ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 2 (2014)

УДК 512.577

О НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ УНАРОВ

А. Л. Расстригин (г. Волгоград)

Аннотация

Формацией называют класс алгебраических систем, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В заметке описаны конечные насыщенные в классе всех конечных унаров формации унаров.

Формации получили широкое применение при изучении конечных групп. При этом большое внимание уделялось насыщенным формациям. Формация $\mathfrak{F}$ конечных групп называется насыщенной, если для любой конечной группы G из того, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$, где $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G.

Конгруэнция θ алгебраической системы A называется фраттиниевой, если для любой собственной подсистемы B системы A объединение всех θ-классов, порожденных элементами из B, отлично от A. Класс $\mathfrak{X}$ называется насыщенным в классе $\mathfrak{Y}$, если из того, что $A \in \mathfrak{Y}$ и $A/\theta \in \mathfrak{X}$, где θ — некоторая фраттиниева конгруэнция системы A, всегда следует $A \in \mathfrak{X}$.

Данная заметка посвящена изучению свойств формаций конечных унаров, т. е. алгебр с одной унарной операцией.

Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется циклическим, если $f^n(a) = a$ для некоторого целого числа $n > 0$. Будем называть унар циклическим, если все его элементы циклические.

В работе дан признак фраттиниевой конгруэнции конечного унара. Доказано, что в классе конечных унаров насыщенными формациями являются лишь пустая формация, формация всех конечных циклических унаров и формация всех конечных унаров.

Ключевые слова: формация, унар, насыщенная формация, фраттиниева конгруэнция, конгруэнция Фраттини.

Библиография: 17 названий.

ON SATURATED FORMATIONS OF FINITE MONOUNARY ALGEBRAS

A. L. Rasstrigin

Abstract

A class of algebraic systems which is closed under homomorphic images and finite subdirect products is called a formation.

Formations was widely used in group theory. Particularly, the saturated formations of groups is one of the most studied formations. A formation of finite groups is said to be a saturated formation if $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ implies $G \in \mathfrak{F}$ for an arbitrary finite group G and it's Frattini subgroup $\Phi(G)$.

A generalization of these definitions is as follows. A congruence θ on the algebraic system A is called a Frattini congruence if the union of all θ-classes generated by the elements of B differs from A for each proper subsystem B of the algebraic system A. A class $\mathfrak{X}$ is saturated in the class $\mathfrak{Y}$, if $A \in \mathfrak{Y}$ and $A/\theta \in \mathfrak{X}$ for some Frattini congruence θ on A implies $A \in \mathfrak{X}$.

We consider finite formations of monounary algebras in this paper.

An element a of a monounary algebra $\langle A, f \rangle$ is cyclic if $f^n(a) = a$ for some positive integer n. A monounary algebra is cyclic if all of it's elements are cyclic.

First we give a condition for a congruence of finite monounary algebra to be a Frattini congruence. Then we prove that the empty formation, the formation of all finite cyclic monounary algebras and the formation of all finite monounary algebras are the only saturated formations in the class of all finite monounary algebras.

Keywords: formation, monounary algebra, unar, saturated formation, Frattini congruence.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение

Формацией называется класс алгебраических систем, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных (с конечным числом множителей) подпрямых произведений ([1]). Формацию называют *конечной*, если она содержит лишь конечные системы.

Формации изначально получили широкое применение при изучении конечных групп ([2]). При этом большое внимание уделялось насыщенным формациям ([3]). Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ конечных групп называется *насыщенной*, если для любой конечной группы G из того, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$, где $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G.

Обобщения понятия подгруппы Фраттини на универсальные алгебры было дано, например, в [1, 4].

Для подсистемы B и конгруэнции θ алгебраической системы A через θB обозначается объединение $\bigcup_{b\in B}[b]_\theta$ классов конгруэнции θ. Приведем следующие определения из [1].

Конгруэнция θ алгебраической системы A называется *фраттиниевой*, если $\theta B \neq A$ для любой собственной подсистемы B алгебраической системы A. Говорят, что класс $\mathfrak{X}$ *насыщен* в классе $\mathfrak{Y}$, если для любой системы A из того, что $A \in \mathfrak{Y}$ и $A/\theta \in \mathfrak{X}$, где θ — некоторая фраттиниева конгруэнция на A, всегда следует $A \in \mathfrak{X}$.

