

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-206-226

**Применение теоретико-числовых сеток  
в задачах дифракции звука на упругих телах**<sup>12</sup>

Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин

**Добровольский Николай Николаевич** — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: Nikolai.Dobrovolsky@gmail.com*

**Скобельцын Сергей Алексеевич** — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: skbl@rambler.ru*

**Толоконников Лев Алексеевич** — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru*

**Ларин Николай Владимирович** — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: Larin220577@gmail.com*

**Аннотация**

В статье рассматривается задача дифракции плоской гармонической звуковой волны на упругом эллипсоиде. Для рассеянного поля используется представление в виде интеграла Кирхгофа. Это приводит к необходимости решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода для определения потенциала смещения в рассеянной волне на поверхности рассеивателя. Показано, что использование квадратурных формул на основе сеток Смоляка позволяет сократить число вычислений при приближенном вычислении интегралов, при решении интегрального уравнения и при вычислении рассеянного акустического давления в ближней зоне. Этот метод сравнивается с вычислением интегралов методом простых ячеек, который имеет тот же порядок точности. Проведено сопоставление времени решения задачи с вычислением давления в окрестности эллипсоида на основе решения интегрального уравнения двумя методами вычисления интегралов.

*Ключевые слова:* дифракция, звуковые волны, линейные интегральные уравнения, квадратурные формулы, периодизация, сетки Смоляка, параллелепипедальные сетки.

*Библиография:* 19 названий.

**Для цитирования:**

Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин. Применение теоретико-числовых сеток в задачах дифракции звука на упругих телах // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 206–226.

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект № 19-41-710005\_р\_а.

<sup>2</sup>Исследование выполнено за счет гранта правительства Тульской области (договор № ДС/306 от 16.11.2021)

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-206-226

**Application of number-theoretic grids  
in problems of sound diffraction by elastic bodies**

N. N. Dobrovol'skii, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov, N. V. Larin

**Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich** — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).

*e-mail: Nikolai.Dobrovolsky@gmail.com*

**Skobel'tsyn Sergey Alekseevich** — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

*e-mail: skbl@rambler.ru*

**Tolokonnikov Lev Alekseevich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

*e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru*

**Larin Nikolai Vladimirovich** — candidate of physical and mathematical sciences, department of applied mathematics and computer science, Tula State University (Tula).

*e-mail: Larin220577@gmail.com*

**Abstract**

The article considers the problem of a plane harmonic sound wave diffraction by an elastic ellipsoid. To represent the scattered field, a representation in the form of a Kirchhoff integral is used. This leads to the need to solve the Fredholm integral equation of the second kind to determine the displacement potential in the scattered wave on the surface of the scatterer. It is shown that the use of quadrature formulas based on number-theoretic grids allows you to reduce the number of calculations for the approximate calculation of integrals, when solving the integral equation and when calculating the scattered acoustic pressure in near field. This method is compared with the calculation of integrals by the simple cell method, which has the same order of accuracy. The time of solving the problem is compared with the calculation of pressure in the vicinity of the ellipsoid based on the solution of an integral equation by two methods for calculating integrals.

*Keywords:* diffraction, sound waves, linear integral equations, quadrature formulas, periodization, Smolyak grids, parallelepiped grids.

*Bibliography:* 19 titles.

**For citation:**

N.N. Dobrovol'skii, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov, N. V. Larin, 2022, "Application of number-theoretic grids in problems of sound diffraction by elastic bodies" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 206–226.

**1. Введение**

Многие задачи акустики эффективно могут быть решены методом граничных интегральных уравнений [1], основанный на интегральном представлении излучаемого или рассеянного

звукового поля в форме Кирхгофа-Гельмгольца, которая предполагает определение акустического поля вне рассеивателя (излучателя) по известным характеристикам поля на поверхности объекта в виде интеграла по этой поверхности. Представление рассеянной звуковой волны в форме Кирхгофа-Гельмгольца приводит к необходимости приближенного решения интегральных уравнений относительно потенциала скорости или смещения частиц жидкости в рассеянном поле.

Во многих источниках такой подход называют методом граничных интегральных уравнений или методом граничных элементов (ВЕМ, МГЭ). Он активно используется исследователями для решения задач о рассеянии звука различными объектами: с идеальной поверхностью, жидкими, упругими [2–6].

В монографии Шендерова [7] изложены принципы использования интегральных уравнений для решения задач излучения и дифракции звука, представлено решение некоторых задач.

Численная реализация метода граничных интегральных уравнений имеет ряд ограничений. Одно из них связано с обеспечением требуемой точности приближенного решения интегрального уравнения. При дискретизации интегрального уравнения для получения удовлетворительной точности возникает необходимость разбиения поверхности, по которой осуществляется интегрирование, на интервалы длиной не более одной десятой длины звуковой волны. Это ограничивает волновые размеры тела, так как порядок системы алгебраических уравнений, возникающей при дискретизации, не должен быть слишком большим для возможности практических вычислений. Таким образом, возникает проблема построения сетки со сравнительно небольшим числом узлов, чтобы решение задачи с требуемой точностью было пригодным в широком диапазоне волновых размеров тела.

Вторая проблема связана с тем, что использование функций источника приводит к тому, что подынтегральные функции часто имеют особенности и для вычисления таких интегралов приходится использовать специальные приемы.

В работе авторов [8] на основе решения эталонной задачи дифракции сферической звуковой волны на абсолютно жесткой сфере проведен сравнительный анализ решений интегральных уравнений с помощью классических формул численного интегрирования и формул, построенных на теоретико-числовых сетках. В данной работе поставлена задача оценки эффективности использования формул численного интегрирования, построенных на теоретико-числовых сетках, при решении задачи дифракции звука на упругом теле – эллипсоиде.

В данной работе теоретико-числовые сетки будут применяться при решении классической задачи численного интегрирования при реализации метода граничных интегральных уравнений в задачах акустики. В работе будут применяться параллелепипедальные сетки (см. [9]), требующие периодизации и учитывающие класс гладкости при интегрировании периодических функций из класса Коробова  $E_s^\alpha$ .

Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода и Вольттера описаны, как с применением теоретико-числовых методов [10], [11], так и с применением других методов [12, 13, 14].

Математические вопросы построения интерполяционных многочленов с использованием, как теоретико-числовых, так и других методов описаны в работах [10, 15, 16, 17, 20].

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим упругий эллипсоид  $\Omega$  с полуосями  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , находящийся в безграничном пространстве  $\Omega_0$ , заполненным идеальной жидкостью с плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$ . Будем считать, что материал эллипсоид – однородный изотропный, имеющий плотность  $\rho$  и модули упругости Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$ . Пусть из внешнего пространства на тело падает плоская звуковая волна с потенциалом смещения  $\psi_p$

$$\psi_p = A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (1)$$

где  $A$  – амплитуда волны;  $\mathbf{k}$  – волновой вектор, определяющий направление распространения и частоту падающей волны;  $k = |\mathbf{k}| = \omega/c_0 = 2\pi/\lambda_0$  – волновое число в окружающей жидкости;  $\omega$  – круговая частота;  $\lambda_0$  – длина волны;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения;  $t$  – время.

В дальнейшем временной множитель  $e^{-i\omega t}$  у  $\psi_p$  и всех параметров движения, зависящих от времени, будем опускать (колебания предполагаются стационарными).

Потенциал  $\psi_p$ , определяет вектор смещения  $\mathbf{u}_p$  и давление  $p_p$  в падающей волне

$$\mathbf{u}_p = \text{grad}\psi_p, \quad p_p = \rho_0 \omega^2 \psi_p. \quad (2)$$

Геометрия задачи представлена на рис. 1.

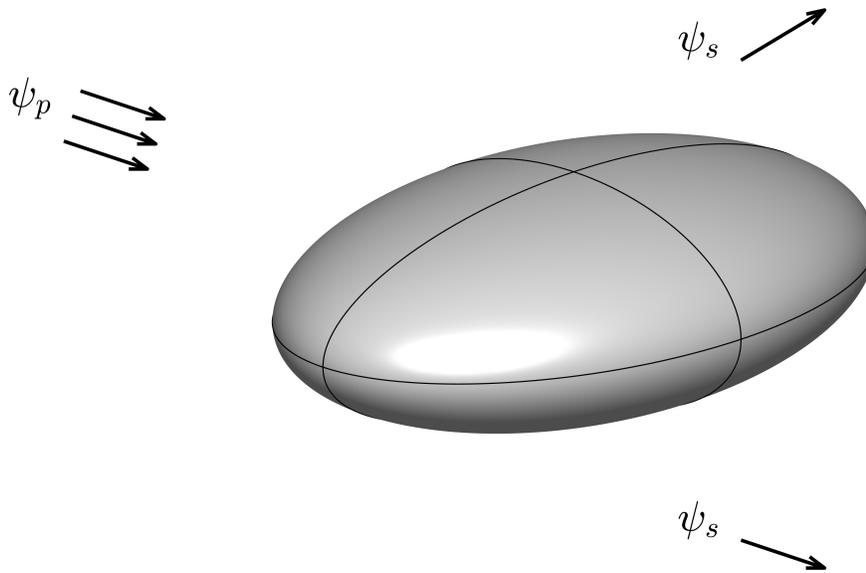


Рис 1: Геометрия задачи

Требуется определить акустическое поле, рассеянное эллипсоидом  $\Omega$ .

