прямого произведения $\langle\langle a_1\rangle, f_1\rangle \times \ldots \times \langle\langle a_k\rangle, f_k\rangle$ $n$-арных групп будет прямое произведение $\langle a_1\rangle \times \ldots \times \langle a_k\rangle$ циклических групп (теорема 8). Согласно теореме 12, группы $\langle G, \cdot\rangle$ и $\langle a_1\rangle \times \ldots \times \langle a_k\rangle$ изоморфны. Значит, группу $\langle G, \cdot\rangle$ можно разложить в прямое произведение $\langle g_1\rangle \times \ldots \times \langle g_k\rangle$ своих циклических подгрупп так, чтобы соответствующие прямые множители $\langle g_i\rangle$ и $\langle a_i\rangle$ $(i = 1, \ldots, k)$ были изоморфны. С учетом типа полуцикличности прямых множителей в $n$-арной группе $\langle\langle a_1\rangle, f_1\rangle \times \ldots \times \langle\langle a_k\rangle, f_k\rangle$ и согласно теоремам 19 и 16, на каждой циклической группе $\langle g_i\rangle$, $i = 1, \ldots, k$, строим полуциклические $n$-арные группы следующих типов: первые $s$ $n$-арные группы $\langle\langle g_i\rangle, f'_i\rangle$, $i = 1, \ldots, s$, будут бесконечными полуциклическими типа $(\infty, 1, l_i)$, где $0 \leqslant l_i \leqslant \frac{n-1}{2}$, вторые $t$ $n$-арные группы $\langle\langle g_i\rangle, f'_i\rangle$, $i = s+1, \ldots, s+t$, будут бесконечными полуциклическими типа $< \infty, -1, 0 >$, третьи $q$ $n$-арные группы $\langle\langle g'_i\rangle, f_i\rangle$, $i = s+t+1, \ldots, s+t+q$, будут примарными полуциклическими типа $(p_j^{\alpha_j}, 1, l'_j)$, $j = 1, \ldots, q$, где $l'_j \mid$ НОД $(n-1, p_j^{\alpha_j})$, а остальные $k-(s+t+q)$ $n$-арные группы $\langle\langle g_i\rangle, f'_i\rangle$, $i = s+t+q+1, \ldots, k$, будут примарными полуциклическими типа $(p_v^{\alpha_v}, m_v, l''_v)$ при $m_v \neq 1$, $v = q+1, \ldots, k-(s+t)$, где $l''_v \mid$ НОД $(\frac{m_v^{n-1}-1}{m_v-1}, p_v^{\alpha_v})$. Тогда

$$\langle\langle a_1\rangle, f_1\rangle \times \ldots \times \langle\langle a_k\rangle, f_k\rangle \;\cong\; \langle\langle g_1\rangle, f'_1\rangle \times \ldots \times \langle\langle g_k\rangle, f'_k\rangle.$$

А значит, изоморфными будут $n$-арные группы $\langle G, f\rangle$ и $\langle\langle g_1\rangle, f'_1\rangle \times \ldots \times \langle\langle g_k\rangle, f'_k\rangle$.

При построении группы $\langle G, \cdot\rangle$ на $n$-арной группе $\langle G, f\rangle$ с помощью теоремы 1 найдутся автоморфизм $\varphi$ и элемент $d$, удовлетворяющие (8) – (10). Согласно теореме 4 имеем равенство

$$\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d} ret_e \langle G, f\rangle = der_{\varphi,d}\langle G, \cdot\rangle.$$

Ретрактом прямого произведения $\langle\langle g_1\rangle, f'_1\rangle \times \ldots \times \langle\langle g_k\rangle, f'_k\rangle$ $n$-арных групп будет прямое произведение $\langle G, \cdot\rangle = \langle g_1\rangle \times \ldots \times \langle g_k\rangle$ циклических групп (теорема 8). В этом ретракте выбираем диагональный автоморфизм $\psi$, ограничение которого $\psi_{\langle g_i\rangle}$ на каждую группу $\langle g_i\rangle$ является тем самым автоморфизмом этой группы, который участвует в построении полуциклической $n$-арной группы $\langle\langle g_i\rangle, f'_i\rangle$. Согласно теореме 9 имеем равенство

$$\langle\langle g_1\rangle, f'_1\rangle \times \ldots \times \langle\langle g_k\rangle, f'_k\rangle = der_{\psi_{\langle g_1\rangle}, d_1}\langle g_1\rangle \times \ldots \times der_{\psi_{\langle g_k\rangle}, d_k}\langle g_k\rangle =$$

$$= der_{\psi,d'}\langle g_1\rangle \times \ldots \times \langle g_k\rangle = der_{\psi,d'}\langle G, \cdot\rangle,$$