Через $\Phi_{\mathfrak{Y}}\mathfrak{X}$ обозначают класс всех таких $\mathfrak{Y}$-систем A, что $A/\theta \in \mathfrak{X}$ для некоторой фраттиниевой конгруэнции θ системы A. Через $\mathrm{form}_\Phi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ обозначается наименьшая насыщенная в классе $\mathfrak{Y}$ формация, содержащая класс $\mathfrak{X}$. Формация $\mathrm{form}_\Phi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ является наименьшей формацией, замкнутой относительно оператора $\Phi_{\mathfrak{Y}}$, и называется *насыщенной в $\mathfrak{Y}$ формацией, порожденной* классом $\mathfrak{X}$.

Следуя [4] приведем определение конгруэнции Фраттини. Для подалгебры B алгебры A через $\varphi_B(A)$ обозначается наибольшая конгруэнция θ на A такая, что $\theta B = B$. *Конгруэнцией Фраттини* $\varphi(A)$ алгебры A называется пересечение конгруэнций $\varphi_M(A)$ для всех максимальных подалгебр M алгебры A, либо A^2, если A не имеет максимальных подалгебр.

Очевидно, что для конечной алгебры A конгруэнция Фраттини $\varphi(A)$ является наибольшей ее фраттиниевой конгруэнцией. Тогда класс $\mathfrak{X}$ конечных алгебр насыщен в классе всех конечных алгебр данной сигнатуры, если для любой конечной алгебры A из того, что $A/\varphi(A) \in \mathfrak{X}$, всегда следует $A \in \mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторая совокупность алгебр одной сигнатуры. Далее через $\mathrm{I}\,\mathfrak{X}$ обозначается абстрактное замыкание совокупности $\mathfrak{X}$, через $\mathrm{Si}\,\mathfrak{X}$ обозначается совокупность всех подпрямо неразложимых алгебр из $\mathfrak{X}$, а через $\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ — наименьшая формация, содержащая $\mathfrak{X}$.

Унаром называется унарная алгебра с одним символом операции. Унарные алгебры и, в частности, унары изучались многими математиками ([5, п. 13.3], [6]–[8]). Далее рассматриваются только конечные унары, операция обозначается f. Множество целых неотрицательных чисел обозначается $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$. Используются обозначения [9]. Через $C_m^n = \langle a \mid f^n(a) = f^{n+m}(a)\rangle$ обозначается унар с образующим a и определяющим соотношением $f^n(a) = f^{n+m}(a)$, где $n, m \in \mathbb{N}_0$, $m > 0$. Унар, изоморфный унару C_m^0, называют *циклом* длины m. Унар называется *циклическим*, если все его элементы принадлежат циклам. Если A, B — унары, то запись $B \leqslant A$ означает, что унар B является подунаром унара A, то есть $B \subseteq A$. Если A, B, C — унары, причем $C = A \cup B$ и $A \cap B = \varnothing$, тогда унар C обозначается $A + B$ и называется *прямой суммой* унаров (*прямых слагаемых*) A и B. Для любого подмножества B унара A обозначим $\langle B\rangle$ подунар унара A, порожденный множеством B. При этом через $\langle a\rangle$ обозначается унар $\langle\{a\}\rangle$, порожденный одноэлементным множеством $\{a\} \subseteq A$.

Формации унаров изучались в [10, 14, 11, 12]. В частности, в [10] было дано структурное описание конечных формаций унаров, основанное на том факте, что произвольная конечная формация алгебр $\mathfrak{F}$ определяется классом своих подпрямо неразложимых алгебр:

$$\mathrm{form}(\mathrm{Si}\,\mathfrak{F}) = \mathfrak{F} \tag{1}$$

В [15, 16] описаны подпрямо неразложимые унары. Перечислим здесь конечные подпрямо неразложимые унары.

Лемма 1 ([16]). *С точностью до изоморфизма конечными подпрямо неразложимыми унарами являются следующие унары и только они:*
C_1^h *(*$h \geqslant 1$*),* $C_{p^k}^0$ *(*p *— простое,* $k \in \mathbb{N}_0$*) и* $C_{p^k}^0 + C_1^0$*.*

2. Насыщенные конечные формации унаров

Следующая лемма дает признак фраттиниевой конгруэнции конечного унара.

Лемма 2. *Конгруэнция* θ *конечного унара* $\langle A, f\rangle$ *фраттиниева тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *если элемент* a *принадлежит* $A \setminus f(A)$*, то класс* $[a]_\theta$ *одноэлементен;*

2. *если* $A = A_1 + A_2$ *для некоторых унаров* A_1*,* A_2*, причем унар* A_1 *является циклом, то* $\theta A_1 = A_1$*.*

Доказательство. Пусть θ — фраттиниева конгруэнция унара A. Если элемент $a \in A$ таков, что $a \notin f(A)$, то $A \setminus \{a\} \leqslant A$ и $\theta(A \setminus \{a\}) \neq A$. Таким образом $(a, x) \notin \theta$ для любого $x \in A \setminus \{a\}$, то есть $|[a]_\theta| = |\{a\}| = 1$. Пусть $A = A_1 + A_2$ и $A_1 \cong C_t^0$ для некоторого t, тогда $\theta A_2 \neq A$. Если $(a_1, a_2) \in \theta$ для некоторых $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, то $\theta A_1 = \theta\langle a_1\rangle = \theta\langle a_2\rangle \subseteq \theta A_2$, что невозможно. Отсюда $\theta A_1 = A_1$.