### 3. Математическая постановка задачи дифракции

Введем декартову систему координат

$$x_1, x_2, x_3. \quad (3)$$

с началом  $O$  в центре эллипсоида так, чтобы полуоси эллипсоида  $a, b, c$  были направлены по осям  $Ox_1, Ox_2$  и  $Ox_3$ , соответственно. Тогда уравнение поверхности эллипсоида  $\Gamma(\Omega)$  может быть записано в каноническом виде

$$\Gamma: \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1. \quad (4)$$

Единичные базисные векторы системы координат будем обозначать  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Также будем использовать сферическую систему координат  $r, \theta, \varphi$ , связанную с  $x_1, x_2, x_3$  соотношениями

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta.$$

Будем задавать направление вектора  $\mathbf{k}$  углами  $\theta_0, \varphi_0$ . Тогда в базисе  $\mathbf{e}_k$  он может быть представлен в виде  $\mathbf{k} = (k \sin \theta_0 \cos \varphi_0, k \sin \theta_0 \sin \varphi_0, k \cos \theta_0)$ .

Для решения задачи дифракции надо найти решения уравнений движения жидкости в  $\Omega_0$  и упругой среды в  $\Omega$ , удовлетворяющих граничным условиям на поверхности эллипсоида и условиям излучения звука на бесконечности [23].

Решение проводится в рамках моделей движения идеальной жидкости [21] и линейной теории упругости [22].

В результате отражения падающей звуковой волны от упругого тела формируется отраженное акустическое поле, а в теле  $\Omega$  – упругие колебания. Обозначим потенциал смещения в рассеянном поле  $\psi_s$ , а вектор смещения в  $\Omega$  –  $\mathbf{u}$ . При этом смещение частиц жидкости в  $\Omega_0$  будет выражаться соотношением  $u_0 = \text{grad } \psi_0$ , а акустическое давление  $p_0 = \rho_0 \omega^2 \Psi_0$  (подобно (2)), где  $\psi_0 = \psi_p + \psi_s$ .

Таким образом, искомыми функциями в задаче дифракции являются: потенциал смещения в рассеянном поле  $\psi_s$  в области  $\Omega_0$  и смещение частиц упругой среды  $\mathbf{u}$  в  $\Omega$ .

С учетом гармонической зависимости  $\psi_s$  и  $\mathbf{u}$  от времени в отношении  $\psi_s$  надо решать уравнение Гельмгольца [21]

$$\Delta \psi_s + k^2 \psi_s = 0. \quad (5)$$

Смещение  $\mathbf{u}$  должно удовлетворять уравнениям движения упругой среды в напряжениях [22]

$$\text{Div } \sigma + \rho \mathbf{F} = -\rho \omega^2 \mathbf{u}, \quad (6)$$

где  $\text{Div } \sigma$  – первый инвариант ковариантной производной тензора напряжений  $\sigma$ ;  $\mathbf{F}$  – вектор объемных сил, который обычно в задачах дифракции равен 0.

Тензор напряжений в случае изотропной среды выражается через  $\mathbf{u}$  таким законом Гука

$$\sigma = \lambda \text{div } \mathbf{u} \delta + 2\mu \varepsilon, \quad (7)$$

где  $\delta$  – тензор Кронекера;  $\varepsilon$  – тензор малых деформаций Коши, компоненты которого в общем случае являются линейными комбинациями компонентов вектора  $\mathbf{u}$  и их первых производных.

В частности, в декартовой системе координат (3) компоненты тензора малых деформаций определяются соотношениями

$$\varepsilon_{km} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right). \quad (8)$$

На поверхности эллипсоида  $\Gamma$  должны выполняться условия сопряжения движений частиц жидкости и упругого материала, которые состоят в равенстве нормальных смещений и напряжений и отсутствии касательных напряжений в упругой среде [21]

$$\mathbf{r} \in \Gamma : u_n = \frac{\partial \psi_0}{\partial n}; \quad \sigma_{nn} = -\rho_0 \omega^2 \psi_0; \quad \sigma_{n\tau_1} = 0; \quad \sigma_{n\tau_2} = 0, \quad (9)$$

где  $u_n, \sigma_{nn}$  – проекции векторов  $\mathbf{u}$  и вектора напряжений  $\mathbf{p} = \sigma \cdot \mathbf{n}$  на внешнюю нормаль  $\mathbf{n}$  к  $\Gamma$  в точке  $\mathbf{r}$ ;  $\sigma_{n\tau_1}, \sigma_{n\tau_2}$  – проекции  $\mathbf{p}$  на два неколлинеарных вектора в касательной плоскости к  $\Gamma$  в точке  $\mathbf{r}$ .

Условия излучения на бесконечности для потенциала рассеянной звуковой волны  $\psi_s$  могут быть представлены в виде [23]

$$\text{при } r \rightarrow \infty : \quad \psi_s = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \left( \frac{\partial \psi_s}{\partial r} - ik \psi_s \right) = O\left(\frac{1}{r}\right). \quad (10)$$

Таким образом, математически задача состоит в необходимости найти решения уравнений (5), (6), удовлетворяющих граничным условиям (9) и условиям излучения на бесконечности (10).

Уравнения (6) можно свести к уравнениям, содержащим в качестве неизвестных только компоненты смещения  $\mathbf{u}$ . Для изотропного однородного линейно-упругого тела, используя (7), (8), можно получить

$$(\text{Div } \sigma)_k = \frac{\partial \sigma_{km}}{\partial x_k} = \lambda \delta_{km} \frac{\partial \text{div } \mathbf{u}}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right). \quad (11)$$

Подставляя выражения этих частных производных в уравнения (6), получим

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \text{div } \mathbf{u}}{\partial x_k} + \mu (\Delta u)_k + \rho (F_k + \omega^2 u_k) = 0. \quad (12)$$

Полученные уравнения движения в перемещениях, содержащие три функции  $u_j$ , называются дифференциальными уравнениями Ламе. Система уравнений (11) эквивалентна дифференциальному уравнению в векторной форме

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho (\mathbf{F} - \omega^2 \mathbf{u}) = 0, \quad (13)$$

которое получится из уравнений (12), если каждое из них умножить на  $\mathbf{e}_k$ , а затем просуммировать по индексу  $k$ , учитывая, что  $\text{div } \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ .

#### 4. Решение задачи методом граничных интегральных уравнений

Согласно методу интегральных уравнений [7, 8] рассеянное телом акустическое поле записывается в виде

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \left[ \psi_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})}{\partial n} - \frac{\partial \psi_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial n} \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \right] d\Gamma, \quad (14)$$

где  $\mathbf{x}$  – точка наблюдения, имеющая координаты  $(x_1, x_2, x_3)$ ;  $\boldsymbol{\xi}$  – точка на поверхности тела  $\Gamma$  с координатами  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ;  $\Psi$  – функция Грина для свободного пространства, удовлетворяющая неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) + k^2 \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = -4\pi \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}); \quad (15)$$

$d\Gamma = d\Gamma(\boldsymbol{\xi})$  – элемент поверхности в окрестности  $\boldsymbol{\xi}$ :  $\delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \delta(d)$  – дельта-функция;  $d = |\mathbf{d}|$ ;  $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} = (x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3)$ ;  $(d = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2})$ .

Дифференцирование и интегрирование в формуле (14) производится по переменной  $\boldsymbol{\xi}$ . Заметим, выражение  $\psi_0(\mathbf{x})$  в (14) через значение потенциала  $\psi_0$  и его нормальной производной на границе  $\Gamma$  получается с учетом выполнения условий излучения на бесконечности (10).

Решение (15) известно, оно приведено, например, в [7]

$$\Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \frac{\exp(ikd)}{d}, \quad (16)$$

При этом

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})}{\partial n} = \text{grad} \Psi \cdot \mathbf{n}, \quad \text{grad} \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \frac{(ikd - 1) \exp(ikd)}{d^3} \mathbf{d}.$$

Представим первые два граничных условия из (9) в виде

$$\left. \frac{\partial \psi_s}{\partial n} \right|_{\Gamma} = u_n - \frac{\partial \psi_p}{\partial n}, \quad \psi_s|_{\Gamma} = -\psi_p - \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \sigma_{nn}. \quad (17)$$

Будем рассматривать точки  $\mathbf{x} \in \Gamma$ , тогда из уравнения (14) с учетом (17) можно получить

$$\frac{1}{2}\psi_s(\mathbf{x}) + \frac{1}{\rho_0\omega^2} \int_{\Gamma} \sigma_{nn}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})}{\partial n} d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} u_n(\boldsymbol{\xi}) \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi_p(\boldsymbol{\xi})}{\partial n} \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) - \int_{\Gamma} \psi_p(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})}{\partial n} d\Gamma(\boldsymbol{\xi}). \quad (18)$$

Здесь интегралы, содержащие известные функции перенесены в правую часть. В качестве неизвестных функций выступают  $\psi_s(\mathbf{x})$  и компоненты вектора смещения в упругом материале  $u_k(\mathbf{x})$  на поверхности  $\Gamma$ , через которые выражаются и  $u_n(\boldsymbol{\xi})$ , и  $\sigma_{nn}(\boldsymbol{\xi})$ .