где $d_i = g_i^{l_i}$ для $i = 1, \ldots, s$; $d_i = g_i^0$ для $i = s+1, \ldots, s+t$; $d_i = g_i^{l'_{i-(s+t)}}$ для $i = s+t+1, \ldots, s+t+q$; $d_i = g_i^{l''_{i-(s+t+q)}}$ для $i = s+t+q+1, \ldots, k$ и $d' = (d_1, \ldots, d_k)$.

Согласно теореме 12, для двух изоморфных полуабелевых $n$-арных групп $\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d}\langle G, \cdot\rangle$ и $\langle\langle g_1\rangle, f'_1\rangle \times \ldots \times \langle\langle g_k\rangle, f'_k\rangle = der_{\psi,d'}\langle G, \cdot\rangle$ найдется автоморфизм $\sigma$ группы $\langle G, \cdot\rangle$ такой, что

$$\sigma(\varphi(x)) = \psi(\sigma(x)) \quad \text{для всех} \quad x \in G.$$

Значит, автоморфизм $\varphi$ сопряжен диагональному автоморфизму $\psi$. Необходимость доказана.

**Достаточность.** На конечно порожденной полуабелевой $n$-арной группе $\langle G, f\rangle$, как и в необходимости, строим ретракт $ret_e\langle G, f\rangle = \langle G, \cdot\rangle$, который будет конечно порожденной абелевой группой. Пусть имеем разложение

$$\langle G, \cdot\rangle = \langle g_1\rangle \times \ldots \times \langle g_k\rangle$$

этой группы в прямое произведение своих неразложимых циклических подгрупп, причем первые $s+t$ подгруппы будут бесконечными, а остальные – примарными. Кроме того, найдутся автоморфизм $\varphi$ и элемент $d'$ группы $\langle G, \cdot\rangle$, удовлетворяющие (8) – (10). Причем, согласно условию теоремы, автоморфизм $\varphi$ сопряжен с помощью некоторого автоморфизма $\sigma$ (в группе автоморфизмов группы $\langle G, \cdot\rangle$) диагональному автоморфизму $\psi$ (ограничение $\psi_{\langle g_i\rangle}$ на каждую подгруппу $\langle g_i\rangle$ является автоморфизмом этой подгруппы).

Не нарушая общности, пусть на первых $s$ подгруппах $\langle g_i\rangle$, $i = 1, \ldots, s$, ограничение $\psi_{\langle g_i\rangle}$ будет тождественным автоморфизмом, на вторых $t$ подгруппах $\langle g_i\rangle$, $i = s+1, \ldots, s+t$, ограничение $\psi_{\langle g_i\rangle}$ будет нетождественным автоморфизмом, на третьих $q$ подгруппах $\langle g_i\rangle$, $i = s+t+1, \ldots, s+t+q$, порядков $p_j^{\alpha_j}$, $j = 1, \ldots, q$, ограничение $\psi_{\langle g_i\rangle}$ будет тождественным автоморфизмом, на остальных $k-(s+t+q)$ подгруппах $\langle g_i\rangle$, $i = s+t+q+1, \ldots, k$, порядков $p_v^{\alpha_v}$, $v = q+1, \ldots, k-(s+t)$, ограничение $\psi_{\langle g_i\rangle}$ (как нетождественный автоморфизм циклической группы) будет определяться числом $m_v \neq 1$, $0 \leqslant m_v < p_v^{\alpha_v}$ и НОД $(m_v, p_v^{\alpha_v}) = 1$. Заметим, что автоморфизм $\psi$ будет удовлетворять условию (10) (проверяется непосредственно), поэтому, если $t \neq 0$, т.е. имеются бесконечные циклические группы $\langle g_i\rangle$, $i = s+1, \ldots, s+t$, ограничения $\psi$ на которые будет нетождественным автоморфизмом, то для нетождественного автоморфизма $\psi_{\langle g_i\rangle}$ бесконечной циклической группы $\langle g_i\rangle$, $i = s+1, \ldots, s+t$ равенство (10) верно для любого $x \in \langle g_i\rangle$ только при нечетных $n$.