Обратно. Пусть B — произвольный собственный подунар унара A. Если B не содержит некоторый элемент $a \in A$ такой, что $a \notin f(A)$, то $\theta B \neq A$ по первому условию. Пусть B содержит все элементы $a \in A$, для которых $a \notin f(A)$. Тогда для некоторого цикла $A_1 \leqslant A$, образующего в A прямое слагаемое, имеем $A_1 \nsubseteq B$ и, следовательно, $A_1 \nsubseteq \theta B$ по второму условию. □

Обозначим через $\mathfrak{U}_0$ формацию всех конечных унаров. Согласно лемме 2 для всякого $t \in \mathbb{N}$ на цикле C_t^0 все конгруэнции, включая наибольшую конгруэнцию, являются фраттиниевыми. Отсюда следует, что $C_t^0 \in \Phi_{\mathfrak{U}_0}(\mathrm{I}\{C_1^0\})$ для всех $t \in \mathbb{N}$ и, таким образом, любая непустая насыщенная формация унаров содержит всевозможные циклы. Также по лемме 2 получаем $C_1^h \in \Phi_{\mathfrak{U}_0}(\mathrm{I}\{C_1^1\})$ для всех $h \in \mathbb{N}$. Сделанные замечания позволяют описать насыщенные в классе всех конечных унаров формации.

Теорема 1. *В классе всех конечных унаров насыщенными являются лишь пустая формация, формация всех конечных циклических унаров и формация всех конечных унаров.*

Лемма 3. *Класс всех циклических унаров является формацией.*

Доказательство. Покажем, что класс циклических унаров замкнут относительно конечных подпрямых произведений и гомоморфных образов.

Пусть A — некоторое конечное подпрямое произведение циклических унаров $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Покажем, что произвольный элемент $a \in A$ является циклическим. Для $i = 1, 2, \ldots, k$ пусть a_i — проекция элемента a на A_i. Тогда для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ найдется $n_i \in \mathbb{N}$ для которого $f^{n_i}(a_i) = a_i$. Отсюда $f^{[n_1, n_2, \ldots, n_k]}(a) = a$, где $[n_1, n_2, \ldots, n_k]$ — наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Пусть теперь A — циклический унар. Тогда для произвольного $a \in A$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n(a) = a$. Это равенство остается верным для образа элемента a при любом гомоморфизме унара A. Поэтому все элементы любого гомоморфного образа циклического унара A являются циклическими. □

Лемма 4. *Формация всех конечных циклических унаров является насыщенной в классе всех конечных унаров.*

Доказательство. Обозначим указанную в формулировке леммы формацию через $\mathfrak{F}$. Возьмем $A \in \Phi_{\mathfrak{U}_0}(\mathfrak{F}) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда $A/\theta \in \mathfrak{F}$ для некоторой фраттиниевой конгруэнции θ унара A. Так как для всякого элемента $a \in A$ класс $[a]_\theta$ является циклическим элементом фактор унара A/θ, то по лемме 2 в A отсутствуют элементы, не принадлежащие $f(A)$. Отсюда A — циклический унар, $A \in \mathfrak{F}$. □

Доказательство теоремы. Насыщенность пустой формации и формации $\mathfrak{U}_0$ всех конечных унаров очевидна. Формация всех циклических унаров насыщена в $\mathfrak{U}_0$ по лемме 4.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация унаров. Возможны две ситуации: либо $\mathfrak{F}$ состоит лишь из циклических унаров, либо содержит также и не циклические унары.