Для нахождения компонентов  $u_k(\mathbf{x})$  используем фундаментальное решение для уравнения движения упругой среды в форме (13) или (12).

Фундаментальное решение уравнения (13) для единичной сосредоточенной массовой силы  $\mathbf{F}_m = \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_m$ , меняющейся по гармоническому закону  $\exp(-i\omega t)$ , т.е. решение уравнения

$$[\mu \nabla^2 + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot] U_m(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) + \rho \omega^2 U_m(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = -\delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_m,$$

определяется выражением [26, 22] для компонентов вектора смещения  $U_m$

$$U_{mn}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left[ \delta_{mn} k_2 \frac{e^{ik_2 d}}{d} - \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} \left( \frac{e^{ik_1 d}}{d} - \frac{e^{ik_2 d}}{d} \right) \right], \quad (19)$$

где  $k_1 = \omega/c_1$ ,  $k_2 = \omega/c_2$ ;  $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ ,  $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  – скорости продольных и поперечных волн в упругой среде соответственно.

В силу линейности модели приложенные в точке сосредоточенные нагрузки действуют независимо. Тогда для перемещения и напряжения соответствующих фундаментальному решению можно написать

$$\mathbf{U}_m = U_{mn}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{P}_m = P_{mn}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_n, \quad (20)$$

где  $U_{mn}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$  и  $P_{mn}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$  представляют собой перемещения и напряжения, возникающие в точке  $\mathbf{x}$  в  $n$ -ом направлении и соответствующие единичной сосредоточенной нагрузке, действующей в  $m$ -ом направлении (направлении единичного вектора  $\mathbf{e}_m$ ) и приложенной в точке  $\boldsymbol{\xi}$  [26, 25].

Найти компоненты фундаментального вектора напряжений  $P_{ik}$  можно, подставив выражение (19) для  $U_{km}$  в формулу для компонентов напряжения  $\mathbf{p}$ , приложенного к площадке с нормалью  $\mathbf{n} = n_k \mathbf{e}_k$

$$p_k = \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial n} + u_{j,k} n_j \right) + \lambda u_{j,j} n_k.$$

Учитывая (20) можем записать

$$\mathbf{P}_i = \mu \left( \frac{\partial U_{ki}}{\partial n} \mathbf{e}_k + U_{kj,i} n_j \mathbf{e}_k \right) + \lambda U_{kj,j} n_i \mathbf{e}_k = \left[ \mu \left( \frac{\partial U_{ki}}{\partial n} + U_{kj,i} n_j \right) + \lambda U_{kj,j} n_i \right] \mathbf{e}_k.$$

Последнее выражение, стоящее в квадратных скобках в соответствии с (20) задает компоненты фундаментального вектора напряжений  $P_{ik}$ .

Решение уравнения (13) на основе формулы Сомильяны [27], построенной на основе тождества Бетти, с использованием фундаментального решения можно представить в виде

$$u_j(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \left[ p_i(\boldsymbol{\xi}) U_{ij}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) - P_{ij}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) u_i(\boldsymbol{\xi}) \right] d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Omega} \rho F_i(\boldsymbol{\xi}) U_{ij}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) d\Omega(\boldsymbol{\xi}), \quad (21)$$

где  $p_i(\boldsymbol{\xi})$  – компоненты вектора напряжений  $\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  на площадке  $d\Gamma(\boldsymbol{\xi})$  с внешней нормалью  $\mathbf{n}$  в точке  $\boldsymbol{\xi}$ .

Если использовать (21) для точек границы  $\Gamma$  с учетом того, что внешние объемные силы отсутствуют ( $\mathbf{F} = 0$ ), то получим интегральное уравнение относительно неизвестных компонент смещений и напряжений  $u_k, p_i$  на границе  $\Gamma$

$$\frac{1}{2}u_j(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \left( p_i(\boldsymbol{\xi})U_{ij}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) - P_{ij}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})u_i(\boldsymbol{\xi}) \right) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}). \quad (22)$$

Для проведения дальнейших рассуждений условимся, что вектор напряжений в упругой среде на площадке границы  $\Gamma$  с нормалью  $\mathbf{n}$  записан через компоненты следующим образом  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ . Аналогично компоненты вектора смещения частиц упругой среды обозначим  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ . Единичные касательные векторы и вектор нормали к поверхности  $\Gamma$  в каждой точке границы обозначим соответственно  $\boldsymbol{\tau}_k = (\tau_{k1}, \tau_{k2}, \tau_{k3})$  ( $k = 1, 2$ ) и  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ , при этом будем вводить  $\boldsymbol{\tau}_k$  так, что тройка векторов  $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n}$  является правой.

Используем введенные обозначения для представления компонент граничных условий (9) на поверхности тела

$$\begin{aligned} u_{0n} &= \text{grad}(\psi_p + \psi_s) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial(\psi_p + \psi_s)}{\partial n}, & p_0 &= \rho_0 \omega^2 (\psi_p + \psi_s), \\ u_n &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3, & p_n &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3, \\ p_{\tau_1} &= \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\tau}_1 = p_1 \tau_{11} + p_2 \tau_{12} + p_3 \tau_{13}, & p_{\tau_2} &= \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = p_1 \tau_{21} + p_2 \tau_{22} + p_3 \tau_{23}. \end{aligned}$$

Тогда сами граничные условия (9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_s}{\partial n} - (u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3) &= -\frac{\partial \psi_p}{\partial n}, \\ \psi_s - \frac{1}{\rho_0 \omega^2} (p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3) &= -\psi_p, \\ p_1 \tau_{11} + p_2 \tau_{21} + p_3 \tau_{31} &= 0, & p_1 \tau_{21} + p_2 \tau_{22} + p_3 \tau_{32} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь известные величины перенесены в правую часть.

Таким образом, интегральная формулировка поставленной задачи выглядит следующим образом: требуется найти решение уравнений (18), (22) при соблюдении граничных условий (23).

## 5. Дискретизация интегральных соотношений

Для численного решения полученных интегральных соотношений проведем их дискретизацию. Поверхность эллипсоида  $\Gamma$  разобьем на  $M$  достаточно малых участков  $\Gamma_m$  так, чтобы  $\Gamma = \bigcup_m \Gamma_m$ , а изменение неизвестных функций  $\psi_s, \mathbf{u}, \mathbf{p}$  в пределах  $m$ -го участка было столь незначительно, чтобы можно было бы считать постоянными на участке

$$\psi_s(\mathbf{x})|_{\Gamma_m} \approx \psi_s(\boldsymbol{\xi}_m), \quad \frac{\partial \psi_s}{\partial n} \Big|_{\Gamma_m} \approx \frac{\partial \psi_s}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}_m), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\Gamma_m} \approx \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_m), \quad \mathbf{p}(\mathbf{x})|_{\Gamma_m} \approx \mathbf{p}(\boldsymbol{\xi}_m),$$

где  $\mathbf{x}_m$  – некоторая фиксированная точка участка  $\Gamma_m$ , близкая к его геометрическому центру.

Таким образом, полагается, что  $\psi_s, \frac{\partial \psi_s}{\partial n}, u_1, u_2, u_3, p_1, p_2, p_3$  являются постоянными в

пределах каждого участка  $\Gamma_m$ . При введенных допущениях уравнение (18) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\psi_s(\mathbf{x}_k) + \frac{1}{\rho_0\omega^2} \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} p_n(\boldsymbol{\xi}_m) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\xi}_m)}{\partial n} d\Gamma(\boldsymbol{\xi}_m) + \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} u_n(\boldsymbol{\xi}_m) \Psi(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\xi}_m) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}_m) = \\ = \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} \frac{\partial \psi_p(\boldsymbol{\xi}_m)}{\partial n} \Psi(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\xi}_m) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}_m) - \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} \psi_p(\boldsymbol{\xi}_m) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\xi}_m)}{\partial n} d\Gamma(\boldsymbol{\xi}_m). \end{aligned} \quad (24)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} P_{1mk}^{<1>} &= \frac{1}{\rho_0\omega^2} \int_{\Gamma_m} n_1(\boldsymbol{\xi}_m) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\xi}_m)}{\partial n} d\Gamma(\boldsymbol{\xi}_m), & P_{2mk}^{<1>} &= \frac{1}{\rho_0\omega^2} \int_{\Gamma_m} n_2(\boldsymbol{\xi}_m) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\xi}_m)}{\partial n} d\Gamma(\boldsymbol{\xi}_m), \\ P_{3mk}^{<1>} &= \frac{1}{\rho_0\omega^2} \int_{\Gamma_m} n_3(\boldsymbol{\xi}_m) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\xi}_m)}{\partial n} d\Gamma(\boldsymbol{\xi}_m), \\ U_{1mk}^{<1>} &= \int_{\Gamma_m} n_1(\boldsymbol{\xi}_m) \Psi(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\xi}_m) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}_m), & U_{2mk}^{<1>} &= \int_{\Gamma_m} n_2(\boldsymbol{\xi}_m) \Psi(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\xi}_m) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}_m), \\ U_{3mk}^{<1>} &= \int_{\Gamma_m} n_3(\boldsymbol{\xi}_m) \Psi(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\xi}_m) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}_m), \\ G_{mk}^{<1>} &= \int_{\Gamma_m} \frac{\partial \psi_p(\boldsymbol{\xi}_m)}{\partial n} \Psi(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\xi}_m) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}_m) - \int_{\Gamma_m} \psi_p(\boldsymbol{\xi}_m) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\xi}_m)}{\partial n} d\Gamma(\boldsymbol{\xi}_m). \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда с учетом  $\boldsymbol{\xi}_k = \mathbf{x}_k$  (24) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\psi_s(\mathbf{x}_k) + \sum_{m=1}^M P_{1mk}^{<1>} p_1(\mathbf{x}_m) + \sum_{m=1}^M P_{2mk}^{<1>} p_2(\mathbf{x}_m) + \sum_{m=1}^M P_{3mk}^{<1>} p_3(\mathbf{x}_m) + \\ + \sum_{m=1}^M U_{1mk}^{<1>} u_1(\mathbf{x}_m) + \sum_{m=1}^M U_{2mk}^{<1>} u_2(\mathbf{x}_m) + \sum_{m=1}^M U_{3mk}^{<1>} u_3(\mathbf{x}_m) = \sum_{m=1}^M G_{mk}^{<1>}. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично, дискретную форму придадим уравнению (22)

$$\frac{1}{2}u_j(\mathbf{x}_k) = \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} \left( p_i(\boldsymbol{\xi}_m) U_{ij}(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\xi}_m) - P_{ij}(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\xi}_m) u_i(\boldsymbol{\xi}_m) \right) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}_m). \quad (27)$$