Полагаем $\sigma(d') = d = g_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot g_k^{r_k}$. Заметим, что автоморфизм $\psi$ будет удовлетворять условию (9) (проверяется непосредственно), а значит, если $t \neq 0$, т.е. вновь имеются бесконечные циклические группы $\langle g_i\rangle$, $i = s+1, \ldots, s+t$, ограничения $\psi$ на которые будет нетождественным автоморфизмом, то в разложении $d$ множители $g_{s+1}^{r_{s+1}}, \ldots, g_{s+t}^{r_{s+t}}$ будут равны единице $e$.

С помощью обратной теоремы Глускина-Хоссу (теорема 2) на всех циклических подгруппах $\langle g_i\rangle$ строим соответствующие полуциклические $n$-арные группы следующим образом. На бесконечных циклических группах $\langle g_i\rangle$, $i = 1, \ldots, s$, строим полуциклические $n$-арные группы $\langle\langle g_i\rangle, f_i\rangle$ типа $(\infty, 1, r_i)$. На бесконечных циклических группах $\langle g_i\rangle$, $i = s+1, \ldots, s+t$, строим полуциклические $n$-арные группы $\langle\langle g_i\rangle, f_i\rangle$ типа $(\infty, -1, 0)$. На примарных циклических группах $\langle g_i\rangle$, $i = s+t+1, \ldots, s+t+q$, порядков $p_j^{\alpha_j}$, $j = 1, \ldots, q$, строим полуциклические $n$-арные группы $\langle\langle g_i\rangle, f_i\rangle$ типа $(p_j^{\alpha_j}, 1, r_i)$. На примарных циклических группах $\langle g_i\rangle$, $i = s+t+q+1, \ldots, k$, порядков $p_v^{\alpha_v}$, $v = q+1, \ldots, k-(s+t)$, строим полуциклические $n$-арные группы $\langle\langle g_i\rangle, f_i\rangle$ типа $(p_v^{\alpha_v}, m_v, r_i)$, где $0 \leqslant m_v, r_i < p_v^{\alpha_v}$, $m_v \neq 1$, $m_v$ взаимно прост с $p_v^{\alpha_v}$, $r_i m_v \equiv l \pmod{p_v^{\alpha_v}}$ и показатель $m_v$ по модулю $p_v^{\alpha_v}$ делит $n-1$. Верность сравнения $r_i m_v \equiv l \pmod{p_v^{\alpha_v}}$ следует из справедливости равенства (9) для автоморфизм $\psi$, а из справедливости равенства (10) для автоморфизм $\psi$ следует условие: показатель $m_v$ по модулю $p_v^{\alpha_v}$ делит $n-1$.

Для прямого произведения $\langle\langle g_1\rangle, f_1\rangle \times \ldots \times \langle\langle g_k\rangle, f_k\rangle$ неразложимых полуциклических $n$-арных групп имеем (согласно теореме 9)

$$\langle\langle g_1\rangle, f_1\rangle \times \ldots \times \langle\langle g_k\rangle, f_k\rangle = der_{\psi_{\langle g_1\rangle}, d_1}\langle g_1\rangle \times \ldots \times der_{\psi_{\langle g_k\rangle}, d_k}\langle g_k\rangle =$$

$$= der_{\psi,d}\langle g_1\rangle \times \ldots \times \langle g_k\rangle = der_{\psi,d}\langle G, \cdot\rangle,$$

где $d_i = g_i^{r_i}$ для $i = 1, \ldots, s$; $d_i = g_i^0$ для $i = s+1, \ldots, s+t$; $d_i = g_i^{r_i}$ для $i = s+t+1, \ldots, k$. Согласно теореме 4 имеем равенство

$$\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d'} ret_e\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d'}\langle G, \cdot\rangle.$$

Для двух полуабелевых $n$-арных групп

$$\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d'}\langle G, \cdot\rangle \quad \text{и} \quad \langle\langle g_1\rangle, f_1\rangle \times \ldots \times \langle\langle g_k\rangle, f_k\rangle = der_{\psi,d}\langle G, \cdot\rangle$$

нашлись автоморфизм $\sigma$ и единица $e$ группы $\langle G, \cdot\rangle$ такие, что верны условия (13) и (14), а значит, согласно теореме 12, имеем изоморфизм $n$-арных групп

$$\langle G, f\rangle \cong \langle\langle g_1\rangle, f_1\rangle \times \ldots \times \langle\langle g_k\rangle, f_k\rangle.$$

Теорема доказана. □

В ретракте абелевой $n$-арной группы автоморфизм $\varphi$ из теоремы 1 является тождественным (теорема 10), поэтому для конечно порожденных абелевых $n$-арных групп имеем разложение аналогично как в группах.