Пусть все унары из $\mathfrak{F}$ являются циклическими. Так как $C_1^0 \in \mathfrak{F}$, то, как было замечено ранее, $\{C_{p^k}^0 \mid p — \text{простое}, k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \Phi_{\mathfrak{U}_0}(\mathrm{I}\{C_1^0\}) \subseteq \Phi_{\mathfrak{U}_0}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$. Заметим также, что для всякого простого числа p и $k \in \mathbb{N}$ из $C_{p^k}^0 \in \mathfrak{F}$ следует, что $C_{p^k}^0 + C_1^0 \in \mathfrak{F}$ (см. [10], лемма 5). Тогда, согласно лемме 1, имеем $\mathrm{Si}\,\mathfrak{F} = \mathrm{I}\{C_{p^k}^0, C_{p^k}^0 + C_1^0 \mid p — \text{простое}, k \in \mathbb{N}_0\}$. Возьмем произвольно конечный циклический унар A. Тогда по теореме Биркгофа о подпрямом разложении унар A является конечным подпрямым произведением некоторых конечных подпрямо неразложимых унаров $A_1, \ldots, A_n$ (см., например, [17], глава II, следствие 8.7). Унары $A_1, \ldots, A_n$ являются гомоморфными образами унара A и, по лемме 3, циклическими унарами. Но, согласно лемме 1, все конечные циклические подпрямо неразложимые унары принадлежат $\mathrm{Si}\,\mathfrak{F}$. Отсюда $A_1, \ldots, A_n \in \mathrm{Si}\,\mathfrak{F}$ и $A \in \mathfrak{F}$. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ содержит все циклические унары.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ содержит некоторый не циклический унар. Тогда, ввиду формулы (1) и леммы 3, класс $\mathrm{Si}\,\mathfrak{F}$ также содержит некоторый не циклический унар A. Согласно лемме 1 унар A изоморфен унару C_1^h для какого-то $h \in \mathbb{N}$.

Поэтому $\mathrm{Si}\,\mathfrak{F}$ содержит унар C_1^1. Отсюда $\{C_1^h \mid h \in \mathbb{N}\} \subseteq \Phi_{\mathfrak{U}_0}(\mathrm{I}\{C_1^1\}) \subseteq \Phi_{\mathfrak{U}_0}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$. То есть, согласно лемме 1, формация $\mathfrak{F}$ содержит все конечные подпрямо неразложимые унары. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_0$ по формуле (1). $\square$

3. Заключение

Унарные алгебры обладают определенной спецификой по сравнению с такими классическими объектами как группы, кольца. В связи с этим, в рамках изучения общей теории классов алгебраических систем неотъемлемым является рассмотрение различных классов унарных алгебр и, как частный случай, унаров.

С использованием описания подпрямо неразложимых унаров [16] в настоящей работе получено описание конечных насыщенных в классе всех конечных унаров формаций унаров. Показано, что в классе конечных унаров насыщенными формациями являются лишь пустая формация, формация всех конечных циклических унаров и формация всех конечных унаров. При этом дан признак фраттиниевой конгруэнции конечного унара.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. 256 с.

2. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.

3. Gaschütz W. Zur theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Mathematische Zeitschrift. 1963. Bd. 80, H. 1. S. 300–305.

4. Kiss E. W., Vovsi S. M. Critical algebras and the Frattini congruence // Algebra Universalis. 1995. Vol. 34, No. 3. Pp. 336-344.

5. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.

6. Skornjakov L. A. Unars // Universal algebra (Esztergom, 1977). Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 29. North-Holland, Amsterdam-New York, 1982.

7. Jakubíková-Studenovská D., Pócs J. Monounary Algebras. Pavol Jozef Šafárik University (UPJŠ), Košice, 2009. 304 pp.

8. Карташов В. К. О некоторых результатах и нерешенных задачах теории унарных алгебр // Чебышевский сборник. 2011. Т. XII, № 2 (38). С. 18–26.

9. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров // Мат. заметки. 1980. Т. 27, № 1. С. 7–20.

10. Расстригин А. Л. Формации конечных унаров // Чебышевский сборник. 2011. Т. XII, № 2 (38). С. 102–109.

11. Jakubíková-Studenovská D., Pócs J. Formations of finite monounary algebras // Algebra universalis. 2012. Vol. 68, no. 3-4. P. 249–255.

12. Jakubíková-Studenovská D. On pseudovarieties of monounary algebras // Asian-European Journal of Mathematics. 2012. Vol. 5, no. 1. 10 p.

13. Расстригин А. Л. О решетках формаций унаров // Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6 (50). С. 190–194.

14. Расстригин А. Л. О наследственности формаций унаров // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, № 4. С. 108–113.

15. Yoeli M. Subdirectly irreducible unary algebras // Amer. Math. Monthly. 1967. Vol. 74. P. 957–960.

16. Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$. // Archiv der Mathematik. 1970. Vol. 21. P. 256–264.

17. Burris S., Sankappanavar H. P. A Course in Universal Algebra. Graduate Texts in Mathematics no. 78. Springer-Verlag, 1981. URL: `http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/ualg.html`

Волгоградский государственный социально-педагогический университет
Получено 10.04.2014