Обозначим

$$(U_{mk}^{<2>})_{ij} = \int_{\Gamma_m} U_{ij}(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\xi}_m) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}_m), \quad (\bar{P}_{mk}^{<2>})_{ij} = - \int_{\Gamma_m} P_{ij}(\mathbf{x}_k; \boldsymbol{\xi}_m) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}_m). \quad (28)$$

Тогда (27) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}u_1(\xi_k) &= \left( \sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{11} \right) p_1(\xi_m) + \left( \sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{21} \right) p_2(\xi_m) + \\
 &+ \left( \sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{31} \right) p_3(\xi_m) + \left( \sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{11} \right) u_1(\xi_m) + \\
 &+ \left( \sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{21} \right) u_2(\xi_m) + \left( \sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{31} \right) u_3(\xi_m), \\
 \frac{1}{2}u_2(\xi_k) &= \left( \sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{12} \right) p_1(\xi_m) + \left( \sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{22} \right) p_2(\xi_m) + \\
 &+ \left( \sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{32} \right) p_3(\xi_m) + \left( \sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{12} \right) u_1(\xi_m) + \\
 &+ \left( \sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{22} \right) u_2(\xi_m) + \left( \sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{32} \right) u_3(\xi_m) \\
 \frac{1}{2}u_3(\xi_k) &= \left( \sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{13} \right) p_1(\xi_m) + \left( \sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{23} \right) p_2(\xi_m) + \\
 &+ \left( \sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{33} \right) p_3(\xi_m) + \left( \sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{13} \right) u_1(\xi_m) + \\
 &+ \left( \sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{23} \right) u_2(\xi_m) + \left( \sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{33} \right) u_3(\xi_m).
 \end{aligned} \tag{29}$$

Дискретный аналог граничных условий (23) представим в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi_s}{\partial n}(\xi_m) - (u_1(\xi_m)n_1(\xi_m) + u_2(\xi_m)n_2(\xi_m) + u_3(\xi_m)n_3(\xi_m)) &= -\frac{\partial \psi_p}{\partial n}(\xi_m), \\
 \psi_s(\xi_m) - \frac{1}{\rho\omega^2}(p_1(\xi_m)n_1(\xi_m) + p_2(\xi_m)n_2(\xi_m) + p_3(\xi_m)n_3(\xi_m)) &= -\psi_p(\xi_m), \\
 p_1(\xi_m)\tau_{11}(\xi_m) + p_2(\xi_m)\tau_{21}(\xi_m) + p_3(\xi_m)\tau_{31}(\xi_m) &= 0, \\
 p_1(\xi_m)\tau_{12}(\xi_m) + p_2(\xi_m)\tau_{22}(\xi_m) + p_3(\xi_m)\tau_{32}(\xi_m) &= 0,
 \end{aligned} \tag{30}$$

где  $\xi_m \in \Gamma_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ .

Таким образом, если положить, что граница  $\Gamma$  разбита на  $M$  граничных элементов и неизвестные функции постоянны на каждом элементе, то для нахождения  $8 \times M$  неизвестных:  $\psi_s(\mathbf{x}_m)$ ,  $\frac{\partial \psi_s}{\partial n}(\mathbf{x}_m)$ ,  $u_1(\mathbf{x}_m)$ ,  $u_2(\mathbf{x}_m)$ ,  $u_3(\mathbf{x}_m)$ ,  $p_1(\mathbf{x}_m)$ ,  $p_2(\mathbf{x}_m)$ ,  $p_3(\mathbf{x}_m)$  надо решать систему  $8 \times M$  линейных алгебраических уравнений (26), (29), (30).

Решение полученной системы позволяет найти значение искомой величины  $\psi_s$  в любой точке области  $\Omega_0$  по формуле

$$\psi_s(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \psi_p(\xi)}{\partial n} - u_n(\xi) \right) \Psi(\mathbf{x}; \xi) d\Gamma(\xi) - \int_{\Gamma} \left( \psi_p(\xi) + \frac{p_n(\xi)}{\rho\omega^2} \right) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}; \xi)}{\partial n} d\Gamma(\xi). \tag{31}$$

где  $\mathbf{x}$  – произвольная внутренняя точка рассматриваемой области  $\Omega_0$ ;  $\xi \in \Gamma$ .

## 6. О вычислении интегралов

Вычисление интегралов (25), (28) выполнялось методом ячеек [24] с использованием построения сетки малых элементов поверхности  $\Gamma$  на основе параметрического уравнения по-

верхности эллипсоида [28]

$$\Gamma : x = a \sin \eta \cos \zeta, \quad y = b \sin \eta \sin \zeta, \quad z = c \cos \eta, \quad (32)$$

где  $0 \leq \eta \leq \pi$ ,  $0 \leq \zeta < 2\pi$ .

Построение сетки предполагает равномерное разбиения интервалов  $[0, \pi]$ ,  $[0, 2\pi]$  изменения параметров  $\eta$  и  $\zeta$  с фиксированным шагом  $h$  таким, что  $K = \pi/h$  – целое. Участок  $\Gamma_m$  поверхности  $\Gamma$  определяется двумя индексами  $(i, j)$  ( $i = \overline{1, K}$ ,  $j = \overline{1, 2K}$ ) и обозначается еще как  $\Gamma_{ij}$  так, что  $m = 2 \times (i - 1) \times K + j$ . При этом сам участок  $\Gamma_m$  определяется диапазоном изменения параметров  $(\eta, \zeta) \in [(i-1)h, ih] \times [(j-1)h, jh]$ , а число участков равно  $M = 2K \times K$ .

В качестве точки  $\mathbf{x}_m$ , характеризующей участок  $\Gamma_m$  выбирается точка, определяемая параметрами  $\eta_m = h(2i - 1)/2$ ,  $\zeta_m = h(2j - 1)/2$ , т. е.

$$\mathbf{x}_m : x_m = a \sin \eta_m \cos \zeta_m, \quad y_m = b \sin \eta_m \sin \zeta_m, \quad z_m = c \cos \eta_m.$$

Общий вид интегралов вида (25) или (28) можно представить в форме

$$I_{mk} = \int_{\Gamma_m} f(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m) d\Gamma(\mathbf{x}_m), \quad (33)$$

где переменной интегрирования является точка  $\mathbf{x}_m$ .

В функцию  $f(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m)$  входят функции источников, содержащие слагаемые вида  $T/d$ , где  $d = |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m|$ . Поэтому в интегралах вида  $I_{mm}$  (т. е. при  $k = m$ ) подынтегральная функция имеет особенность вида  $1/0$ .

При  $k \neq m$  малый размер участка  $\Gamma_m$  позволяет вычислять интеграл  $I_{mk}$ , полагая подынтегральную функцию постоянной в пределах участка.

Приближенное значение площади участка представляется в виде

$$\int_{\Gamma_m} d\Gamma(\mathbf{x}_m) \approx \sqrt{g(\eta_i, \zeta_j)} h^2,$$

где  $g(\eta_i, \zeta_j)$  – определитель матрицы первой фундаментальной формы поверхности (32) в точке  $\mathbf{x}_m = (\eta_i, \zeta_j)$ . Тогда приближенное значение интеграла (33) при  $k \neq m$  полагается равным

$$I_{mk} \approx f(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m) \sqrt{g(\eta_i, \zeta_j)} h^2.$$

При вычислении интеграла  $I_{mm}$  (при  $k \neq m$ ) использовался прием [7], основанный на его представлении в виде

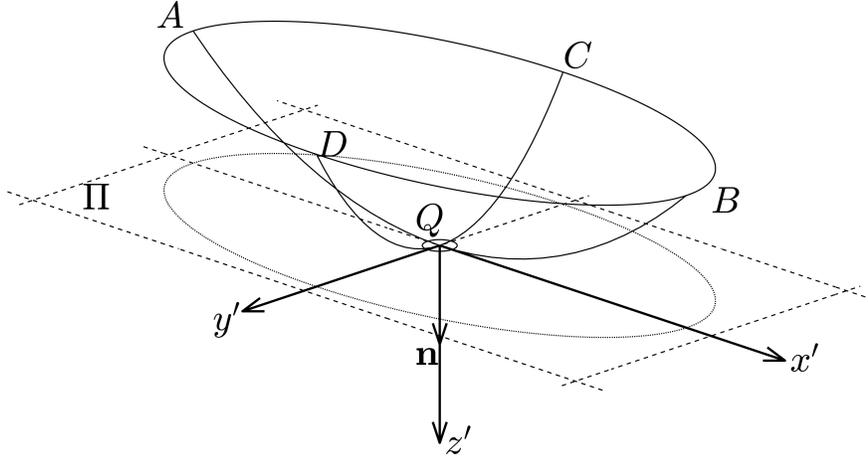
$$I_{mm} = \int_{\Gamma_m} \frac{1}{d} f_1(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (34)$$

где  $d = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_m|$ .