Следствие 2. *[10]. Любая конечно порожденная абелева $n$-арная группа изоморфна прямому произведению конечного числа неразложимых абелевых полуциклических $n$-арных групп, беконечных либо конечных примарных.*

## 6. Заключение.

В работе изучались прямые произведения $n$-арных групп. Получены следующие основные результаты:

1) Доказано, что в прямом произведении $\prod_{i\in I}\langle A_i, f_i\rangle$ $n$-арных групп имеется $n$-арная подгруппа, изоморфная $\langle A_j, f_j\rangle$ $(j \in I)$, тогда и только тогда, когда найдется некоторый гомоморфизм из $\langle A_j, f_j\rangle$ в $\prod_{i\in I, i\neq j}\langle A_i, f_i\rangle$ (теорема 5);

2) Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы в прямом произведении $n$-арных групп каждый из прямых множителей имел изоморфную копию в этом произведении и пересечение этих копий одноэлементно (как в группах) (теорема 6);

3) Найдена связь между $n$-арной группой, $(\varphi, d)$-определенной на декартовом произведении групп и $n$-арными группами, которые $(\varphi_i, d_i)$-определены на множителях этого произведения (теорема 9)

4) Установлено, что теории $n$-арных групп неразложимыми $n$-арными группами являются конечные примарные (предложение 3) и бесконечные (теорема 21) полуциклические $n$-арные группы;

5) Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы любая конечно порожденная полуабелева $n$-арная группа была изоморфна прямому произведению конечного числа неразложимых полуциклических $n$-арных групп (беконечных либо конечных примарных) (теорема 22).

Пункт 5) является главным результатом данной работы.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dornte W. Untersuchungen uber ainen verallgemeinerten Gruppenbegrief // Math. Z. Bd. 29 (1928) — P. 1–19.

2. Post E. L. Poluadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940). P. 208–350.

3. Русаков С. А. Алгебраические $n$-арные системы. Минск: Навука i тэхнiка, 1992.

4. Гальмак А. М. $n$-Арные группы. Часть I. Гомель: Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, 2003.

5. Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 уч. года. М.: Наука, 1974.

6. W. Dudek. A note on the axioms of n-groups / Dudek W., Glasek K., Gleichgewicht B. // Coll. Math. Soc.J.Bolyai. Vol. 29 (1977). P. 195–202.

7. Глускин Л. М. Позиционные оперативы // Мат. сборник. Т. 68(110), №3. 1965. С. 444–472.

8. Hosszu M. On the explicit form of n-group operacions // Publ. Math. 1963. Vol. 10. №1-4. P. 88-92.

9. Общая алгебра. / Под общей ред. Л. А. Скорнякова. Т. 2. М.: Наука, 1991.

10. J. Timm. Kommutative n-Gruppen. Diss,, Hamburg. 1967.

11. А. М. Гальмак. Полуабелевы $n$-арные группы с идемпотентами // Веснік ВДУ ім П. М. Машэрава. 1999. № 2(12). С. 56–60.

12. Glasek K. and Gleichgewicht B. Abelian n-groups // Proc. Congr. Vath/ Soc. J. Bolyai. Esztergom. (1977). P. 321–329.

13. А. М. Гальмак, Г. Н. Воробьев. Тернарные группы отражений. Минск: Беларуская навука. 1998, 128 с.

14. W. A. Dudek and J. Michalski. On retrakts of polyadic groups / Dudek W.A. and Michalski J. // Demonstratio Math. 17 (1984), 281–301.

15. Щучкин Н. А. Полуциклические $n$-арные группы // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2009. №3(54). С. 186–194.

16. Glazek K., Michalski J. and Sierocki I. On evaluation of some polyadic groups // Contributions to general algebra 3: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky. Wiena, 1985. P. 157–171.

17. Курош А. Г. Теория групп. 3-е изд. М.: Наука, 1967.

18. В. С. Монахов. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышейшая школа, 2006.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет.
Получено 19.05.2014