Согласно [7] для вычисления интеграла (34) в точке  $\mathbf{x}_m$  строится касательная плоскость  $\Pi$ . По касательным к линиям двух главных кривизн поверхности  $\Gamma$  в плоскости  $\Pi$  вводятся координатные линии  $x'$  и  $y'$  вспомогательной локальной системы координат с началом в точке касания. Третья координата  $z'$  направляется по внешней нормали  $\mathbf{n}$  в точке  $\mathbf{x}_m$ . Уравнение поверхности  $\Gamma$  в пределах участка  $\Gamma_m$  аппроксимируется параболоидом (см. рис. 2; точке  $\mathbf{x}_m$  соответствует точка  $Q$  на рисунке)

$$z' = \frac{x'^2}{2R_1} + \frac{y'^2}{2R_2},$$

где  $R_1, R_2$  – радиусы главных кривизн (кривизны дуг  $AQB, CQD$ ).

Рис 2: Аппроксимация поверхности при вычислении интеграла  $I_{mm}$ 

С координатами  $x'$ ,  $y'$  связывается полярная система координат:  $\rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ ;  $\varphi' = \arctan \frac{y'}{x'}$ . Интеграл (34) записывается в полярных координатах  $\rho'$   $\varphi'$

$$I_{mm} \approx \int_0^{2\pi} \int_0^{l(\varphi')} \frac{1}{d} f_2(\mathbf{x}) \rho' d\rho' d\varphi', \quad (35)$$

где  $f_2(\mathbf{x})$  – результат перевода функции  $f_1(\mathbf{x})$  в локальную систему координат;  $\rho' = l(\varphi')$  – проекция границы участка  $\Gamma_m$  на плоскость  $\Pi$  в полярных координатах локальной системы координат. Введем малый радиус  $R = \min\{l(\varphi')\}/1000$  (см. окружность с центром в  $Q$  на рис. 2) и разобьем интеграл (35) на 2 слагаемых

$$I_{mm} = I_1 + I_2, \quad \text{где } I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{d} f_2(\mathbf{x}) \rho' d\rho' d\varphi'; \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \int_R^{l(\varphi')} \frac{1}{d} f_2(\mathbf{x}) \rho' d\rho' d\varphi'.$$

В силу малости  $R$  интеграл  $I_1$  можно приближенно вычислить так

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{d} f_2(\mathbf{x}) \rho' d\rho' d\varphi' \approx f_2(\mathbf{x}_m) \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{\rho'} \rho' d\rho' d\varphi' = f_2(\mathbf{x}_m) \int_0^{2\pi} \int_0^R d\rho' d\varphi' = 2\pi R f_2(\mathbf{x}_m).$$

Возвращаясь к (35), получим

$$I_{mm} = 2\pi R f_2(\mathbf{x}_m) + \int_0^{2\pi} \int_R^{l(\varphi')} \frac{1}{d} f_2(\mathbf{x}) \rho' d\rho' d\varphi'. \quad (36)$$

Заметим, оставшийся интеграл  $I_2$  уже не имеет особенности в подынтегральной функции.

## 7. Построение теоретико-числовой сетки

Для вычисления интегралов из выражения потенциала смещения (31) вне поверхности тела использовались два метода:

- метод (А), основанный на стандартном методе ячеек, описанный в предыдущем разделе;
- метод (В) на основе квадратурных формул по параллелепедальным сеткам Коробова.

Рассмотрим один подход к построению квадратурных формул по параллелепедальным сеткам Коробова, впервые предложенные в работе [29].

В качестве базового соотношения вычисления двойных интегралов на основе параллелепедальных сеток рассматривается формула вычисления интеграла на квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$

$$\int_0^1 \int_0^1 g(X, Y) dX dY = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{k}{N}\right) + R1_N(g), \quad (37)$$

где  $N$  – количество узлов параллелепедальной сетки,  $a$  – оптимальный коэффициент, подбираемый экспериментально. Наиболее качественные сетки получаются, если  $N$  равно некоторому числу Фибоначчи  $F_n$ , а  $a = F_{n-1}$ .

Простейшую периодизацию функции по одной переменной проведем с помощью приема, предложенного в работе [8]. Для этого введем вспомогательную функцию

$$f_2(X, Y) = \begin{cases} f_1(X, Y), & 0 \leq Y \leq 1 \\ f_1(X, 2 - Y), & 1 < Y \leq 2 \end{cases}, \quad 2 \int_0^1 \int_0^1 f_1(X, Y) dX dY = \int_0^1 \int_0^2 f_2(X, Y) dX dY.$$

На основе этого подхода, основанного на продолжении функции, по аналогии с интегралом (37) рассмотрим квадратурную формулу по растянутой параллелепедальной сетке

$$\int_0^1 \int_0^2 g(X, Y) dX dY = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right) + R2_N(g). \quad (38)$$

Применяя к функции  $f_2$ , получаем периодизированную по одной переменной квадратурную формулу

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f_1(X, Y) dX dY &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^2 f_2(X, Y) dX dY = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_2\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right) + R2_N(f_2) = \\ &= \frac{1}{N} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} f_1\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right) + \sum_{k=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^{N-1} f_1\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, 2 - \frac{2k}{N}\right) \right) + R2_N(f_2). \end{aligned} \quad (39)$$

Заметим, что на основе параметрического представления уравнения поверхности эллипсоида (32) интегралы из представления (31) могут быть записаны в виде (40)

$$I = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} G(\eta, \zeta) \sqrt{g(\eta, \zeta)} d\zeta d\eta, \quad (40)$$

где  $g(\eta, \zeta) = \sin^2 \eta [(ab \cos \eta)^2 + (ac \sin \eta \sin \zeta)^2 + (bc \sin \eta \cos \zeta)^2]$  – определитель матрицы первой фундаментальной формы поверхности в точке  $(\eta, \zeta)$ .

Сделаем замену переменных

$$X = \eta/\pi; \quad Y = \zeta/(2\pi); \quad \eta = \pi X; \quad \zeta = 2\pi Y; \quad d\eta = \pi dX; \quad d\zeta = 2\pi dY.$$

Тогда интеграл (40) можно представить в виде

$$I = 2\pi^2 \int_0^1 \int_0^1 G_1(X, Y) dX dY, \quad (41)$$

где  $G_1(X, Y) = G(\pi X, 2\pi Y) \sqrt{g(\pi X, 2\pi Y)}$ .

По аналогии с  $f_2(X, Y)$  введем вспомогательную функцию  $G_2(X, Y)$

$$G_2(X, Y) = \begin{cases} G_1(X, Y), & 0 \leq Y \leq 1 \\ G_1(X, 2 - Y), & 1 < Y \leq 2 \end{cases}.$$

Заметим при таком задании  $G_2(X, Y)$  ее вычисление при  $Y > 1$  приводит к необходимости вычислять  $G_1(X, 2 - Y)$  в тех точках, где последняя определена.

При втором методе вычисления интеграла (31) используется представление (40) и приближенное значение находится из соотношений

$$\begin{aligned} I &= 2\pi^2 \int_0^1 \int_0^1 G_1(X, Y) dX dY \approx \frac{2\pi^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G_2\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right) = \\ &= \frac{2\pi^2}{N} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} G_1\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right) + \sum_{k=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^{N-1} G_1\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, 2 - \frac{2k}{N}\right) \right). \quad (42) \end{aligned}$$

## 8. Численные исследования

При проведении численных исследований проводились расчеты амплитуды нормированного давления  $p' = |\psi_0/\psi_p|$  в окрестности упругого эллипсоида.

Для свойств сред были выбраны значения:

$$\Omega : \quad \rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad c_0 = 1485 \text{ м/с};$$

$$\Omega_1 : \quad \rho = 2700 \text{ кг/м}^3, \quad \lambda = 5.3 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad \mu = 2.6 \times 10^{10} \text{ Па}.$$

Рассматривались две формы эллипсоида со значениями полуосей  $a=1, b=2, c=3$  и  $a=3, b=2, c=1$ . При этом "характерный" размер эллипсоида  $a_0 = (a + b + c)/3 = 2$ .

Частота падающей волны была зафиксирована значением  $ka_0 = 5$ . Направление распространения волны  $\psi_p$  определялось изменением угла  $\theta_0$  при постоянном  $\varphi_0 = 0$ .

Расчеты  $p'$  проводились в двух плоских сечениях  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  сферической поверхности с центром в начале координат системы  $x_1, x_2, x_3$  и радиусом  $R = 3a_0$  (ближняя зона). Плоскость  $\Pi_1$  выбрана так, чтобы она содержала волновой вектор падающей волны  $\mathbf{k}$  и начало координат (в рассматриваемых случаях она совпадает с координатной плоскостью  $x_2 = 0$ ), а  $\Pi_2$  повернута относительно  $\Pi_1$  вокруг оси  $Ox_3$  на  $\pi/2$  и совпадает с координатной плоскостью  $x_1 = 0$ . Точки наблюдения/измерения давления  $p'$  фиксируются координатой ( $\theta$ ) на контуре наблюдения  $r = R$ , так что демонстрация изменения давления в рассеянной волне выполняется диаграммами распределения  $p'(\theta)$ .

В первой серии численных экспериментов определялись параметры  $M$  и  $N$  сеток разбиения поверхности  $\Gamma$  на участки  $\Gamma_m$  с тем, чтобы обеспечивалась достаточная точность вычисления  $p'$ . Для этого решалась задача дифракции плоской звуковой волны на сфере (при  $a=b=c$ ) и полученные результаты сравнивались с известными аналитическими решениями такой задачи [30, 31]. Выяснилось, что при использовании арифметических операций и библиотечных функций MATLAB с использованием чисел с плавающей точкой типа double (спецификация IEEE 754) для обеспечения совпадения численных решений по формуле (31) с аналитическим

решением с точностью до 5 знаков при использовании метода, основанного на стандартном методе ячеек, требуется выбирать  $M=4147200$  ( $K=1440$ ), а при использовании квадратурной формулы (42) на основе параллелепедальной сетки Коробова –  $N=3524578$  ( $a=2178309$ ).

Заметим, узлы сетки формулы (42) в общем случае не совпадают с узлами стандартного метода ячеек даже при совпадающем числе узлов. Поэтому, при использовании формулы (42) выполняется билинейная интерполяция [24] предварительно вычисленных в точках  $\mathbf{x}_m$  значений  $\psi_p$ ,  $\frac{\partial \psi_p}{\partial n}$ ,  $u_n$ ,  $p_n$  для точек вида  $\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right)$ ,  $\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, 2 - \frac{2k}{N}\right)$ .

Иллюстрация первой серии численных экспериментов представлена на рис. 3. Здесь и далее горизонтальное направление соответствует оси  $Ox_3$ . Вертикальная ось рисунка соответствует координате  $x_1$ . Пунктирная линия  $\Gamma$  в окрестности начала координат схематично показывает сечение поверхности упругого тела (4) (здесь, для шара, это – окружность; далее, для эллипсоида, – эллипсы). Окружность единичного радиуса соответствует  $p' = 1$  показывает уровень амплитуды акустического давления в падающей волне на контуре наблюдения. Соотношение расстояний между пунктирными линиями на рисунке (между линией  $\Gamma$  и  $p' = 1$ ) характеризует отношение реальных расстояний от поверхности тела до поверхности, на которой производится измерение давления.

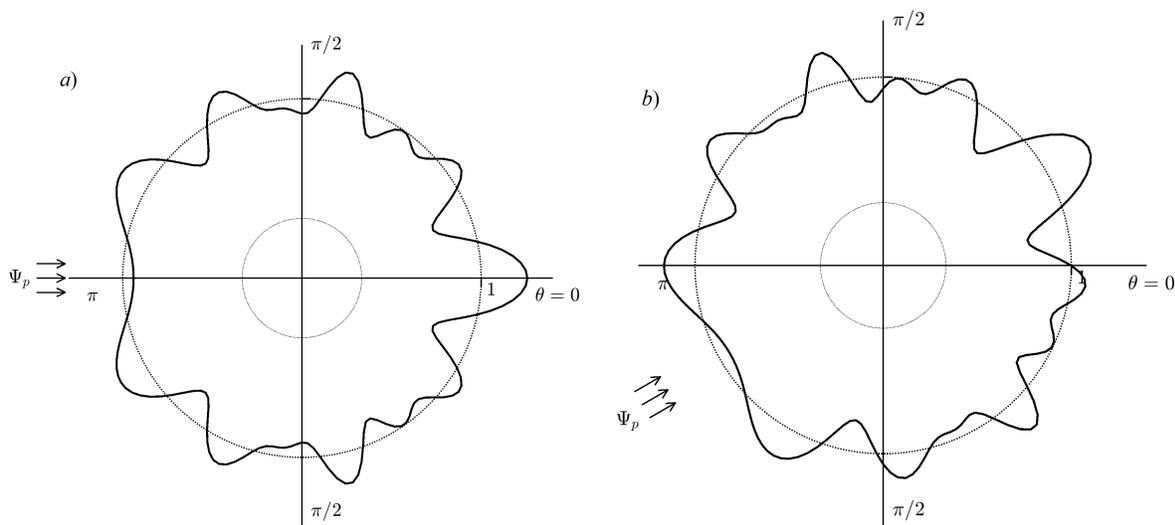


Рис 3: Распределение давления  $p'$  при  $a = b = c = 2$

На каждом рисунке изображаются две диаграммы  $p'(\theta)$ : первая – основная (сплошной линией) – для эллипсоида; вторая – вспомогательная (штриховой линией) – для шара радиуса  $a_0$  (для оценки влияния эллипсоидальной формы тела). Для шара (штриховая линия) представляются результаты аналитического решения, а сплошной линией строится диаграмма, полученная в результате вычисления интеграла (31). Заметим, что используемые параметры  $M$ ,  $N$  обеспечивают совпадение значений  $p'$ , полученных двумя методами (А и В) вычисления интеграла (31), не менее, чем в трех знаках. Поэтому для численного решения строится одна сплошная линия.

Заметим, отношение числа точек  $M/N \approx 1,177$  однако уменьшение времени расчета всей диаграммы на интервале  $\theta \in [0, \pi]$  (в обеих полуплоскостях сечений  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ ) методом В –  $t_B$  по отношению к  $t_A$  составляет только 10-12%, поскольку при использовании метода В требуется интерполяция получаемых в точках  $\mathbf{x}_m$  значений  $\psi_p$ ,  $\frac{\partial \psi_p}{\partial n}$ ,  $u_n$ ,  $p_n$ .

На рис. 3 представлены результаты расчетов нормированного давления  $p'$  в первой серии численных экспериментов при найденных  $M$ ,  $N$ . Рисунок 3.а) построен для случая  $\theta_0 = 0$ .

Рисунок 3.b) – для случая  $\theta_0 = \pi/6$ . Как видно, диаграммы, построенные пунктирной линией и сплошной совпадают в обоих случаях a), b). Это демонстрирует достаточную точность численного решения.

На рис. 4, 5 представлены результаты расчетов нормированного давления  $p'$  во второй серии численных экспериментов. В этой серии рассматривалось рассеяние звука эллипсоидом с полуосями  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ .

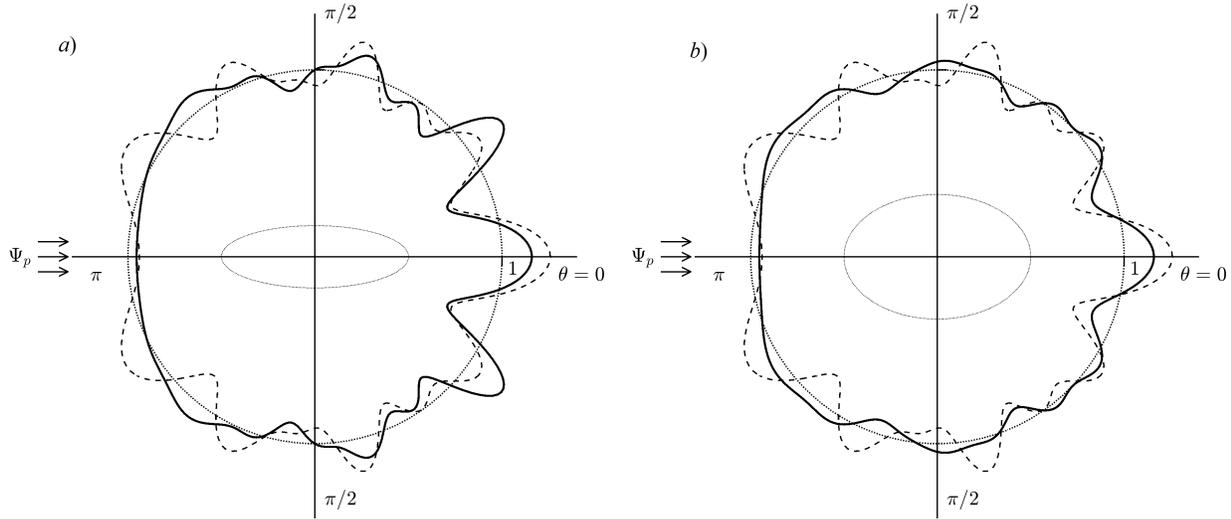


Рис 4: Распределение давления  $p'$  при  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ ,  $\theta_0 = 0$

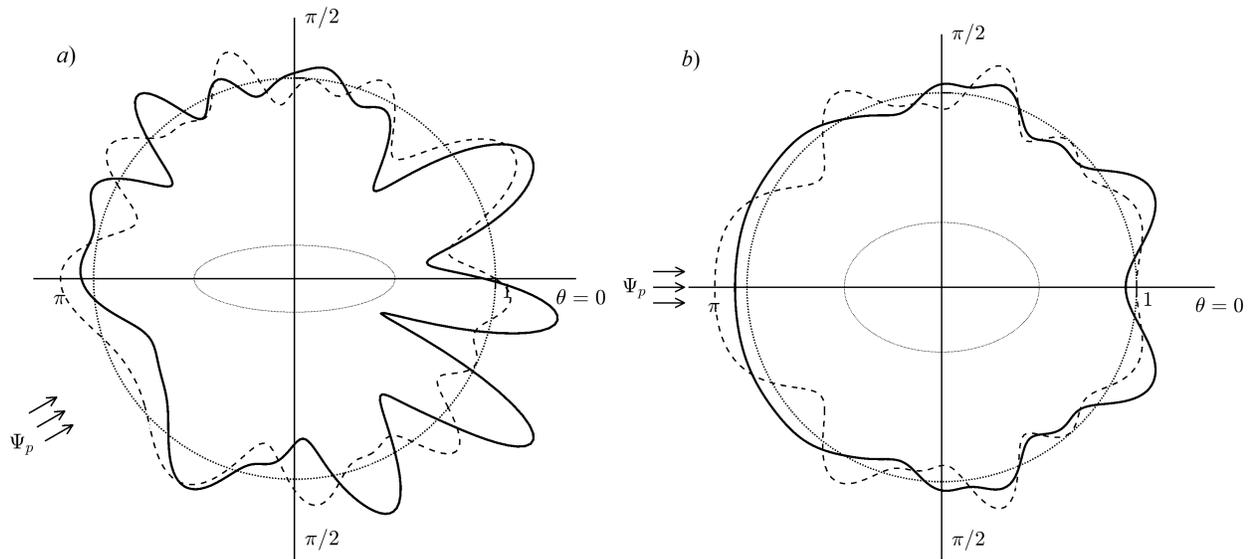


Рис 5: Распределение давления  $p'$  при  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ ,  $\theta_0 = 30^\circ$

Здесь и далее вариант a) (левая половина рисунка) показывает диаграмму в сечении  $\Pi_1$ , на правой половине (b) показана диаграмма в сечении  $\Pi_2$ .

Несовпадение диаграмм, изображенных штриховой и сплошной линиями, показывает заметное влияние формы тела на распределение давления в ближнем поле рассеянной волны. Распространение волны  $\psi_p$  вдоль большей полуоси эллипсоида приводит к тому, что лепестки диаграммы распределения для такого эллипсоида оказываются менее выраженными, чем на диаграмме для шара (штриховая линия).

Рис. 4 показывает, что геометрическая симметрия тела вдоль направления распространения волны обеспечивает симметрию диаграмм в обоих сечениях  $\Pi_1, \Pi_2$ .

Диаграммы на рисунке 5 построены для случая  $\theta_0 = \pi/6$ . в этом случае симметрия диаграммы наблюдается только в сечении  $\Pi_2$ . А в сечении  $\Pi_1$  диаграмма распределения  $p'(\theta)$  обладает явно выраженной асимметрией относительно направления распространения падающей волны. В теневой области величина изменения амплитуды давления в суммарном поле в зависимости от  $\theta$  имеет порядок амплитуды давления в падающей волне.

На рис. 6, 7 представлены результаты расчетов нормированного давления  $p'$  в третьей серии численных экспериментов. В этой серии рассматривалось рассеяние звука эллипсоидом с полуосями  $a = 3, b = 2, c = 1$ . По сути эллипсоид в этой серии такой же, что и во второй. Но при  $\theta_0 = 0$  в этом случае падающая волна распространяется вдоль меньшей полуоси эллипсоида (по нормали к большей).

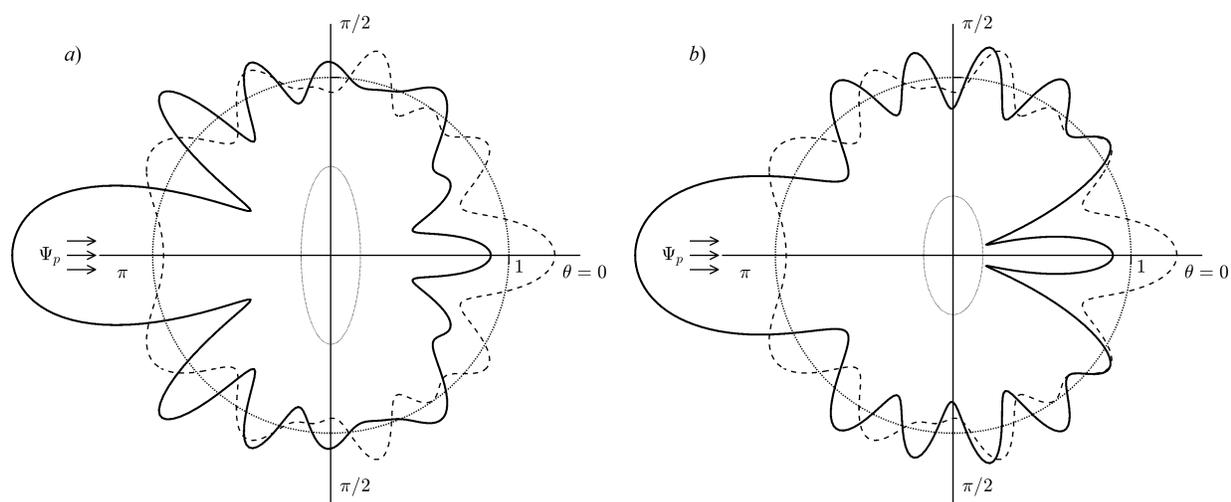


Рис 6: Распределение давления  $p'$  при  $a = 3, b = 2, c = 1, \theta_0 = 0$

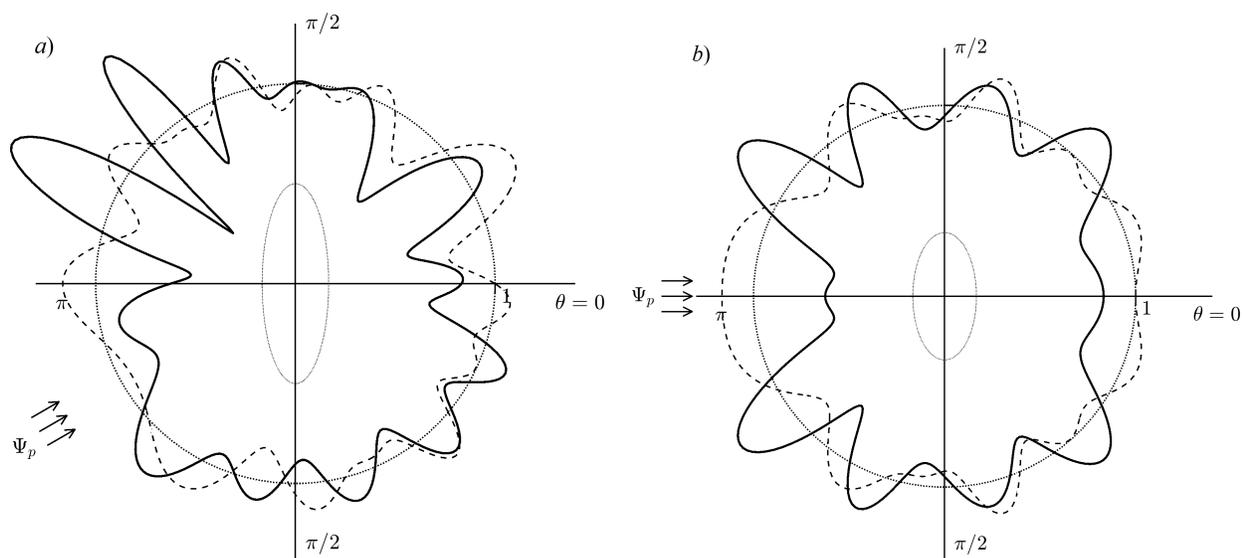


Рис 7: Распределение давления  $p'$  при  $a = 3, b = 2, c = 1, \theta_0 = 30^\circ$

Диаграммы распределения на рис. 6 показывают существенное их отклонение от варианта для шара и соответствующих вариантов для случая  $a = 1, b = 2, c = 3$  в направлениях  $\theta = 0, \pi$ .

Эти отклонения свидетельствуют об увеличении эффективной поверхности рассеяния при такой ориентации эллипсоида (таком направлении распространения падающей волны).

Диаграммы на рисунке 7 построены для случая  $\theta_0 = \pi/6$ . Интересно, что в этом случае в сечении  $\Pi_1$  максимальное изменение амплитуды давления в суммарном поле (порядок амплитуды давления в падающей волне) в зависимости от  $\theta$  наблюдается уже не в теневой области, а в освещенной.

## 9. Заключение

Сравнение двух схем приближенного вычисления интегралов показывает, что для получения погрешности в решении не превышающей 0.0001 по абсолютной величине при использовании схемы вычисления интегралов на основе параллелепипедальных сеток (по формулам (42)) можно получить сокращение времени вычислений интеграла от 10% до 12%.

Результаты данной работы можно развить применением Фурье интерполяции по тригонометрической системе функций и обобщенной Фурье интерполяции по сферическим гармоникам в узлах параллелепипедальной сетки. Также интерес представляет адаптация квадратурных формул по параллелепипедальным сеткам для вычисления возникающих несобственных интегралов.

Использование теоретико-числовых сеток при решении задач механики может обеспечить повышение эффективности процедур вычисления интегралов, в частности в задачах о рассеянии звуковых волн упругими телами на основе представления акустического поля в форме Кирхгофа-Гельмгольца.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д. Колтон, Р. Кресс. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. Мир. 1987. 311 с.
2. S. Kirkup. The Boundary Element Method in Acoustics: A Survey // Appl. Sci. 2019. V. 9. 1642.
3. S. M. Rao. An iterative method to solve acoustic scattering problems using a boundary integral equation // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 130, issue 4, pp. 1792–1798.
4. J. A. Fawcett. Scattering from a finite cylinder near an interface // J. Acoust. Soc. Am. 2014. V. 136, issue 2, pp. 485–493.
5. A. M. A. Alsnayyan, J. Li, S. Hughey, A. Diaz, B. Shanker. Efficient isogeometric boundary element method for analysis of acoustic scattering from rigid bodies // J. Acoust. Soc. Am. 2020. V. 147, issue 5, pp. 3275–3284.
6. К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
7. Е. Л. Шендеров. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
8. Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // Чебышевский сборник, 2021. Том. 22, № 3. С. 368–382.
9. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176

10. Н. М. Коробов. Применение теоретико-числовых сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах // Сборник статей. Посвящается академику Михаилу Алексеевичу Лаврентьеву к его шестидесятилетию, Тр. МИАН СССР, 1961, т. 60, с. 195–210.
11. Ю. Н. Шахов. О приближенном решении уравнений Вольтерра II рода методом итераций // Докл. АН СССР, 1961, т. 136, вып. 6, с. 1302–1305.
12. M. Z. Gecmen, E. Celik. Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations with Hosoya polynomials. // Math Meth Appl Sci., 2021, т. 44, с. 11166–11173.
13. W. Shatanawi, N. Mlaiki, D. Rizk, et al. Fredholm-type integral equation in controlled metric-like spaces // Adv Differ Equ, 2021, 358 (2021).
14. S. C. Buranay, M. A. Ozarslan, S. S. Falahhesar. Numerical Solution of the Fredholm and Volterra Integral Equations by Using Modified Bernstein–Kantorovich Operators // Mathematics, 2021, т. 9, 1193.
15. В. А. Быковский. Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках // Докл. АН СССР, 1988, 302:1, с. 11–13.
16. Y. Kolomoitsev, J. Prestin. Approximation properties of periodic multivariate quasi-interpolation operators // Journal of Approximation Theory, 2021, т. 270, 105631.
17. S. C. Buranay, M. A. Ozarslan, S. S. Falahhesar. Numerical Solution of the Fredholm and Volterra Integral Equations by Using Modified Bernstein–Kantorovich Operators // Mathematics, 2021, т. 9, 1193.
18. Н. Н. Добровольский. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник, 2007, т. 8, вып. 1, с. 110–152.
19. Н. М. Коробов. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
20. Н. М. Добровольский, А. Р. Есаян, О. В. Андреева, Н. В. Зайцева. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышевский сборник, 2004, т. 5. Вып. 1. с. 122–143.
21. М. А. Исакович. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
22. В. Новацкий. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
23. Е. Скучик. Основы акустики. Т. 1. М.: Мир, 1976. 520 с.
24. Н. Н. Калиткин. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
25. Ф. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики. Т.2. М.: ИЛ, 1960. 886 с.
26. П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
27. В. Д. Купрадзе. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 473 с.
28. Г. А. Корн, Т. М. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.
29. Н. М. Коробов. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

30. J. J. Faran. Sound scattering by solid cylinders and spheres // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1951. т. 23. № 4. P. 405–418.
31. L. Flax, G. C. Gaunaurd, H. Überall. Theory of resonance scattering // *Physical Acoustics*, edited by Mason W.P. and Thurson R.N. New York: Academic, 1981. т. 15. P. 191–294.

## REFERENCES

1. D. Colton and R. Kress, 1983, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, New York, Wiley-Interscience.
2. S. Kirkup, 2019, “The Boundary Element Method in Acoustics: A Survey”, *Appl. Sci.*, vol. 9. 1642.
3. S. M. Rao, 2011, “An iterative method to solve acoustic scattering problems using a boundary integral equation”, *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 130, issue 4, pp. 1792–1798.
4. J. A. Fawcett, 2014, “Scattering from a finite cylinder near an interface”, *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 136, issue 2, pp. 485–493.
5. A. M. A. Alsnayyan, J. Li, S. Hughey, A. Diaz and B. Shanker, 2020, “Efficient isogeometric boundary element method for analysis of acoustic scattering from rigid bodies”, *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 147, issue 5, pp. 3275–3284.
6. C. A. Brebbia, J. C. F. Telles and L. C. Wrobel, 1984 *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*, Berlin, Springer-Verlag.
7. E. L. Shenderov, 1989, *Sound emission and scattering, [Izluchenie i rasseianie zvuka]*, Leningrad, Shipbuilding.
8. N. N. Dobrovol'skii, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov and N. V. Larin, 2021, “About application of number-theoretic grids in problems of acoustics”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 368–382.
9. N. N. Dobrovol'skii, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov, N. V. Larin, 2021, "About application of number-theoretic grids in problems of acoustics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 368–382.
10. I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2018, “On classical number-theoretic nets”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 118–176.
11. N. M. Korobov, 1961, “Application of number-theoretical sieves to integral equations and interpolation formulas”, *Collection of articles. To the 60th anniversary of academician Mikhail Alekseevich Lavrent'ev, Trudy Mat. Inst. Steklov.*, vol. 60, pp. 195–210.
12. Yu. N. Shakhov, 1961, “The approximate solution of Volterra equations of the second kind by the method of iterations”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 136, issue 6, pp. 1302–1305.
13. M. Z. Gecmen and E. Celik, 2021, “Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations with Hosoya polynomials”, *Math Meth Appl Sci.*, vol. 44, pp. 11166–11173.
14. W. Shatanawi, N. Mlaiki, D. Rizk, et al., 2021, “Fredholm-type integral equation in controlled metric-like spaces”, *Adv Differ Equ*, 358 (2021).

15. S. C. Buranay, M. A. Ozarslan and S. S. Falahhesar, 2021, “Numerical Solution of the Fredholm and Volterra Integral Equations by Using Modified Bernstein–Kantorovich Operators”, *Mathematics*, 9, 1193.
16. V. A. Bykovskii, 1988, “Discrete Fourier transform and cyclic convolution on integral lattices”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 302:1, pp. 11–13.
17. Yu. Kolomoitsev and J. Prestin, 2021, “Approximation properties of periodic multivariate quasi-interpolation operators”, *Journal of Approximation Theory*, vol. 270, 105631.
18. S. C. Buranay, M. A. Ozarslan and S. S. Falahhesar, 2021, “Numerical Solution of the Fredholm and Volterra Integral Equations by Using Modified Bernstein–Kantorovich Operators”, *Mathematics*, vol. 9, 1193.
19. N. N. Dobrovol’skii, 2007, “Discrepancy of two-dimensional Smolyak grids”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 8, no. 1, pp. 110–152.
20. N. M. Korobov, 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]*, 2nd ed., MTSNMO, Moscow, Russia.
21. N. M. Dobrovol’skii, A. R. Yesayan, O. V. Andreeva and N. V. Zaitseva, 2004, “Multidimensional number-theoretic Fourier interpolation” [Mnogomernaya teoretiko-chislovaya Fur’ interpol’yaciya], *Chebyshevskii sbornik*, vol 5, no 1, pp. 122–143
22. M. A. Isakovich, 1973, *General acoustics [Obshchaya akustika]*, Moscow, Nauka.
23. W. Nowacki, 1963, *Dynamics of elastic systems*, New York, Wiley.
24. E. J. Skudryzk, 1971, *The Foundations Acoustic*, New York, Springer-Verlag.
25. N. N. Kalitkin, 1978, *Numerical methods [Chislennye metody]*, Moscow, Nauka.
26. P. M. Morse and H. Feshbach, 1953, *Methods of Mathematical Physics*, New York, McGraw-Hill.
27. P. K. Banerjee and R. Butterfield, 1981, *Boundary element methods in engineering science*, New York, McGraw-Hill.
28. V. D. Kupradze, 1965, *Potential Methods in the Theory of Elasticity*, Israel Program for Scientific Translations.
29. G. A. Corn and T. M. Corn, 2000, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, New York, Dover Publications.
30. N. M. Korobov, 1959, “Calculation of multiple integrals by the method of optimal coefficients” [Vychislenie kratnykh integralov metodom optimalnykh koeffitcentov], *Vestn. Moscow university*, no. 4, pp. 19-25.
31. J. J. Faran, 1951, “Sound scattering by solid cylinders and spheres”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 23, no.4, pp. 405–418.
32. L. Flax, G. C. Gaunaurd and H. Überall, 1981, “Theory of resonance scattering”, *Physical Acoustics, edited by Mason W.P. and Thurson R.N.*, New York, Academic, vol. 15, pp. 191–294.